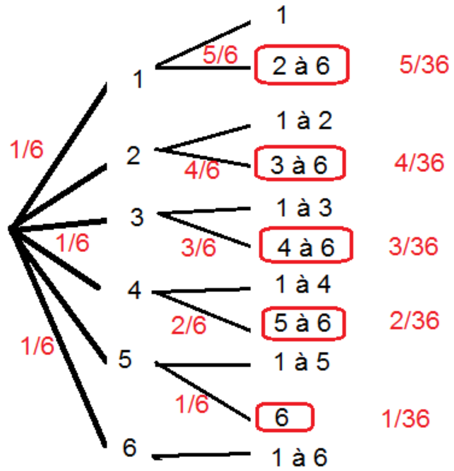
TD n°5 de probabilités : Révision & Entraînement

1. Un dé tout-à-fait normal

On dispose d'un dé classique à 6 faces. Roger vous propose un pari : vous misez 10 €, il tire le dé en premier. C'est ensuite à vous de tirer le dé : si vous arrivez à faire mieux que lui, alors vous gagnez 20 € (votre mise plus 10 € de Roger), sinon vous perdez votre mise. Est-ce un jeu équitable ou bien un jeu avantageux pour l'un des joueurs (dans ce cas lequel est avantagé ?) ?

On sait qu'il y a 6 chances sur 36 d'avoir égalité avec 2 dés. Il reste 30 possibilités, la moitié étant favorable à notre événement (faire mieux que le 1er dé). Il y a donc 15 chances sur 36 que le 2ème dé soit supérieur au 1er, soit 5 sur 12 (moins que la moitié). Si vous n'en êtes pas convaincu, il est toujours possible de dessiner un arbre de probabilités : on y établit que la probabilité de gagner après le 1er dé est de (5+4+3+2+1)/36=15/36.



Donc 5 fois sur 12 je vais gagner 10 € (récupérer sa mise n'est pas considéré comme un gain) et 7 fois sur 12 je vais perdre 10 €. Je vais donc perdre en moyenne 20 € toutes les 12 parties... Ce jeu ne m'est pas favorable.
Pour qu'il le devienne, il faudrait que je gagne au moins x € par partie gagnante, x vérifiant $\frac{5}{12}\times x=\frac{7}{12}\times 10$, soit $x=\frac{70}{5}=14$. Roger doit donc miser 14 € pour que ce jeu soit équitable. S'il mise davantage, par exemple 15 €, cela devient intéressant pour moi...

2. Des dés pas tout-à-fait normaux

On dispose de trois dés à 6 faces :

- un dé *bleu* portant les chiffres 1-6-8 (chaque chiffre en double)
- un dé *jaune* portant les chiffres 2-4-9 (chaque chiffre en double)
- un dé *rouge* portant les chiffres 3-5-7 (chaque chiffre en double)

Marcel joue en premier : il choisit un dé et tire. Vous jouez ensuite : vous choisissez un dé et vous tirez. Celui qui fait le chiffre le plus élevé a gagné. Ce jeu vous parait-il équilibré ? Déterminer pour chaque couple ordonné de dés, votre probabilité de gagner, puis dire s'il y a une stratégie gagnante.

bleu-jaune	bleu-rouge	jaune-bleu	jaune-rouge	rouge-bleu	rouge-jaune
Je gagne 5 fois sur 9 (3 fois après 1, 1 fois après 6 et après 8)	Je gagne 4 fois sur 9 (3 fois après 1, 1 fois après 6 et 0 après 8) ; donc je perds le plus souvent...	Je gagne 4 fois sur 9 (2 fois après 2, 2 fois après 4 et 0 après 9) ; donc je perds le plus souvent...	**Je gagne 5 fois sur 9** (3 fois après 2, 2 fois après 4 et 0 après 9)	**Je gagne 5 fois sur 9** (2 fois après 3, 2 fois après 5 et 1 après 7)	Je gagne 4 fois sur 9 (2 fois après 3, 1 fois après 5 et 1 après 7) ; donc je perds le plus souvent...

Ce jeu est toujours gagnant pour moi si je peux choisir le dé avec lequel je joue : je choisis le dé jaune après un dé bleu, le dé rouge après un dé jaune et le dé bleu après un dé rouge. Dans ce cas, je gagne 5 fois sur 9.

Pour rendre ce jeu équitable, en supposant que je mise 10 € et que Marcel mise x €, il faudrait que $\frac{5}{9}\times x=\frac{4}{9}\times 10$, soit que $x=\frac{40}{5}=8$ €. Je peux parier sans risque avec Marcel, même en lui offrant un léger avantage apparent : par exemple en lui proposant de ne miser que 9 € alors que moi j'en mise 10...

3. Singe anglophone

Un singe tape successivement sur 3 touches d'un clavier qui contient les 26 lettres de l'alphabet.

a) Quelle est la probabilité qu'il tape le mot « GOD » ?

À chaque fois qu'il tape, il y a 26 possibilités, donc le nombre de mots possibles est $26^3=17576$. Par contre il n'y a qu'un seul mot favorable à la réalisation de l'événement. La probabilité est donc $\frac{1}{17576}\approx 0{,}0000568957$, soit environ 0,0057%.

b) Écrire un algorithme n°1 qui simule cette expérience N fois et affiche l'effectif et la fréquence d'apparition du mot « GOD ».

