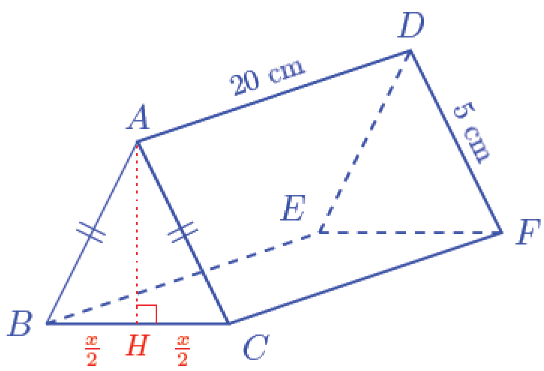
2^{de}	DM1	Études des fonctions	septembre 2017

La note a un faible coefficient.
Travail à faire individuellement, en l'espace de 15 jours.
Le soin apporté à la rédaction est aussi important que l'exactitude des résultats.

1) Recherche algorithmique d'un maximum

Une boîte a la forme d'un prisme droit à base triangle isocèle. On a $AB = 5$ cm et $AD = 20$ cm, mais BC est variable. On note $BC = x$, l'objet du problème étant de déterminer x pour que le volume de la boîte soit maximal.



a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC existe (*indication : $\mathcal{D}$ est un intervalle fermé* $[a\,;b]$).
Une longueur doit être positive donc $BC = x \geq 0$.
D'autre part, le triangle n'existe que si chacun des côtés est inférieur à la somme des deux autres, donc on doit également avoir $x \leq AB+AC=10$. Finalement, le triangle ABC existe si et seulement si $0 \leq x \leq 10$. L' intervalle cherché est $\mathcal{D}=[0\,;10]$.

b) En notant H le pied de la hauteur issue de A dans ABC, déterminer l'aire du triangle ABC, notée $\mathcal{A}(x)$ puis le volume de la boîte, noté $\mathcal{V}(x)$.
Soit H le pied de la hauteur issue de A dans ABC. Ce dernier étant isocèle, H est le milieu de $[BC]$ et on a, d'après le théorème de Pythagore : $AH^2+BH^2=AB^2$ et comme $BH=BC\div2=x\div2$, on a
$AH^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=5^2$ d'où $AH^2=25-\frac{x^2}{4}$ et en prenant la racine carrée car AH étant une longueur est positif : $AH=\sqrt{25-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{100-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{100-x^2}}{2}$, cela se simplifie en mettant au même dénominateur et en sortant ce dénominateur (4) de la racine carrée.
L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}(x)=\frac{AH\times BC}{2}=\frac{x\sqrt{100-x^2}}{4}$.
Le volume du prisme est l'aire de sa base $\mathcal{A}(x)$ multipliée par sa hauteur $AD = 20$.
On a donc : $\mathcal{V}(x)=\frac{20x\sqrt{100-x^2}}{4}=5x\sqrt{100-x^2}$.

c) Montrer que $\mathcal{V}(a)=\mathcal{V}(b)=0$.
$\mathcal{V}(0)=5\times0\sqrt{100-0^2}=0$ et $\mathcal{V}(10)=5\times10\sqrt{100-10^2}=50\sqrt{100-100}=50\sqrt{0}=0$.
En déduire que $\mathcal{V}$ passe par un maximum $\mathcal{V}_{max}$ atteint pour $x=x_0$ avec $a<x_0<b$.
Pour $0<x<10$, le volume est strictement positif car une racine carrée est toujours positive : $\sqrt{100-x^2}\geq0$ avec l'égalité pour $100-x^2=0$, c'est-à-dire pour $x=0$ ou $x=10$. Entre ces deux valeurs la racine ne s'annule pas et la fonction prend donc des valeurs finies et positives. Il y en a forcément une plus grande que les autres, c'est le maximum de $\mathcal{V}$. La valeur de x pour laquelle ce maximum est atteint est notée x_0. On a donc, pour $0<x_0<10$, $\mathcal{V}(x_0)$ maximum.
Pour s'approcher de ce maximum, donner un premier tableau de données qui balaye régulièrement l'intervalle $\mathcal{D}$. Prendre, par exemple, pour valeurs de x : $a,\ a+\frac{b-a}{10},\ a+\frac{2(b-a)}{10},\ a+\frac{3(b-a)}{10},\ \dots,\ b$.
On balaie l'intervalle $\mathcal{D}=[0\,;10]$ avec un pas de 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V(x)	0	49,749371855	97,979589711	143,09088021	183,3030278	216,50635095	240	249,949995	240	196,15045246	0

NB : pour obtenir ce tableau, on utilise un tableur : celui de la calculatrice convient mais il faut recopier les valeurs. Sur un DM on peut coller un tableau imprimé à partir d'un tableur sur ordinateur (calc d'OpenOffice ou bien Excel de Microsoft).

