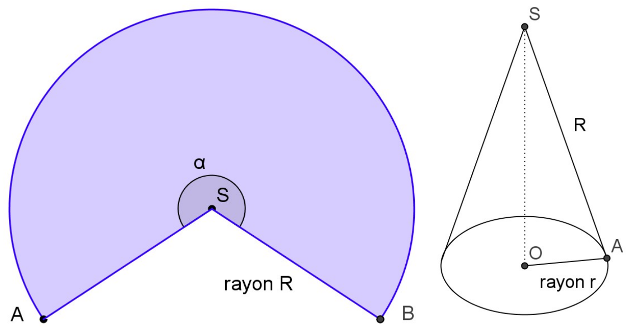
1) Recherche algorithmique d'un maximum

Nous voulons découper un secteur d'angle α (mesuré en degrés) dans un disque de rayon R pour réaliser un cône. Notre question porte sur la valeur à donner à l'angle α pour que le volume V(α) du cône soit maximum.



a) On considère que R=15 *cm*. Quel est l'ensemble de définition D_V de la fonction V?

L'angle α est un angle géométrique pouvant prendre n'importe quelle valeur entre 0° et 360°,
donc D_V=[0;360].

Déterminer l'expression algébrique de V(α).

Le grand arc de cercle *AB* qui deviendra le tour de la base mesure $\frac{\alpha}{360}\times 2\pi R$ soit, en remplaçant *R* par sa valeur $\frac{\alpha}{360}\times 30\pi=\frac{\alpha\pi}{12}$.

En divisant par 2π on trouve alors le rayon de la base du cône $r=\frac{\alpha}{24}$.

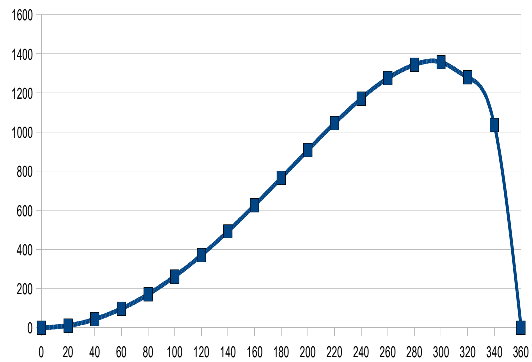
En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle *AOS* rectangle en *O* on obtient la hauteur *SO* du cône $SO=\sqrt{AS^2-r^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{225-\left(\frac{\alpha}{24}\right)^2}$.

Le volume du cône vaut donc $V(\alpha)=\frac{\pi\left(\frac{\alpha}{24}\right)^2\times\sqrt{225-\left(\frac{\alpha}{24}\right)^2}}{3}=\frac{\pi\alpha^2\times\sqrt{225\times 24^2-\alpha^2}}{24^3\times 3}=\frac{\pi\alpha^2\times\sqrt{129600-\alpha^2}}{41472}$.

Dresser un premier tableau de valeurs en prenant α de 20° en 20° dans D_V pour localiser le maximum.

α	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
V(α)	0	11	43	97	170	262	370	492	625	765	907	1045	1171	1275	1344	1357	1279	1036	0

NB : nous avons arrondi les valeurs trouvées à l'entier le plus proche. L'unité de mesure des volumes est ici le cm^3.
La courbe à droite représente la fonction *V*.
On constate que le volume augmente avec l'angle, puis passe par un maximum lorsque $\alpha\approx 300°$ et enfin diminue. Le maximum est situé avec certitude dans l'intervalle [280;320] mais on peut tenter de le trouver dans un intervalle de plus petite amplitude comme [290;310].



Affiner la solution en balayant l'intervalle où est localisé le maximum avec un pas de 1°.

α	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
V(α)	1358,9	1359,6	1360,00	1360,27	1360,35	1360,24	1359,9	1359,4	1358,7	1357,8	1356,7

Nous avons reproduit que la partie du tableau qui nous intéresse. On voit que le maximum est obtenu pour $\alpha\approx 294°$. Le maximum est situé avec certitude dans l'intervalle d'amplitude 2 [293;295].

Recommencer une dernière fois pour obtenir une valeur approchée au dixième près de la valeur de α cherchée. Quel est alors le volume maximal V_{max}?