On va essayer N fois de réussir une épreuve qui ne réussit qu'une fois sur 17576, on a donc peu de chance de la réussir si N ne dépasse pas 10000... Quoi qu'il en soit essayons de réaliser ce programme.

Saisir N
T=0

```
Pour I allant de 1 à N :
    S=0
    Pour J allant de 1 à 3
        A=nombre aléatoire entier entre 1 et 26
        Si A=1 alors S=S+1
    Si S=3 alors T=T+1
Afficher T et puis T/N×100
```

Cet algorithme effectue ce qui est attendu : simuler un événement qui a 1 chance sur 26 de se réaliser. Trois fois de suite. Que ce soit la lettre G d'abord, O ensuite et D enfin ou que ce soient d'autres lettres dans d'autres ordres (DOG, AAA, AEI, XYZ, etc.), l'algorithme n'a pas besoin d'être modifié. On n'a pas besoin de tester si A (le nombre aléatoire), la 1ère fois est égal à 7 (la lettre G est la 7ème), par exemple, car cet événement a la même probabilité pour n'importe quelle lettre. Si le singe tirait une lettre d'un sac de Scrabble, ce serait différent car les lettres n'ont pas toutes la même probabilité d'apparition dans ce jeu qui simule les fréquences d'apparition des lettres dans la langue.

```python
from random import randint
N=int(input("Combien d'essais? "))
Total=0
for I in range(N):
  S=0
  for J in range(3):
    A=randint(1,26)
    if A==1:  S+=1
  if S==3: Total+=1
print("Nombre d'apparition de GOD= {} , fréquence={}%".format(Total, Total/N*100))
```

```
Combien d'essais? 10000000
Nombre d'apparition de GOD= 564 , fréquence=0.00564%
Combien d'essais? 100000000
Nombre d'apparition de GOD= 5699 , fréquence=0.005699%
```

Programmer cet algorithme et donner les résultats.

Nombre N de séquences de 3 lettres	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
Nombre d'apparition du mot« GOD »	0	0	1	3	4	44	564	5699
Fréquence d'apparition (%)	0	0	0,1	0,03	0,004	0,0044	0,0056	0,0057

c) Un autre mode opératoire : le singe frappe le clavier *jusqu'à* l'apparition du mot « GOD ».
Écrire un algorithme n°2 qui simule ce mode opératoire N fois : frappe de L lettres consécutives jusqu'à l'apparition du mot ; enregistrement de L (pour en faire la moyenne) et recommencement, N fois.
Cela parait plus logique de procéder ainsi mais la probabilité est alors plus difficile à calculer.

La difficulté de l'algorithme tient au fait que l'on doive *conserver la mémoire* des deux derniers tirages. Car on ne veut pas que ce soit n'importe quelles lettres. Il faut que ce soit GOD ou bien AAA, mais pas n'importe quelle combinaison. On ne peut pas tirer les lettres 3 par 3 (si GOD n'est pas obtenu, alors on retire 3 lettre) car si on obtient AGO, par exemple, il se peut que la lettre suivant soit D... On va donc faire glisser successivement les lettres, dans trois zones de mémoire (notées ici Fin, Milieu et Premier).

```
Saisir Nombre
Total=0
Pour I allant de 1 à Nombre :
    Long=0
    Fin=0
    Milieu=0
    Premier=0
    Tant que Fin=0
        Long=Long+1                      (long est le nombre de lettres tapées, GOD compris)
        Dernier=nombre aléatoire entier entre 1 et 26
        Si Dernier+Milieu+Premier=3      (on teste si le mot est celui qu'on a choisi : AAA ou GOD)
        Alors   Fin=1
        Sinon   Premier= Milieu          (on fait glisser la mémoire des deux dernières lettres)
                Milieu= Dernier
    Total=Total+Long
Afficher Total/Nombre
```

Il ne reste plus qu'à programmer cela et à le tester. L'astuce utilisée pour le test a un but pratique. On évite d'écrire un test plus compliqué comme celui qui est proposé en commentaire (en rouge) : « Dernier=4 et Milieu=15 et Premier=7 ». Ceci aurait pour but de simuler le tirage effectif de GOD plutôt que de celui AAA qui est réalisé au moyen du test simplifié : « Dernier+Milieu+Premier=3 » qui revient strictement au même que « Dernier=1 et Milieu=1 et Premier=1 ».

Programmer cet algorithme et l'exécuter pour N=10 et pour N=100.