Déduire de cela un nouvel intervalle $[a'\,;b']$ d'amplitude inférieure à celle de $\mathcal{D}$ dans lequel se situe x_0.
Ce balayage nous permet de comprendre que le maximum est obtenu pour x dans l'intervalle $\mathcal{D}'=[6\,;8]$

d) Recommencer le balayage comme dans la question précédente, mais en partant de $[a' ; b']$; on obtient alors un intervalle $[a'' ; b'']$. Selon cette méthodologie, déterminer une valeur approchée de x_0 qui ne s'éloigne pas de la valeur exacte de plus de un millième.

On recommence donc en faisant varier x de 0,1 en 0,1 sur cet intervalle (on obtiendra ainsi 20 valeurs)

NB : on aurait pu prendre 10 valeurs en prenant un pas de 0,2 (ce n'est pas incorrect, au contraire, cela colle mieux à la consigne, mais c'est plus intéressant de balayer avec des dixièmes directement (on gagne un chiffre dans l'écriture décimale).

x	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7	7,1	7,2	7,3	7,4
V(x)	245,8799707174	246,9786174955	247,9176476171	248,6909678698	249,2921178056	249,7142316729	249,949994999	249,9915948587	249,8306626497	249,4582079227	248,8645414678

Ce balayage nous permet de comprendre que le maximum est obtenu pour x dans $\mathcal{D}'$=[7 ; 7,2].

On recommence avec un pas de 0,01 :

x	7,01	7,02	7,03	7,04	7,05	7,06	7,07	7,08	7,09	7,1	7,11
V(x)	249,9630258653	249,9741074512	249,9832315971	249,9903900873	249,9955746483	249,998776949	249,9999885995	249,9992011507	249,9964060937	249,9915948587	249,9847588149

Ce balayage nous permet de comprendre que le maximum est obtenu pour x dans $\mathcal{D}'$=[7,06 ; 7,08].

On recommence avec un pas de 0,001 :

x	7,064	7,065	7,066	7,067	7,068	7,069	7,07	7,071	7,072	7,073
V(x)	249,999500959	249,9996321322	249,9997433567	249,9998346242	249,9999059261	249,999957254	249,9999885995	249,999999954	249,9999913091	249,9999626563

Il semble donc, finalement, qu'à un millième près, le maximum soit obtenu pour x=7,071 cm.

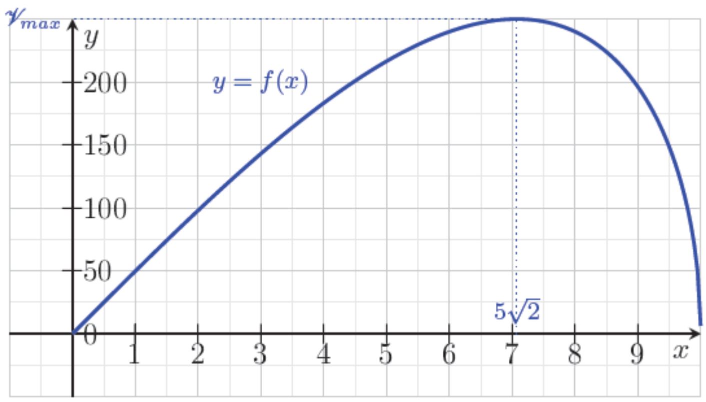
NB : la valeur exacte, nous la déterminerons en 1ère, vaut $5\sqrt{2} \approx 7{,}071067812$ cm.

Combien vaut alors, approximativement, $\mathcal{V}_{max}$?

Ce maximum vaut environ 249,9999999954 cm^3.

NB : la valeur exacte de $\mathcal{V}_{max}$ est 250 cm^3.

Ce n'était pas demandé, mais on peut tracer la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$ pour $x \in [0 ; 10]$.



2) Approximations rationnelles d'un irrationnel

La fonction k est définie sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante : $k(0)=1$;

$k(1)=k(0)-\dfrac{1}{2\times 1+1}$; $k(2)=k(1)+\dfrac{1}{2\times 2+1}$; $k(3)=k(2)-\dfrac{1}{2\times 3+1}$; $k(4)=k(3)+\dfrac{1}{2\times 4+1}$; etc.

On continue ainsi, ajoutant ou retranchant, alternativement, l'inverse du $n^{\text{ième}}$ nombre impair.

a) Transformer les nombres $k(1)$, $k(2)$, $k(3)$ et $k(4)$ en fractions irréductibles, puis, déterminer, de même, les valeurs exactes des nombres rationnels $k(5)$ et $k(6)$.

