DM n°8 : Probabilités

on peut réaliser à deux ce DM ou bien seul

On effectue une collection d'objets choisis au hasard parmi N objets et on s'intéresse au temps moyen d'attente pour obtenir la collection complète. Par exemple, on tire au hasard un chiffre (entre 0 et 9) et on s'arrête lorsqu'on a obtenu les 10 chiffres au moins une fois chacun.

I] Exemples

Déterminer le nombre de chiffres à examiner dans les décimales de ces trois nombres irrationnels :

π = 3,141592653589793238462643383279502884197 16939937510582097494459230781640628620899862803482534211...

φ = 1,618033988749894848204586834365638117720 30917980576286213544862270526046281890244970720720418939...

$\sqrt{2}$ =1,414213562373095048801688724209698078569 6718753769480731766797379907324784621070388503875343276...

Effectuer ces dénombrements en partant ① : du 1er chiffre après la virgule - ② : du 40ème chiffre après la virgule

>> Commenter/comparer ces résultats.

II] Simulations

a) Écrire un programme qui prend en argument N le nombre d'objets à collecter et qui réalise des tirages d'un nombre entier aléatoire entre 1 et N jusqu'à avoir obtenu tous les nombres (c'est-à-dire tous les objets). Le programme affiche alors le nombre de tirages T qu'il a fallu effectuer.

On veut réaliser ce programme en utilisant une liste. Les indications ci-dessous donne la syntaxe de quelques instructions en Python concernant les listes (pour la traduction dans un autre langage voir sur internet).

L=[] / *L*=10*[0]	*Initialise une liste vide nommée L / initialise une liste nommée L de 10 valeurs égales à 0*
if R in L / if R not in L	*Teste si la valeur contenue dans la variable R est/n'est pas dans la liste L*
L.append(R) / L[0]=*R*	*Place la valeur de R en dernière position dans la liste L / affecte la valeur de R en position 0 dans L*

>> Tester votre programme avec la valeur N=10 (la valeur obtenue est aléatoire mais elle doit être du même ordre de grandeur que les valeurs obtenues au I).

b) Écrire un nouveau programme qui relance M fois le programme précédent, de manière à constituer un échantillon de M collections pour lesquelles on détermine la valeur T. En effectuant la moyenne de ces M valeurs T obtenues, on obtient une valeur plus représentative de T. Le programme peut être une version améliorée du programme précédent, ou bien un programme indépendant qui appelle le programme précédent.

>> Donner la valeur moyenne obtenue pour T avec M = 100, lorsque N prend les valeurs 10, 20, 40 et 80.

III] L'approche probabiliste

a) Supposons qu'il y a N objets à obtenir et qu'on en a déjà obtenu N-1.

Quelle est la probabilité de tirer le dernier objet au coup suivant ?

Quelle est la probabilité de ne pas tirer le dernier objet au coup suivant ?

Quelle est la probabilité de tirer le dernier objet au $t^{ème}$ coup ?

Prendre N=10 et déterminer la moyenne théorique T du nombre t de coups à attendre pour obtenir le dernier objet en calculant la somme des produits $t \times P(t)$ pour t allant de 1 à 50 (faire cela avec un tableur ou un petit programme).

>>Vérifier que la valeur obtenue est très légèrement inférieure à N, la valeur théorique attendue dans cette situation.

b) On considère maintenant la situation où, sur N objets à obtenir, on en a obtenu I (avec $o \leq I \leq N$).

Quelle est la probabilité de tirer un nouvel objet au coup suivant ?

Quelle est la probabilité de ne pas tirer un nouvel objet au coup suivant ?

Quelle est la probabilité de tirer un nouvel objet en t coups ?

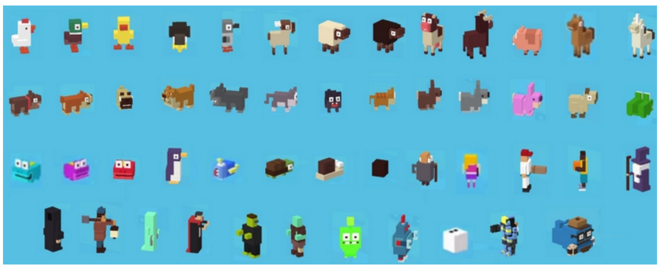
Prendre N=10 et déterminer, avec la méthode algorithmique précédente, la moyenne théorique T du nombre t de coups à attendre pour obtenir un nouvel objet quand on en a déjà obtenu I=6.

Vérifier que la valeur obtenue est très légèrement inférieure à $\frac{N}{N-I}$, la valeur théorique attendue dans cette situation.

c) Faire la somme des temps moyens que l'on obtient pour N=10 et les différentes valeurs possibles de I. Vérifier que cette approche probabiliste conduit à un résultat comparable à ceux qui ont été obtenu dans les exemples et la simulation.

IIII] Applications concrètes

a) Je lance un dé à six faces jusqu'à ce que les six numéros soient sortis. Combien faut-il en moyenne de lancers pour que les six numéros sortent ? Joseph veut parier avec moi qu'il est capable de sortir les six numéros en moins de dix coups. Il suggère qu'on mise chacun 10 €. Le jeu est à l'avantage de qui ?



b) Il y a 200 personnages à obtenir dans le jeu « *Crossy road* » et Margaret en a déjà obtenus 50. Combien de temps* a t-elle dû attendre pour en arriver là ? Combien de temps devra t-elle encore attendre pour les avoir tous ?

* *il ne s'agit pas exactement de temps. Puisque les personnages s'obtiennent lorsqu'on a gagné 100 points au jeu, il s'agit de points. Mais pour avoir ces points, il faut y passer du temps...*

c) Donner une autre application de cette situation.