Nombre N d'essais jusqu'à apparition du mot	10	100	1000	10000
Longueur moyenne de la séquence	19974	19434	17785	17200

Remarque : Ces nombres sont aléatoires, ils fluctuent autour d'une valeur moyenne théorique que l'on ignore même s'il semble que ce soit le nombre 17576 que l'on a calculé au début. La distribution des valeurs sera d'autant plus resserrée que N sera grand.
Par contre, l'expérience est très longue à exécuter pour de grandes valeurs, peut-être même qu'avec une calculatrice, on peine à obtenir un résultat pour N=10. Il faut dire que l'on demande beaucoup plus que dans l'algorithme n°1. Pour obtenir la valeur N=10000 avec un ordinateur, c'est déjà très long (une bonne dizaine de minutes).
C'était un exercice d'algorithmique. Que dire d'un singe qui taperait une phrase entière ayant un sens ? « Quand est-ce qu'on mange ? » Qu'il tape au hasard et qu'on a eu de la chance de tomber sur cette phrase ou bien doit-on en conclure qu'on a finalement réussi à lui apprendre à écrire ?

```
from random import randint
N=int(input("Combien d'essais? "))
Total=0
for I in range(N) :
  Long=0
  Fin=False
  MiddleLettre=0
  FirstLettre=0
  while Fin==False :
    Long+=1
    LastLettre=randint(1,26)
    if LastLettre+MiddleLettre+FirstLettre==3 :
      Fin=True                    #LastLettre==4 and MiddleLettre==15 and FirstLettre==7
    else:
      FirstLettre=MiddleLettre
      MiddleLettre=LastLettre
  Total+= Long
print("Moyenne des séquences de lettres avant l'apparition de GOD= {} ".format(Total/N))
```

```
Combien d'essais? 10
Moyenne des séquences de lettres avant l'apparition de GOD= 19974.6   26007.5   16039.1
Combien d'essais? 100
Moyenne des séquences de lettres avant l'apparition de GOD= 19434.88
Combien d'essais? 1000
Moyenne des séquences de lettres avant l'apparition de GOD= 17785.088
Combien d'essais? 10000
Moyenne des séquences de lettres avant l'apparition de GOD= 17200.1358
```

4. Équipement

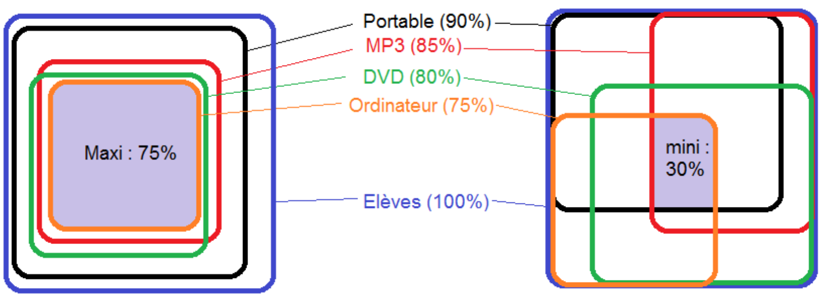
Dans un groupe de 100 élèves, une enquête sur l'équipement *hitech* personnel des élèves a montré que 90 élèves ont un téléphone portable, 85 ont un lecteur de *mp3*, 80 ont un lecteur de *dvd* et 75 ont un ordinateur. Combien au minimum/maximum ont les quatre équipements ?

Notons T : Téléphone portable, M : lecteur de *Mp3*, D : lecteur de *Dvd*, et O: *O*rdinateur.
L'énoncé nous dit que : P(T)=0,9 ; P(M)=0,85 ; P(D)=0,8 ; P(O)=0,75.
C'est facile de savoir le maximum de l'intersection de ces quatre événement : il suffit que les ensembles soient inclus les uns dans les autres, le plus petit sera l'intersection maximale.
La proportion maximum des élèves qui ont les quatre équipements est donc 0,75 (75%).

On peut trouver les fréquences/probabilités des événements contraires :
P($\overline{T}$)=0,1 ; P($\overline{M}$)=0,15 ; P($\overline{D}$)=0,2 ; P($\overline{O}$)=0,25.
L'ensemble $\overline{T}\cup\overline{M}\cup\overline{D}\cup\overline{O}$ est constitué des ensembles qui ne sont pas dans l'intersection commune $T\cap M\cap D\cap O$. C'est le contraire/complémentaire de cet ensemble, que l'on pourrait donc noter $\overline{T\cap M\cap D\cap O}$. Si on additionne les probabilités, considérant qu'il s'agit d'événements incompatibles (au maximum, ils pourraient être incompatibles ; ils prendraient ainsi le plus de place possible, en laissant le moins d'espace possible à son contraire) :

$$P(\overline{T})+P(\overline{M})+P(\overline{D})+P(\overline{O}) = 0{,}1+0{,}15+0{,}2+0{,}25 = 0{,}7$$

On a calculé ainsi la fréquence/probabilité maximum de cet ensemble $\overline{T}\cup\overline{M}\cup\overline{D}\cup\overline{O}$, et du même coup on peut calculer le minimum de la probabilité du contraire, l'intersection $T\cap M\cap D\cap O$. C'est 1 − 0,7 = 0,3.
Nous avons illustré ceci par deux schémas. Finalement, on a $30\leq P(T\cap M\cap D\cap O)\leq 75$.

