TD n°3 de probabilités : Arbres des probabilités

1. Test biologique

On dispose d'un test pour détecter une maladie présente dans la population avec une fréquence q. Avec ce test, la probabilité d'obtenir un résultat positif sur une personne malade est p_1 tandis que la probabilité d'obtenir un résultat négatif sur une personne saine est p_2.
a) Dresser l'arbre des probabilités de la situation.
Déterminer les probabilités des quatre issues de cet arbre.

b) En déduire la probabilité $P(\text{pos})$ d'avoir un résultat positif
et la probabilité $P(\text{neg})$ d'avoir un résultat négatif

c) On veut déterminer la probabilité p_3 qu'une personne ayant obtenu un résultat positif soit saine (« faux positif ») et la probabilité p_4 qu'une personne ayant obtenu un résultat négatif soit malade (« faux négatif »).
Pour cela, on peut supposer une population de 1000 personnes et déterminer la fréquence des personnes de chaque catégorie (malade-positif, malade- négatif, saine-positif, saine-négatif). Montrer finalement que :

$$p_3 = \frac{(1-q)(1-p_2)}{(1-q)(1-p_2)+q\,p_1}$$

Établir une formule similaire pour p_4.

d) Discuter l'efficacité du test après avoir calculé p_3 et p_4 dans les quatre cas suivants :

	$q=0{,}1 - p_1=0{,}9 - p_2=0{,}9$	$q=0{,}1 - p_1=0{,}999 - p_2=0{,}9$	$q=0{,}1 - p_1=0{,}9 - p_2=0{,}999$	$q=0{,}01 - p_1=0{,}9 - p_2=0{,}999$
p_3				
p_4				

2. Roulette Russe

Imaginons qu'on dispose d'un revolver dont le barillet peut contenir six balles. On a mis une seule balle dans le barillet, puis on a fait tourner celui-ci pour ne pas savoir où est la balle. Chacune des six personnes assises autour de la table doit approcher le canon de sa tempe et tirer. Si la balle ne l'a pas tuée, la personne qui vient de tirer doit passer le revolver à son voisin.
On demande d'examiner la probabilité p_1 que ce soit la 1$^{\text{ère}}$ personne qui meure, p_2 que ce soit la 2$^{\text{de}}$, etc. dans les scénarios suivants. La question étant de déterminer quelle est la place la plus dangereuse à ce jeu stupide.

a) S_1 : on ne modifie rien au revolver à chaque passage

b) S_2 : on tourne le barillet du revolver à chaque passage

c) S_3 : on ajoute une balle dans le barillet et on tourne celui-ci à chaque passage

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
S_1						
S_2						
S_3						

Conclusion : quelle place est la plus dangereuse avec S_1 ? ……….. avec S_2 ? ……….. avec S_3 ? ………..

Prolongement : Écrire un algorithme qui simule le scénario S_3 de manière à reproduire n fois l'expérience.
À chaque fois, on s'arrête et on note la place de la personne tuée. En prenant n suffisamment grand, on s'approche ainsi des probabilités cherchées.

NB : On peut utiliser six mémoires (A, B, C, D, E et F) et incrémenter le contenu de la mémoire concernée mais il y a mieux : une liste (appelé aussi tableau), une structure où des données sont rangées et se retrouvent grâce à leur rang (appelé aussi indice). Par exemple, si L est le nom d'une liste de six nombres, ces nombres sont $L[0]$, $L[1]$, …, $L[5]$. Si le joueur tué est p, on peut simplement incrémenter le nombre $L[p]$, l'algorithme en est simplifié.