α	293,2	293,3	293,4	293,5	293,6	293,7	293,8	293,9	294,0	294,1
V(α)	1360,298	1360,311	1360,322	1360,331	1360,339	1360,344	1360,3477	1360,3494	1360,3492	1360,347

On voit ici que le maximum est obtenu pour $\alpha\approx 293{,}9°$. La valeur de α pour laquelle *V* atteint son maximum est, avec certitude, dans l'intervalle d'amplitude 0,2 [293,8 ; 294]. En donnant le centre de l'intervalle $\alpha\approx 293{,}9°$, on commet au maximum, une erreur de 0,1°, ce qui est le maximum admis.

Pour information : le volume du cône étant $V(\alpha)=\frac{\pi\alpha^2\times\sqrt{129600-\alpha^2}}{41472}$, vous verrez en 1ère que la valeur de α qui maximise *V* est obtenue en annulant $V'(\alpha)=\frac{-\pi\alpha^3+2\pi\alpha(129600-\alpha^2)}{41472\sqrt{129600-\alpha^2}}$. Cette valeur vérifie donc l'équation $\pi\alpha^3=2\pi\alpha(129600-\alpha^2)$ et elle est non-nulle.

Elle vérifie donc l'équation du 2d degré $\alpha^2=2(129600-\alpha^2)$ et comme elle est positive, elle vaut $\alpha=\sqrt{\frac{2\times 129600}{3}}=360\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 293{,}9387691$.

b) La valeur de α pour laquelle *V*(α) est maximum sera t-elle différente si *R* varie? Expliquer. Quelle est l'expression algébrique du volume maximum quand R varie, V_{max}(R) ? Pour quelle valeur de *R* le volume maximum $V_{max}(R)$ sera t-il égal à 1000 cm^3 (1L)?

Si on agrandit la figure, en multipliant le rayon par un facteur d'échelle *k*, toutes les longueurs seront multipliées par ce même coefficient k. Les aires seront multipliées par k^2 et les volumes par k^3 (propriété étudiée en 3ème), mais les angles ne sont pas affectés par l'agrandissement. Le volume, à un coefficient près, suit les mêmes variations quand α varie que celles qu'on vient d'étudier. Le maximum de V, en particulier, sera toujours atteint pour la valeur $\alpha \approx 293{,}9$.

Prenons $V_{max}(15)=1360{,}3494\ cm^3$. Si le rayon est $R=15\,k$, on a multiplié par $k=\frac{R}{15}$.

Le volume est multiplié par $k^3=\frac{R^3}{15^3}=\frac{R^3}{3375}$. On a donc $V_{max}(R)=1360{,}3494\times\frac{R^3}{3375}\approx 0{,}4030665\,R^3\ cm^3$.

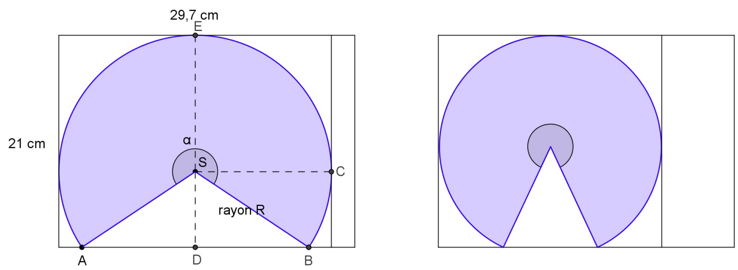
$V_{max}(R)=1000\ cm^3$ pour la solution de l'équation $0{,}4030665\,R^3=1000$ soit, pour $R^3=\frac{1000}{0{,}4030665}\approx 2480{,}98$. En prenant la racine cubique de ce nombre, $R\approx\sqrt[3]{2480{,}98}$ on trouve $R\approx 13{,}54\ cm$.

Pour information : les plus courageux d'entre vous ont fait le calcul avec R au lieu de 15.

Cela donne un rayon r de la base du cône égal à $r=\frac{\alpha R}{360}$.

La hauteur du cône est $SO=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-(\frac{\alpha R}{360})^2}=R\sqrt{1-(\frac{\alpha}{360})^2}=\frac{R}{360}\sqrt{360^2-\alpha^2}$.