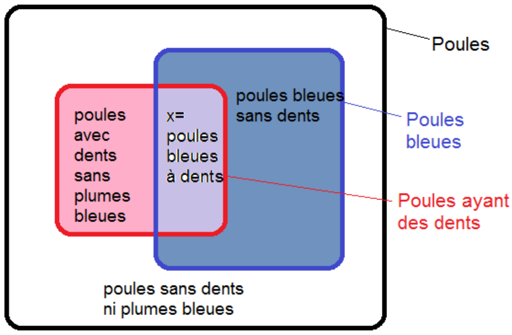


5. Progrès

On n'arrête pas le progrès de la génétique, il y a maintenant des poules qui ont des dents et des poules bleues ! Trois poules sur 7 ont des dents et une poule sur 5 a les plumes bleues. On sait aussi qu'il y a autant de poules avec dents sans plume bleues que de poules sans dents ni plumes bleues. Quelle est la proportion de poules avec des dents parmi les poules bleues ?

Si on note x la proportion de poule bleue ayant des dents, la proportion de poules avec dents sans plume bleues ($D\cap\overline{B}$) est $\frac{3}{7}-x$, celle des poules sans dents ni plumes bleues ($\overline{D}\cap\overline{B}=\overline{D\cup B}$) est :

$1-(\frac{3}{7}+\frac{1}{5}-x)=1-(\frac{15}{35}+\frac{7}{35}-x)=\frac{13}{35}+x$.



Donc, pour traduire l'énoncé, il suffit d'écrire l'égalité :

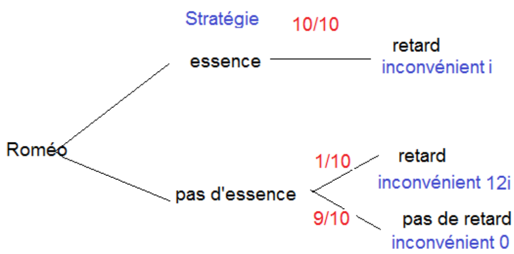
$\frac{3}{7}-x=\frac{13}{35}+x$ qui équivaut à $2x=\frac{-13}{35}+\frac{3}{7}=\frac{-13}{35}+\frac{15}{35}=\frac{2}{35}$, et donc $x=\frac{2}{35}\div 2=\frac{1}{35}$.

La proportion de poules avec des dents parmi les poules bleues est donc x sur 1/5, soit $\frac{1}{35}\div\frac{1}{5}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}\approx 14{,}28\,\%$.

Il y une poule bleue sur sept poules qui ont des dents.

6. Voyant rouge

Roméo monte en trombes dans sa voiture. Il est à la bourre ! Il s'aperçoit alors avec horreur que le voyant d'essence est allumé ! Comble de malchance, il a un rendez-vous très urgent avec Juliette. S'il arrive en retard, il sera bien ennuyé. Il sait que 9 fois sur 10, lorsque le voyant est rouge, il a suffisamment d'essence pour arriver à destination. Doit-il prendre de l'essence et arriver en retard, ou risquer la panne et en subir les conséquences qui seront 12 fois plus ennuyantes qu'un simple retard ?



Notons i l'inconvénient d'un simple retard. C'est ce qui arrivera à Roméo s'il prend de l'essence et qu'il est en retard au rendez-vous. Dans le cas de la stratégie plus risquée, il ne prend pas d'essence et arrive à l'heure, ne subissant aucun inconvénient 9 fois sur 10 (si ce n'est que pour repartir, après avoir vu sa chère Juliette, il n'aura pas plus d'essence dans son réservoir... mais cela ne compte pas ici). Par contre, 1 fois sur 10 il tombe en panne et l'inconvénient est alors de $12i$. L'inconvénient moyen de cette stratégie est :

$$0\times 0{,}9+12i\times 0{,}1=1{,}2i$$

La stratégie de prendre de l'essence apparaît donc la plus sage, puisqu'elle assure un inconvénient moindre, i étant plus petit que $1{,}2i$.

7. Biberon

Samedi soir, Grand-mère vient s'occuper de bébé (6 mois) et Lola (2 ans ½). Les parents sont sortis sans dire si bébé avait pris son dernier biberon. Grand-mère suppose qu'en demandant à Lola si bébé a pris son biberon, elle a 1 chance sur 4 d'avoir une mauvaise réponse. Sachant de plus, qu'il est deux fois plus ennuyeux de ne pas donner de biberon que d'en donner deux, que devrait décider la grand-mère : (I) interroger tout de même Lola et lui faire confiance ou bien (II) donner le biberon d'office ?

Notons i l'inconvénient de donner 2 biberons de suite. Dans la stratégie I, la grand-mère obtient une mauvaise réponse de Lola une fois sur 4. Donc une fois sur 8 Lola dit que bébé a pris son biberon alors que c'est faux, grand-mère prive bébé de son biberon (l'inconvénient est alors de $\frac{1}{8}\times 2i=\frac{i}{4}$) et une fois sur 8 Lola dit que bébé n'a pris son biberon alors que c'est faux, grand-mère lui donne un 2ème biberon (l'inconvénient est alors de $\frac{1}{8}\times i=\frac{i}{8}$), donc au total l'inconvénient est pour le bébé de $\frac{i}{8}+\frac{i}{4}=\frac{3i}{8}$. Dans la stratégie II, la grand-mère donnant toujours un biberon apporte un inconvénient i une fois sur 2, donc l'inconvénient est en moyenne de $\frac{i}{2}$. La stratégie I apporte moins d'inconvénient au bébé, donc la grand-mère interroge et fait confiance à Lola.

