TD n°4 de probabilité : Algorithmes et probabilités

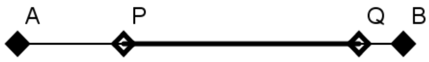
1. Le jeu du chapeau

Les 40 élèves d'une fameuse classe de seconde ont décidé de jouer au jeu du chapeau : on fabrique 39 étiquettes « perdu » et une étiquette « gagné », les étiquettes étant indiscernables, et on les met dans un chapeau. Chacun met 1 € sur la table pour constituer une cagnotte et ensuite, à tour de rôle, selon un ordre fixé d'avance et en payant 2 € pour jouer, chaque élève retire une des étiquettes du chapeau (et l'y remet après avoir lu), jusqu'à ce que l'un d'eux tire l'étiquette « gagné ». Il y a donc 40 € sur la table avant que le 1er joue et 42 € après que celui-ci ait perdu (s'il perd). On suppose qu'aucun élève ne passe son tour.

a) Quelle est la probabilité $P(E=i)$ que l'élève qui passe en $i^{ème}$, retire l'étiquette « gagné » et gagne ainsi la somme posée sur la table ? On donnera $P(E=1)$, $P(E=2)$, $P(E=3)$, et la formule générale $P(E=i)$.
Quelle somme gagne t-on en moyenne à la place i (somme gagnée = cagnotte – mise) ?
À quelle place a t-on le plus de chances de gagner à ce jeu (s'il y en a une) ?
Quelle est la probabilité qu'aucun élève de la classe ne gagne la cagnotte ?

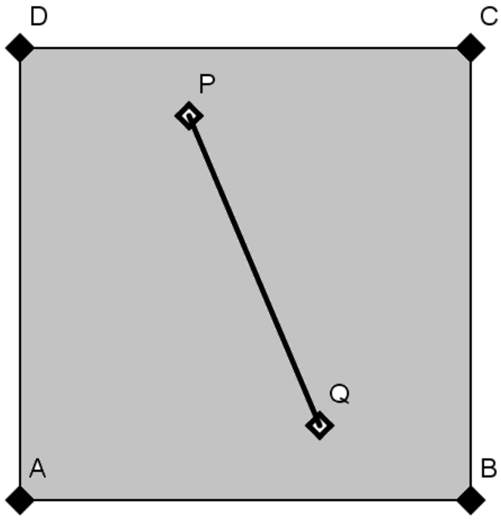
b) Un des élèves propose alors que si personne n'a gagné la cagnotte à la fin du 1er tour, on continue un 2ème tour et ainsi de suite, jusqu'à ce que quelqu'un gagne. Écrire un algorithme qui simule cette version du jeu et calcule la somme moyenne gagnée à ce jeu (pour cela on simulera au moins 1 000 fois ce jeu pour estimer la valeur théorique par une valeur expérimentale assez précise).
Programmer cet algorithme sur votre calculatrice et donner le gain moyen pour 1 000 jeux.

2. Segment au hasard



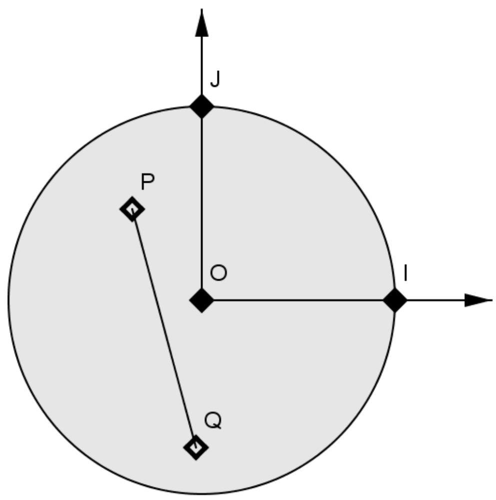
a) On tire au hasard deux nombres x et y de l'intervalle $[0 ; 1[$. On considère qu'il s'agit des abscisses de deux points $P(x)$ et $Q(y)$ sur un segment $[AB]$ de milieu I avec $AB=1$.
On se demande quelle est la longueur moyenne du segment $[PQ]$.
Pour répondre à cette question, réaliser un algorithme qui simule les tirages de x et y un nombre n de fois.

n	10	100	1000	10000
Longueur moyenne				



b) On tire au hasard deux fois deux nombres de $[0 ; 1[$ et on considère que ce sont les coordonnées de deux points P et Q du carré $ABCD$ avec $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(1 ; 1)$ et $D(0 ; 1)$.
Quelle est la longueur moyenne du segment $[PQ]$?
Répondre à cette question en programmant un algorithme qui simule les tirages de x et y un nombre n de fois.

n	10	100	1000	10000
Longueur moyenne				



c) On tire au hasard les coordonnées de deux points P et Q du disque de rayon 1 centré sur l'origine.
Pour réaliser ces tirages, on tire deux nombres, x et y, dans $[-1 ; 1[$ jusqu'à ce que la distance entre le point de coordonnées $(x ; y)$ et l'origine soit inférieure ou égale à 1. Cette distance est égale, on le rappelle à $\sqrt{x^2+y^2}$.
Déterminer la moyenne pour n tirages aléatoires.

n	10	100	1000	10000
Longueur moyenne				