$k(1)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, $k(2)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{10+3}{15}=\dfrac{13}{15}$, $k(3)=\dfrac{13}{15}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{91-15}{105}=\dfrac{76}{105}$,

$k(4)=\dfrac{76}{105}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{228+35}{315}=\dfrac{263}{315}$. On a ensuite $k(5)=k(4)-\dfrac{1}{11}=\dfrac{2578}{3465}$ et $k(6)=k(5)+\dfrac{1}{13}=\dfrac{36979}{45045}$

b) Écrire un algorithme qui traduise cette définition de la fonction k : on entre l'entier n, l'algorithme donne une valeur décimale approchée de $k(n)$. Programmer cet algorithme sur la calculatrice ou sur un ordinateur. Tester le programme pour retrouver les valeurs déjà calculées de $k(n)$. Lorsque le programme est au point, déterminer les valeurs approchées de $k(7)$ à $k(10)$. Écrire l'algorithme et le programme.

Ainsi qu'on l'a fait dans la correction du TD n°3, on peut utiliser la fonction $n \mapsto (-1)^n$ qui prend pour valeur 1 ou -1 selon que n est pair ou impair. Cela conduit à l'algorithme suivant :

K=1
Lire N
Pour I allant de 1 à N
K=K+ $(-1)^I \div (2I+1)$
fin de la boucle « Pour »
Afficher K

On peut aussi faire autrement (comme dans la 3$^{\text{ème}}$ solution du TD n°3) : en calculant séparément le nombre impair M et le coefficient C qui vaut +1 ou -1 et qui permet d'ajouter ou de retrancher alternativement l'inverse de M.

algorithme	Casio	TI	Python Numworks
K=1 C=1 Lire N Pour I allant de 1 à N M=2×I+1 C= -C K=K+C÷M fin de la boucle « Pour » Afficher K	1→K 1→C ?→N For 1→I TO N 2×I+1→ M -C→ C K+C/M→ K Next K◢	1 STO→K 1 STO→C Input N For (I,1,N) 2×I+1 STO→ M -C STO→ C K+C/M STO→ K End K◢	k=1 c=1 n=5 [input non disponible] for i in range (1, n+1) : m=2×i+1 c=-c k=k+c/m print(k)

Testons le programme pour retrouver les valeurs déjà calculées de $k(n)$. $k(4)=\frac{263}{315}\approx 0{,}8349206349$.

Avec notre programme, pour k=4 on obtient 0,8349206349206351 ce qui confirme le programme réalisé. On va pouvoir ajouter les valeurs approchées de $k(7)$ à $k(10)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k(n)$	1	0,667	0,867	0,724	0,835	0,744	0,821	0,754	0,813	0,760	0,808

c) Lorsqu'on détermine $4\times k(n)$, les valeurs obtenues s'approchent lentement d'un irrationnel célèbre que l'on note avec une lettre de l'alphabet grec. Découvrir lequel, puis, à l'aide de votre programme, déterminer les valeurs n_1 et n_2 de n pour laquelle $4\times k(n)$ s'écarte, pour la 1$^{\text{ère}}$ fois, de cet irrationnel, de moins de un dixième (pour n_1) et un centième (pour n_2).

π est le nombre irrationnel approché par cette suite de nombres rationnels $4k(n)$. Les valeurs approchées ne sont pas rapidement bonnes, c'est-à-dire proches de la valeur exacte (on le voit sur le tableau ci-dessous où nous avons mis $4\times k(n)$ et aussi sur le graphique qui est plus bas, où l'on constate aussi qu'on se rapproche de π par des valeurs alternativement inférieures et supérieures).

Le tableau suivant donne aussi les écarts entre $4\times k(n)$ et $\pi \approx 3{,}141592654$.

	Valeur approchée	Écart avec π
$4\times k(1)$	2,6666667	0,47925987
$4\times k(2)$	3,4666667	0,32507401
$4\times k(3)$	2,8952381	0,24635456
$4\times k(4)$	3,3396825	0,19808989
$4\times k(5)$	2,9760462	0,16554648
$4\times k(6)$	3,2837385	0,14214583
$4\times k(7)$	3,0170718	0,12452084
$4\times k(8)$	3,2523659	0,11077328
$4\times k(9)$	3,0418396	0,09975304
$4\times k(10)$	3,2323158	0,09072316

Vous voyez dans la dernière colonne que les écarts (différences sans tenir compte du signe) n'arrivent même pas à devenir inférieurs à 0,1 avec $4\times k(8)$. Si l'on veut que cette différence soit inférieure à un dixième (un seul chiffre correct après la virgule), il faut continuer jusqu'au nombre suivant, donc jusqu'à $4\times k(9)$. Cela nous donne la valeur de n_1=9.