Cet exercice ainsi que les deux précédents provient d'un petit livre de problèmes amusants « Logicologique » de Eurêka (alias Marie Berrondo-Agrell), publié aux éditions Dunod en 1996.

DS n°8 de 2017 : *pour s'entraîner encore un peu plus... et stresser un peu moins*

I] Course de Mario Kart
Huit karts sont au départ du Grand Prix Multijoueurs.
a) Combien y a t-il d'ordres d'arrivée différents ?
Il y en a 8!=8×7×6×5×4×3×2=40320. On choisit le candidat qui arrive à la 1ère place disponible (il y a 8 choix possibles), ensuite on choisit le candidat qui arrive à la 2ème place disponible (il y a 7 choix possibles), etc.

b) En supposant que tous ces ordres sont équiprobables, quelle est la probabilité que Mario arrive parmi les trois premiers ?
Le nombre d'ordres d'arrivée différents où Mario arrive parmi les trois premiers est :
3×7×6×5×4×3×2=15120 (on choisit la place de Mario parmi les trois premières, ensuite on choisit le candidat qui arrive à la 1ère place disponible (il y a 7 choix possibles), ensuite on choisit le candidat qui arrive à la 2ème place disponible (il y a 6 choix possibles), etc.).
La probabilité cherchée est donc $\frac{15120}{40320}=\frac{3}{8}=0{,}375$, soit 37,5%. Cette probabilité se trouve aussi, plus simplement, en choisissant juste la place de Mario parmi les 8 possibles.

II] Jeu des 7 familles
On dispose d'un jeu des 7 familles (6 cartes par famille : père, mère, fils, fille, grand-père et grand-mère) dans lequel on prélève, au hasard, deux cartes.
a) Combien y a t-il de mains différentes de deux cartes (NB : dans une main, l'ordre n'intervient pas) ?
Les mains de deux cartes correspondent au choix de 2 cartes parmi 42, sans tenir compte de l'ordre. Pour la 1ère carte on a 42 possibilités, puis on en a 41 pour le 2de. Il y a donc, en tout, 42×41=1722 mains ordonnées (on a aussi bien compté la main PèreChinois-MèreEuropéenne que la main MèreEuropéenne-PèreChinois qui contient les mêmes cartes donc ne sont pas distinctes). Il faut diviser maintenant ce nombre de mains ordonnées par 2 (il y a 2 ordres différents de 2 cartes) : il y a donc 42×41÷2=861 mains équiprobables.

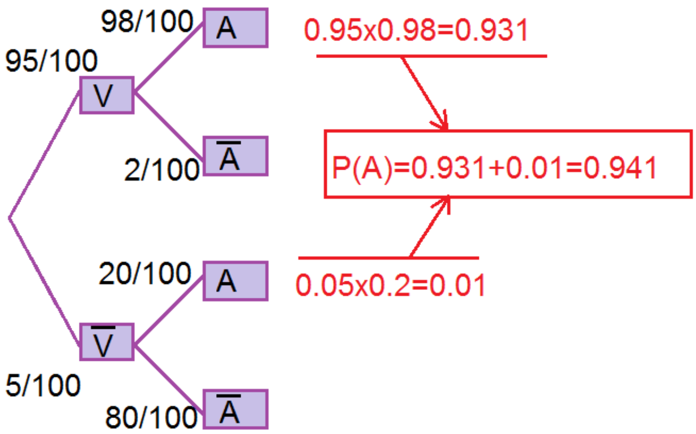
b) On note A : « il y a deux cartes de la même famille » et B : « il y a un père et une mère ».
Quelles sont les probabilités des événements A, B, $A\cap B$ et $A\cup B$?
Les mains qui réalisent A sont 7×6×5÷2=105 (on choisit la famille, les 2 cartes dans la famille et on divise par 2 pour éviter les doublons) donc $P(A)=\frac{105}{861}=\frac{5}{41}\approx 0{,}122$.
Les mains qui réalisent B sont 7×7=49 (on choisit le père et la mère, à chaque fois et indifféremment, parmi les 7 familles) donc $P(B)=\frac{49}{861}=\frac{7}{123}\approx 0{,}057$.
Les mains qui réalisent $A\cap B$ sont 7 (on choisit une des 7 familles) donc $P(A\cap B)=\frac{7}{861}=\frac{1}{123}\approx 0{,}00813$.
On a donc $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{41}+\frac{7}{23}-\frac{1}{123}=\frac{7}{41}\approx 0{,}17$.
Combien de mains cela fait-il ? $\frac{7}{41}=\frac{147}{861}$, cela doit donc faire 147 mains différentes où il y a un père et une mère (peu importe la famille) ou bien deux cartes de la même famille. On pouvait aussi arriver à ce nombre, et donc à la probabilité de $A\cup B$, en additionnant 105 et 49 (les cardinaux de A et B) et en retranchant 7 (le cardinal de $A\cap B$).