Le volume du cône est alors $V(\alpha,R)=\frac{\pi\alpha^2}{3}\times(\frac{R}{360})^3\times\sqrt{360^2-\alpha^2}$. Dans cette expression, lorsque R est fixé à une certaine valeur, il devient une coefficient multiplicateur de la seule expression qui dépend de α : $\alpha^2\sqrt{360^2-\alpha^2}$ car on a $V(\alpha)=[\frac{\pi R^3}{3\times 360^3}]\times[\alpha^2\sqrt{360^2-\alpha^2}]$



Facultatif : le problème est maintenant un peu différent. On découpe un patron de cône dans une feuille de format A4 (21×29,7 cm), en s'arrangeant pour faire tenir le secteur de cône comme indiqué sur les schémas afin de perdre le moins de feuille possible.

Exprimer SD en fonction de R. En déduire une expression de R en fonction de α, puis une expression de $V(\alpha)$. Quel est le domaine de variation de α? Procéder ensuite comme au a) : par une suite de tableaux, trouver la valeur approchée de α pour laquelle le volume est maximum et quelle est la valeur de ce maximum V_{max}?

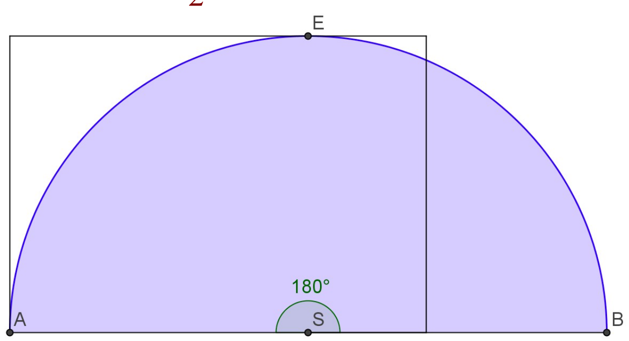
Il suffit de remarquer que SD+ES=21. Or, ES=R. On a donc SD=21−R.

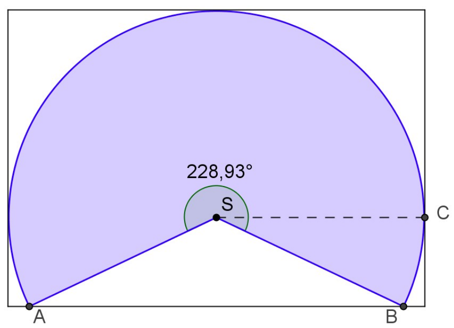
Un peu de trigonométrie dans le triangle SDB, l'angle $\widehat{DSB}$ valant $\frac{360-\alpha}{2}\,°$: SD=SBcos($\frac{360-\alpha}{2}$).

Or, SB=R. On a donc SD=Rcos($\frac{360-\alpha}{2}$).

On en déduit, par identification, que Rcos($\frac{360-\alpha}{2}$)=21−R, d'où R(1+cos($\frac{360-\alpha}{2}$))=21 ou encore :

$$R=\frac{21}{1+\cos(\frac{360-\alpha}{2})}.$$





Comme précédemment, l'angle α est un angle géométrique pouvant prendre n'importe quelle valeur entre 0° et 360°, mais ici certaines valeurs ne sont pas possibles. Pour $\alpha=180\,°$ par exemple, le patron du cône n'entre pas dans la feuille (voir l'illustration de gauche). Le rayon R devrait être 21 cm, et la longueur AB devient égale au diamètre soit à 2R=42 cm. La feuille ne mesurant que 29,7 cm de long, cela ne rentre pas.

Pour d'autres valeurs plus petites de α, cela n'entre pas non plus.

Cherchons la valeur minimale de α.

Au minimum de α, le point C atteint le 2ème bord de la feuille (voir l'illustration de droite).

Le rayon vaut alors R=SC=29,7÷2=14,85. En utilisant la formule précédente, $14{,}85=\frac{21}{1+\cos\frac{360-\alpha}{2}}$ et donc $1+\cos\frac{360-\alpha}{2}=\frac{21}{14{,}85}$, ou encore $\cos\frac{360-\alpha}{2}=\frac{21}{14{,}85}-1=\frac{41}{99}=0{,}4141414...$

L'angle ayant un pareil cosinus est $\frac{360-\alpha}{2}=\cos^{-1}(\frac{41}{99})\approx 65{,}53474113\,°$.

On en déduit que la valeur limite de α est $\alpha=360-2\cos^{-1}(\frac{41}{99})\approx 228{,}9305177\,°$.