Si l'on veut que cette différence soit inférieure à un centième (deux chiffres corrects après la virgule), il faut continuer beaucoup plus loin :
$|4\times k(99)-\pi|\approx 0{,}00999975003123943$ alors que $|4\times k(98)-\pi|\approx 0{,}0101007524813234\,72$.
On a donc n_2=99.
Comment ai-je déterminé cela ? En écrivant un petit programme bien sûr. Le voici en langage Python :

L'instruction « from math import pi » n'est pas (encore) disponible sur Numworks. Il suffit d'affecter à une variable la valeur approchée 3,141592654.
La boucle « While » trouve un emploi ici car on ne connaît pas à l'avance le nombre de tours de boucle à effectuer.
La fonction « abs() » utilisée dans le test de la boucle est la fonction valeur absolue qui sert à examiner la valeur d'un nombre sans son signe. Il faut l'utiliser car les valeurs des différences 4*k- π sont alternativement positives et négatives.

```
from math import pi
k=1
c=1
i=0
e=0.01
while abs(4*k-pi)>e :
  i=i+1
  m=2*i+1
  c=-c
  k=k+c/m
print(i)
print(4*k)
print(abs(4*k-pi))
```

sortie console :

```
99
3.1315929035585537
0.00999975003123943
```

Pour aller plus loin : Pour que l'écart avec π devienne inférieur à 0,001 il faut aller jusqu'à n_3=999.
Car $4\times k(998)-\pi\approx 0{,}001001$ alors que $\pi-4\times k(999)\approx 0{,}000999$.
Pour que l'écart avec π devienne inférieur à 0,0001 il faut aller jusqu'à n_4=9999.
Car $4\times k(9998)-\pi\approx 0{,}00010001$ alors que $\pi-4\times k(9999)\approx 0{,}00009999$.
Cet algorithme d'approximation rationnelle de π n'est pas très bon, mais il a le mérite d'être simple.

d) Prolongements facultatifs :

- Écrire une algorithme qui détermine le numérateur et le dénominateur de $k(n)$ (non simplifié).

Voici les fractions non simplifiées :
$k(7)=\frac{509640}{675675}$; $k(8)=\frac{9339555}{11486475}$; $k(9)=\frac{165965070}{218243025}$; *etc.*
Remarque : Pour déterminer la valeur exacte de $4k(n)$, on peut le faire avec un algorithme.
Celui-ci va déterminer le numérateur A et le dénominateur B de la fraction (au lieu de K qui est la valeur approchée de A/B). Il faut écrire la formule qui permet de calculer $k(n)$ sous la forme d'une seule fraction :
$$\frac{a}{b}+\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{a(2n+1)+(-1)^n\times b}{b(2n+1)}\ .$$
Voici donc l'algorithme :

A=1
B=1
Lire N
Pour I allant de 1 à N
A=A×(2×I+1)+B×$(-1)^I$
B=B×(2×I+1)
fin de la boucle « Pour »
Afficher 4×A
Afficher B

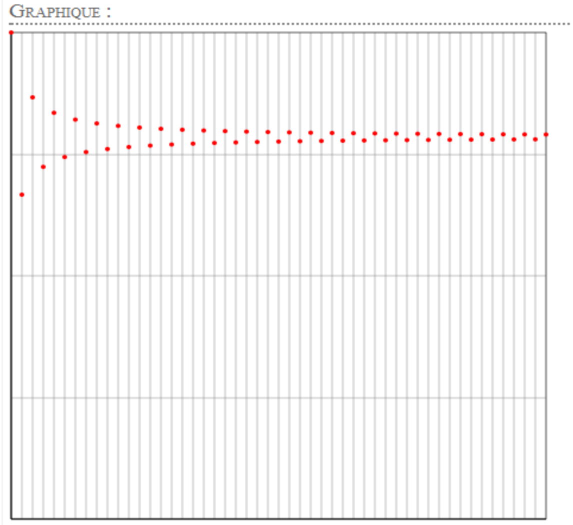
Remarquez qu'il faut calculer A avant B, car sinon la valeur de B aura été changée (par l'instruction B=B×(2×I+1)), alors qu'il faut calculer A avec l'ancienne valeur de B.

- Représenter graphiquement l'évolution de la fonction k pour $k\le 50$.

Voilà cette représentation graphique réalisée à l'aide d'un programme Algobox.
Pour la réaliser, il suffit de placer un point de coordonnées (n ; $k(n)$) en faisant varier n de 0 à 50.

On observe la croissance des valeurs pour n impair et la décroissance des valeurs pour n pair. Progressivement l'intervalle se resserre autour de la valeur de π qui est la limite de la fonction k quand n tend vers l'infini.

GRAPHIQUE :



Xmin: 0 ; Xmax: 50 ; Ymin: 0 ; Ymax: 4 ; GradX: 1 ; GradY: 1