III] Contrôle de qualité
Dans une production de 100 000 pièces d'usine, on tire au hasard une pièce et on contrôle sa qualité. À l'issue du contrôle, la pièce est soit acceptée, soit refusée. Mais il arrive que le contrôle fasse quelques erreurs de diagnostic. On définit les événements suivants : V « la pièce est valable » et A « la pièce est acceptée ». On estime que 5% des pièces sont non valables, qu'une pièce valable est refusée dans 2% des cas, et qu'une pièce non valable est acceptée dans 20% des cas.

a) Quelle est la probabilité, pour une pièce choisie au hasard, d'être acceptée.
Le plus simple est de tracer un arbre de probabilités (voir ci-dessous) ; c'est aussi un bon moyen de justifier sa réponse. On déduit de cet arbre que l'événement peut se réaliser de deux façons différentes : soit la pièce est valable et acceptée soit elle ne l'est pas et elle est tout de même acceptée (faux positif).
On pourrait noter cela $A=(A\cap V)\cup(A\cap\overline{V})$.

Ces événements $A\cap V$ et $A\cap\overline{V}$, étant incompatibles, ont des probabilités qui s'ajoutent :
$P(A)=\frac{95}{100}\times\frac{98}{100}+\frac{5}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{93,1}{100}+\frac{1}{100}=\frac{94,1}{100}$, soit 94,1%.

b) Le risque de l'acheteur R_A est la probabilité d'avoir une pièce non valable alors qu'elle est acceptée. Le risque du vendeur R_V est d'avoir une pièce valable alors qu'elle est refusée. Déterminer ces deux risques.



On cherche à calculer la probabilité d'avoir une pièce qui n'est pas valable alors qu'elle est acceptée. Sachant qu'il y a 94,1% des pièces qui sont acceptées et que 1% des pièces sont acceptées sans être valables, la probabilité cherchée, appelée risque de l'acheteur, est :

$$R_A = \left(\frac{1}{100}\right)\div\left(\frac{94,1}{100}\right)=\frac{1}{94,1}\approx 1,0627\,\%$$

Comme on l'a vu en TD, cela peut être fait en passant par le nombre de pièces : sur 100 000 pièces 1000 sont acceptées alors qu'elles ne sont pas valables et 94 100 sont acceptées. La fréquence des pièces acceptées qui ne sont pas valables parmi les pièces acceptées est donc 1000 ÷ 94 100, soit 1,0627% environ.

Ajouté en 2017 (mais inutile pour le contrôle de 2018) : Cela peut aussi être noté avec la notation conditionnelle que l'on n'a fait qu'effleuré : ce qui était demandé est de déterminer $P(\overline{V}/A)=\frac{P(\overline{V}\cap A)}{P(A)}$ *; l'événement* $\overline{V}/A$ *se dit « $\overline{V}$ sachant A ». Beaucoup d'entre vous ont confondu cet événement avec* $\overline{V}\cap A$ *. Notez que, lorsqu'on écrit les probabilités dans l'arbre, on utilise les probabilités conditionnelles :* $\frac{20}{100}$ *n'est rien d'autre que* $P(A/\overline{V})$ *et lorsqu'on « multiplie les probabilités rencontrées en chemin » pour calculer* $P(A\cap\overline{V})$ *, on utilise la formule* $P(A\cap\overline{V})=P(\overline{V})\times P(A/\overline{V})$ *qui peut s'écrire aussi* $P(A/\overline{V})=\frac{P(A\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}$ *. Vous ne manquerez pas de reconnaître la similarité des deux probabilités conditionnelles.*

D'une façon générale, on a $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ *, qui s'écrit aussi* $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$ *. Mais vous aurez tous le bonheur de revoir cela l'an prochain.*

Le risque du vendeur R_V se calcule de la même façon : on divise la probabilité d'avoir une pièce refusée alors qu'elle est valable ($\frac{95}{100}\times\frac{2}{100}=\frac{1,9}{100}$) par la probabilité d'être refusée ($1-\frac{94,1}{100}=\frac{5,9}{100}$).

On a donc $R_V = P(V/\overline{A})=\frac{P(V\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\left(\frac{1,9}{100}\right)\div\left(\frac{5,9}{100}\right)=\frac{1,9}{5,9}\approx 32,2\,\%$.

NB (ajouté après le cours du 14/05/18) : c'est dans l'énoncé qu'il y avait une erreur : le risque du vendeur R_V est d'avoir une pièce valable alors qu'elle est refusée (j'avais écrit le contraire, mais on sait déjà la probabilité qu'une pièce soit refusée alors qu'elle est valable : c'est marqué dans l'énoncé « une pièce valable est refusée dans 2% des cas »). Curieusement personne n'avait souligné ce défaut de l'énoncé en 2017(ou alors je ne l'avais pas pris en considération pour la correction)...

IV] <u>Kangourou</u>

Le kangourou Mat se trouve sur une route représentée par un axe gradué. Il se trouve, au départ, à l'origine O de cet axe (X=0) et avance chaque seconde selon l'algorithme ci-dessous, son avancement étant mesuré par la variable X.

A= nombre aléatoire de [0;1[Si A<0,2 alors X=X+1	a) Élaborer un algorithme contenant une boucle qui simule T=3 secondes du mouvement de Mat et qui affiche la position finale du Kangourou.