Finalement, on doit prendre α dans l'intervalle [228,93°;360°].
On peut repartir de la formule établie dans la partie a) :
$V(\alpha,R)=\frac{\pi\alpha^2}{3}\times(\frac{R}{360})^3\times\sqrt{360^2-\alpha^2}$, mais cette fois, la contrainte de faire tenir le patron comme indiqué, oblige à avoir $R=\frac{21}{1+\cos\frac{360-\alpha}{2}}$.

On peut donc le remplacer dans la formule : $V(\alpha)=\frac{\pi\alpha^2}{3}\times[\frac{\frac{21}{1+\cos\frac{360-\alpha}{2}}}{360}]^3\times\sqrt{360^2-\alpha^2}$.

Bon, j'avoue que ce n'est pas très sympathique, mais n'oublions pas que c'est le tableur qui va faire tout le travail. Voici un extrait du tableau obtenu qui montre que la fonction V est décroissante sur l'intervalle considéré. Le maximum du volume est donc obtenu pour la figure dessinée plus haut à droite. On a alors $\alpha\approx 228{,}9305177°$, $R\approx 14{,}85\,cm$ et $V\approx 1070{,}263414\,cm^3$.

a	223	224	225	226	227	228	228,9305177	230	231	232	233	234	235
V(a)	1144,9	1131,7	1118,7	1106,0	1093,6	1081,4	1070,263414	1057,7	1046,2	1034,9	1023,9	1013,0	1002,3

2) Approximations rationnelles d'une racine carrée

Une fraction continue est de la forme $a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\dots}}}$ où les nombres a_0, a_1, a_2, a_3, etc. sont des entiers naturels non nuls (sauf éventuellement a_0). Pour simplifier l'écriture, on note [a_0, a_1, a_2, a_3, etc...] cette fraction continue. Les réduites de cette fraction continue sont les nombres rationnels :

$$r_0=a_0\,,\ r_1=a_0+\frac{1}{a_1}\,,\ r_2=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}\,,\ r_3=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}\text{, etc.}$$

a) Calculer les cinq premières réduites du nombre [1, 2, 2, 2, ...] (comme les coefficients se répètent, on peut noter [1, (2)] cette fraction continue). Déterminer les valeurs approchées décimales à 10^{-10} près ainsi que les écarts qu'elles font avec $\sqrt{2}$. En déduire que ces réduites s'approchent de plus en plus de cette valeur irrationnelle.

D'après l'écriture [1, 2, 2, 2, ...], la fraction continue du nombre s'écrit $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$.

Les cinq premières réduites sont donc $r_0=1$, $r_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$,

$$r_2=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}=1{,}4\,,\ r_3=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=1+\frac{5}{12}=\frac{17}{12}\approx 1{,}417\ \text{et}$$

$$r_4=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}\approx 1{,}414\,.$$

On remarque, que la 5ème réduite, approchée au millième le plus proche donne les trois premières décimales de $\sqrt{2}\approx 1{,}414213562$ (valeur affichée par la calculatrice). On peut remarquer, de plus que, les réduites se rapprochent de plus en plus de cette valeur : 1 – 1,5 – 1,4 – 1,4166... - 1,41379... – etc. en alternant une valeur supérieure à $\sqrt{2}$ et une valeur inférieure à $\sqrt{2}$. Nous avons affiché les différences avec $\sqrt{2}$ pour constater que le signe de cette différence alterne. Les écarts sont les valeurs absolues (sans les signes) de ces différences.

rang	0	1	2	3	4	5
numérateur	1	3	7	17	41	99
dénominateur	1	2	5	12	29	70
valeur approchée	1	1,5	1,4	1,4166666667	1,4137931034	1,4142857143
différence avec sqrt(2)	0,4142135624	-0,0857864376	0,0142135624	-0,0024531043	0,0004204589	-0,0000721519

La 5ème réduite est r_4, même si l'indice est 4 (on a commencé par 0!). Mais rien n'empêche de donner la 6ème réduite qui est $r_5=\frac{99}{70}$. Les valeurs approchées sont données avec dix chiffres de précision.

b) Procéder comme précédemment avec les fractions continues [2 (2 4)] et [3 (1 2 1 6)] (il vous faudra identifier de quelle racine carrée d'entier ces fractions continues s'approchent).
[2 (2 4)]=[2 2 4 2 4 2 4 2 4 …] et [3 (1 2 1 6)]=[3 1 2 1 6 1 2 1 6 …].