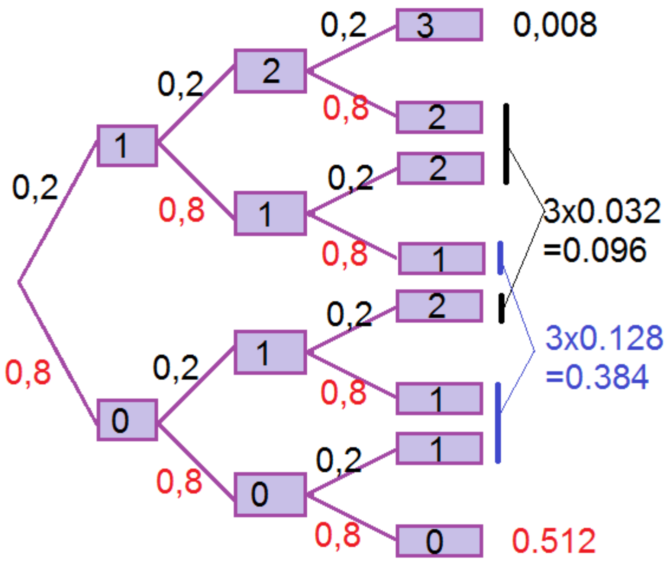
Voici un petit algorithme qui répond à la question.
On n'est pas obligé ici d'utiliser la variable T.

```
X=0
T=3
Pour I allant de 1 à T
        A= nombre aléatoire de [0;1[
        Si A<0,2 alors X=X+1
Afficher X
```

b) Déterminer les valeurs possibles de l'abscisse du kangourou Mat au bout de T=3 secondes ainsi que les

probabilités attachées à chacune de ces valeurs.
Au bout de T=3 secondes, X peut valoir 0, 1, 2 ou 3. La probabilité d'avancer est p=0,2, soit une fois sur cinq. Pour déterminer les probabilités attachées à chacune de ces valeurs, on peut faire un arbre de probabilités (voir ci-contre). En appliquant les deux règles de calcul des probabilités dans un tel arbre, on trouve les probabilités suivantes :

N	3	2	1	0
P(X=N)	$0{,}2^3$	$3\times0{,}2^2\times0{,}8$	$3\times0{,}2\times0{,}8^2$	$0{,}8^3$
P(X=N)	0,008	0,096	0,384	0,512



c) Modifier cet algorithme pour qu'il simule N fois T secondes du mouvement de Mat et détermine la moyenne des abscisses finales. Donner deux résultats d'exécution : pour T=3 ; N=100 et pour T=6 ; N=50.
Comme l'a fait remarqué un élève, on peut se passer de la variable S. Dans ce cas : on met X=0 avant d'entrer dans la 1ère boucle (avant Pour J allant de 1 à N), on enlève X=0 dans la boucle et S=S+X à la fin, et on affiche X/N. Voici l'algorithme modifié dans lequel on a conservé une variable S (comme Somme) et une variable X qui détermine l'abscisse à la fin de la course :

Saisir N
Saisir T
S=0
Pour J allant de 1 à N
    X=0
    Pour I allant de 1 à T
        A= nombre aléatoire de [0;1[
        Si A<0,2 alors X=X+1
    S=S+X
Afficher S/N

```
from random import random
N=int(input("Combien d'essais? "))
T=int(input("Combien de secondes? "))
Somme=0
for J in range(N) :
  X=0
  for I in range(T) :
    A=random()
    if A<0.2 : X+=1
  Somme+=X
print("Moyenne des abscisses finales= {} ".format(Somme/N))
```

```
Combien d'essais? 100
Combien de secondes? 3
Moyenne des abscisses finales= 0.63
```

```
Combien d'essais? 50
Combien de secondes? 6
Moyenne des abscisses finales= 1.32
```

Après programmation, voici deux résultats d'exécution demandés :

- pour T=3 ; N=100. Je trouve 0,63
- pour T=6 ; N=50. Je trouve 1,32

Bien sûr, tout le monde va trouver des résultats différents (en général).
Voici quelques autres résultats possibles :
pour T=3 ; N=100 : 0,63 - 0,64 - 0,63 - 0,55 - 0,62 - 0,46 - 0,59 - 0,55 - 0,60 - 0,68 - 0,71 - 0,58
Pour cette valeur, comme on connaît les probabilités, on peut déterminer la valeur moyenne théorique. Il s'agit de $3\times0{,}008+2\times0{,}096+1\times0{,}384+0\times0{,}512=0{,}6$.
Pour T=6 ; N=50 : 1,32 - 1,32 - 1,26 - 1,24 - 1,18 - 1,40 - 1,20 - 1,04 - 1,04 - 1,18 - 1,26 - 1,38- 1,28 - 1,12
Ici on n'a pas déterminé la loi de probabilité, mais de toutes les façon, il s'agit d'avancer en moyenne de 0,2 à chaque seconde. Donc pour T=6, la moyenne sera de 1,2. Les valeurs fluctuent dans un intervalle, ici qui est [1,04 ; 1,40] mais qui peut être légèrement plus grand dans 95% des cas...

V] <u>La course de Lièvre et Tortue</u>

a) Mme Tortue propose à Mr Lièvre de faire une course : Mme Tortue tire deux dés cubiques et avance d'une case si la somme des dés est inférieure à 12. Elle gagne si elle réussit à avancer ainsi de 12 cases. Si c'est le double-six qui sort, c'est Mr Lièvre qui avance de 12 cases d'un coup et remporte la course. Qui, de Mr Lièvre ou de Mme Tortue, a le plus de chances de gagner au jeu proposé par Mme Tortue ? (Justifier la réponse)
Le jeu proposé par Mme Tortue suppose que, pour qu'elle gagne, les dés n'indiquent pas un double-6 pendant 12 jets de dés. La probabilité de cet événement est $\left(\frac{35}{36}\right)^{12}\approx0{,}713$. C'est donc Mme Tortue qui a le plus de chances de gagner à ce jeu (Mme Tortue n'est pas si bête pour proposer un jeu qui ne l'avantage pas).

b) Mr Renard intervient et propose que la règle de Mme Tortue soit modifiée ainsi : le nombre N de cases à parcourir par Mme Tortue est fixé à une valeur suggérée, pas forcément 12. Quelle valeur de N doit suggérer Mr Renard pour que ce jeu soit le plus équitable possible ?

Le jeu proposé par Mr Renard suppose que, pour que Mme Tortue gagne, les dés n'indiquent pas un double-6 pendant N jets de dés. La probabilité de cet événement s'approche le plus de 0,5 pour N=25 car :

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}50860 \text{ tandis que } \left(\frac{35}{36}\right)^{25}\approx 0{,}49447 \text{ et}$$

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx -0{,}00860 \text{ tandis que } \frac{1}{2}-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}\approx 0{,}00553 .$$

Il faut donc jouer N=25 fois deux dés sans tomber sur un double-six pour que Mme Tortue parvienne à battre Mr Lièvre.

VI] Chapeaux

Trois personnes déposent leur chapeau au vestiaire d'un restaurant.
La dame du vestiaire, un tantinet espiègle, décide de rendre les chapeaux au hasard.
a) Déterminer les valeurs possibles du nombre de personnes qui retrouvent leur chapeau ainsi que les probabilités attachées à chacune de ces valeurs.
Il se peut que toutes (3) ou aucune (0) ne retrouvent son chapeau, ou bien que une personne (1) seulement le retrouve. C'est, par contre, impossible que deux personnes le retrouvent (car la 3ème le retrouverait aussi, forcément). Pour déterminer les probabilités de ces événements je propose de faire la liste des permutations des 3 chapeaux. Notons 123 l'ordre correct des chapeaux. Si la dame du vestiaire les donne dans l'ordre 312 aucun n'a retrouvé son chapeau, par contre avec l'ordre 132 seule le propriétaire du chapeau 1 le retrouve. Voici toutes les permutations, avec les chapeau à la bonne place en gras.

ordres	**123**	**1**32	21**3**	231	312	3**2**1
Nombre de chapeaux bien placés	3	1	1	0	0	1

Puisque les six permutations sont équiprobables, les probabilités s'en déduisent.
On note X=N l'événement que « N personnes retrouvent leur chapeau ».
$P(X=0)=\frac{2}{6}\approx 0{,}333$; $P(X=1)=\frac{3}{6}=0{,}5$; $P(X=2)=0$; $P(X=3)=\frac{1}{6}\approx 0{,}167$.

b) En supposant qu'il y a quatre personnes et quatre chapeaux, déterminer la probabilité de l'événement E : « Aucune des personnes ne retrouve son chapeau ».
On fait le même raisonnement, mais avec 4 chiffres. On sait qu'il y a $4!=4\times3\times2\times1=24$ permutations. On peut en faire la liste, mais il suffit de compter celles qui correspondent à l'événement : 0 personne ne retrouve son chapeau. 1234 est la bonne disposition, il peut y avoir 2, 3 ou 4 en position 1, mais pas 1. Il peut y avoir 1, 3 ou 4 en position 2, mais pas 2, etc.
Voici les dérangements possibles : 2143 – 2341 – 2413 – 3142 – 3412 – 3421 – 4123 – 4312 – 4321
La probabilité cherchée est $P(E)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=0{,}375$.

Bonus (1 point) : Déterminer la probabilité de l'événement E avec cinq personnes et cinq chapeaux.
Même raisonnement, mais avec 5 chiffres. On sait qu'il y a $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ permutations.
On peut en faire la liste, mais il suffit de compter celles qui correspondent à l'événement : 0 personne ne retrouve son chapeau. 12345 est la bonne disposition. Voici les dérangements possibles qui commencent par 2. Il y en a onze.
21453 – 21534 – 23154 – 23451 – 23514 – 24153 – 24513 – 24531 – 25134 – 25413 – 25431
Comme, il parait raisonnable de penser qu'il y en a autant qui commencent par 3, par 4 ou par 5, cela en fait 4 fois onze, soit 44. La probabilité cherchée est $P(E)=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}\approx 0{,}367$.

Remarque : une analyse plus poussée montre que la probabilité de l'événement E lorsqu'il y a n chapeaux est $P(E_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\,!}$.