Les cinq premières réduites de [2 (2 4)] sont : $r_0=2$, $r_1=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$,
$r_2=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=2+\cfrac{1}{\frac{9}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9}=2{,}444$, $r_3=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=2+\cfrac{1}{2+\frac{2}{9}}=2+\frac{9}{20}=\frac{49}{20}\approx 2{,}45$ et

$$r_4=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{4}{9}}}=2+\cfrac{1}{2+\frac{9}{40}}=2+\frac{40}{89}=\frac{218}{89}\approx 2{,}449.$$

On remarque, que la 5ème réduite, élevée au carré est égale à $r_4^2=\frac{47524}{7921}\approx 5{,}999747507$ (valeur affichée par la calculatrice). On peut penser qu'on s'approche de $\sqrt{6}$.
La 6ème réduite est ici $r_5=\frac{485}{198}$.

rang	0	1	2	3	4	5
numérateur	2	5	22	49	218	485
dénominateur	1	2	9	20	89	198
valeur approchée	2	2,5	2,4444444444	2,4500000000	2,4494382022	2,4494949495
différence avec sqrt(6)	0,4494897428	-0,0505102572	0,0050452983	-0,0005102572	0,0000515405	-0,0000052067

Le tableau des valeurs approchées et de leur différence avec la racine carrée identifiée, ici $\sqrt{6}$, montre le même rapprochement progressif des réduites, alternativement par valeurs supérieures et inférieures.

Les cinq premières réduites de [3 (1 2 1 6)] sont : $r_0=3$, $r_1=3+\frac{1}{1}=4$,

$r_2=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\approx 3{,}67$, $r_3=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}=3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}\approx 3{,}75$ et

$$r_4=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{6}{7}}}=3+\cfrac{1}{1+\frac{7}{20}}=3+\frac{20}{27}=\frac{101}{27}\approx 3{,}741.$$

On remarque, que la 5ème réduite, élevée au carré est égale à $r_4^2=\frac{10201}{729}\approx 13{,}993$ (valeur affichée par la calculatrice). On peut penser qu'on s'approche de $\sqrt{14}$.
La 6ème réduite est ici $r_5=\frac{116}{31}$.

rang	0	1	2	3	4	5
numérateur	3	4	11	15	101	116
dénominateur	1	1	3	4	27	31
valeur approchée	3	4	3,6666666667	3,7500000000	3,7407407407	3,7419354839
différence avec sqrt(14)	0,7416573868	-0,2583426132	0,0749907201	-0,0083426132	0,0009166460	-0,0002780971

Le tableau des valeurs approchées et de leur différence avec la racine carrée identifiée, ici $\sqrt{14}$, montre le même rapprochement progressif des réduites, alternativement par valeurs supérieures et inférieures.

Pour info : Voici une méthode pour trouver les coefficients de la fraction continue de $\sqrt{3}$ utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Les coefficients a_i sont les parties entières des nombres qu'ils remplacent (vous pouvez utiliser la calculatrice pour les trouver). $1<\sqrt{3}<2$, d'où $\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)$ et $a_0=1$. Ensuite, on a $\sqrt{3}-1=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=\frac{3-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\cfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$, d'où $a_1=1$.

Comme il reste $\sqrt{3}+1$ qui vaut $2+(\sqrt{3}-1)$, on obtient $a_2=2$ et puis cela se répète $a_3=1$, $a_4=2$, etc.
On a donc $\sqrt{3}$ =[1 (1 2)].

Facultatif : Procéder de même pour déterminer l'écriture périodique de $\sqrt{n}$ pour $n\in\{15;\ 17;\ 18;\ 19\}$.
Cherchons l'écriture périodique de $\sqrt{15}$. Comme $\sqrt{15}\approx 3{,}87$, on a $\sqrt{15}=3+(\sqrt{15}-3)$.

$$\sqrt{15}-3=\frac{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)}{\sqrt{15}+3}=\frac{15-9}{\sqrt{15}+3}=\frac{6}{\sqrt{15}+3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{6}}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{15}-3}{6}}=\frac{1}{1+\frac{15-9}{6(\sqrt{15}+3)}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{15}+3}}.$$

Comme $\sqrt{15}+3=6+(\sqrt{15}-3)$, on aboutit à $\sqrt{15}-3=\frac{1}{1+\frac{1}{6+(\sqrt{15}-3)}}$, et nous revoilà au point où on sait que ça va se répéter. On a donc $\sqrt{15}-3=\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{6+(\sqrt{15}-3)}}}}$, soit $\sqrt{15}$ =[3 (1 6)].

Recommençons la manœuvre pour $\sqrt{17}$. Comme $\sqrt{17}\approx 4{,}12$, on a $\sqrt{17}=4+(\sqrt{17}-4)$.

$$\sqrt{17}-4=\frac{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}{\sqrt{17}+4}=\frac{17-16}{\sqrt{17}+4}=\frac{1}{\sqrt{17}+4}=\frac{1}{8+\sqrt{17}-4}.$$

Nous revoilà déjà au point où on sait que ça va se répéter.
On a donc $\sqrt{17}-4=\frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+\sqrt{17}-4}}}$, soit $\sqrt{17}$ =[4 (8)].

Pour $\sqrt{18}$, comme $\sqrt{18}\approx 4{,}24$, on a $\sqrt{18}=4+(\sqrt{18}-4)$.

$$\sqrt{18}-4=\frac{(\sqrt{18}-4)(\sqrt{18}+4)}{\sqrt{18}+4}=\frac{18-16}{\sqrt{18}+4}=\frac{2}{\sqrt{18}+4}=\frac{1}{\frac{\sqrt{18}+4}{2}}=\frac{1}{4+\frac{\sqrt{18}-4}{2}}=\frac{1}{4+\frac{18-16}{2(\sqrt{18}+4)}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{18}+4}}.$$

Comme $\sqrt{18}+4=8+(\sqrt{18}-4)$, on aboutit à $\sqrt{18}-4=\frac{1}{4+\frac{1}{8+(\sqrt{18}-4)}}$, et nous revoilà au point où on sait que ça va se répéter. On a donc $\sqrt{18}-4=\frac{1}{4+\frac{1}{8+\frac{1}{4+\frac{1}{8+(\sqrt{18}-4)}}}}$, soit $\sqrt{18}$ =[4 (4 8)].

Pour $\sqrt{19}$, c'est un peu plus long. Il faut s'armer de courage pour entreprendre ce calcul, mais ce qui est sûr, c'est qu'on va y arriver. Il faut juste éviter les erreurs de calcul...
On arrive à $\sqrt{19}-4=\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8+(\sqrt{19}-4)}}}}}}$, soit $\sqrt{19}$ =[4 (2 1 3 1 2 8)].

Si on cherche les premiers développement périodiques des racines d'entiers, on trouve :
$\sqrt{2}$ =[1 (2)] ; $\sqrt{3}$ =[1 (1 2)] ; $\sqrt{5}$ =[2 (4)] ; $\sqrt{6}$ =[2 (2 4)] ; $\sqrt{7}$ =[2 (1 1 1 4)] ; $\sqrt{8}$ =[2 (1 4)] ;
$\sqrt{10}$ =[3 (6)] ; $\sqrt{11}$ =[3 (3 6)] ; $\sqrt{12}$ =[3 (2 6)] ; $\sqrt{13}$ =[3 (1 1 1 1 6)] ; $\sqrt{14}$ =[3 (1 2 1 6)] ;
$\sqrt{15}$ =[3 (1 6)] ; $\sqrt{17}$ =[4 (8)] ; $\sqrt{18}$ =[4 (4 8)] ; $\sqrt{19}$ =[4 (2 1 3 1 2 8)] ; $\sqrt{20}$ =[4 (2 8)] ;
$\sqrt{21}$ =[4 (1 1 2 1 1 8)] ; $\sqrt{22}$ =[4 (1 2 4 2 1 8)] ; $\sqrt{23}$ =[4 (1 3 1 8)] ; $\sqrt{24}$ =[4 (1 8)] ; etc.
On a déjà eu de beaux palindromes comme « 21312 », mais on en trouve de plus longs, un peu plus loin :
$\sqrt{31}$ =[5 (1 1 3 5 3 1 1 10)], donc $\sqrt{31}$ a le premier palindrome de longueur 7 : « 1135311 ».
$\sqrt{43}$ =[6 (1 1 3 1 5 1 3 1 1 12)] montre un palindrome de longueur 9 : « 113151311 ».
Nous avons trouvé ces écritures périodiques en transformant la méthode ci-dessus en algorithme et en programmant celui-ci (l'applet Java est disponible sur mathadomicile.fr).