TD n°2 de probabilité : l'hypothèse d'équiprobabilité

CORRECTION

1. Jeu de la voiture et des chèvres

Lors d'un jeu télévisé, le présentateur montre trois portes fermées au candidat et affirme que derrière l'une d'entre-elles se cache une voiture qui sera offerte si le candidat indique la bonne porte. Derrière chacune des autres porte se cache une chèvre.

1. Le candidat choisit tout d'abord une porte (pour l'instant on n'ouvre pas cette porte).
2. Le présentateur ouvre, parmi les deux portes restantes, une porte qui cache une chèvre.
3. Le candidat a le choix entre deux stratégies : *maintenir son premier choix* ou *le modifier.*

Y a t-il une stratégie meilleure que l'autre ?

Étudier les deux stratégies en cherchant où se situe l'équiprobabilité.

Si le candidat choisit de changer de porte, en appelant 1 la bonne porte, on a les possibilités suivantes. La 1^e porte est celle choisie au départ par le candidat, la $2^{ème}$ porte est celle ouverte par le présentateur (on l'indique en la soulignant), la $3^{ème}$ porte est celle choisie finalement par le candidat :

1-2-3-perdu (1 n'est pas ouvert, c'est 3 qui est ouverte après l'indice donné par le présentateur)
1-3-2-perdu
2-3-1-gagné
3-2-1-gagné

Mais comme, au départ, le candidat choisit les portes au hasard, il y a 1 chance sur 3 pour les trois possibilités (1, 2 ou 3). Les possibilités 1-2-3-perdu et 1-3-2-perdu correspondent donc à un seul et même événement initial (il choisit la porte 1) aussi probable que 2-3-1-gagné ou 3-2-1-gagné. Il y a donc 3 éventualités équiprobables dont 2 assurent la victoire au candidat. Cette stratégie est donc gagnante.

Si le candidat choisit, au contraire, de garder la même porte, on a les possibilités :

1-2-1-gagné
1-3-1-gagné
2-3-2-perdu
3-2-3-perdu

Comme avec la première stratégie, ici les possibilités 1-2-1-gagné et 1-3-1-gagné correspondent donc à une éventualité sur les trois équiprobables. Donc 1 seule assure au candidat la victoire. Cette stratégie est perdante.

Remarque : Vous pouvez voir un épisode du jeu Big Deal présenté par Monty Hall dans les années 70. Une voiture y est bel et bien gagnée, mais derrière les deux autres portes il n'y a pas de chèvre... juste quelques lots de consolation, si j'ai bien compris. Je ne sais toujours pas si un jour il y eut des chèvres à ce jeu...

2. Loto

Le **Loto** de la *Française des jeux* -qui est un jeu de loterie c'est à dire jeu de hasard et d'argent- a changé de formule le 6 octobre 2008. L'ancienne formule était en place depuis les début du jeu en 1976 et consistait à choisir 6 numéros parmi 49 soit une probabilté de trouver la bonne combinaison de 1 sur 13 983 816. Depuis octobre 2008 donc, une nouvelle grille est venue s'ajouter aux numéros de 1 à 49, celle du "numéro Chance" (numérotés de 1 à 10). Le nouveau Loto consiste donc à choisir 5 numéros de 1 à 49 et 1 numéro "Chance" parmi 10.

...

Et pour finir la dernière innovation de cette formule tient au 6ème rang de gain (numéro Chance trouvé) qui peut être cumulé avec les rangs 2, 3, 4 et 5 et dont le montant du gain est fixe: 2€ soit le prix d'une grille de jeu. En somme vous avez une chance sur dix de gagner au moins votre mise.

...

La règle du loto a été changée récemment. Avant le 06/10/08, on jouait six numéros sur 49 possibles. Vérifier qu'alors la probabilité $P(loto)$ de gagner le gros lot (trouver les six bons numéros) était de 1 sur 13 983 816 comme indiqué dans le texte.

Les grilles de l'ancien Loto se remplissent en cochant six numéros parmi 49, sans tenir compte de l'ordre. Pour le 1^{er} numéro on a 49 possibilités, puis on en a 48 pour le $2^{ème}$, 47 pour le $3^{ème}$, etc.

Il y a donc en tout $49\times48\times47\times46\times45\times44=10\,068\,347\,520$ grilles ordonnées (on a aussi bien comptée la grille 123456 que la grille 213456 ou 654321 qui contiennent les même numéros donc ne sont pas distinctes). Il faut diviser maintenant ce nombre de grilles ordonnées par le nombre d'ordres différents de six numéros : $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$.

Il y a 720 grilles contenant les mêmes 6 numéros écrits dans des ordres différents (on parle de permutations de 6 éléments).

Le nombre de grilles non-ordonnées est donc :

10 068 347 520÷720=13 983 816.
Comme on en choisit une seule, il n'y a qu'un cas favorable.
La probabilité de gagner le gros lot était donc de 1 sur 13 983 816 comme le dit le texte :

$$P(\mathit{loto}) = \frac{1}{13983816} \approx 7{,}15 \times 10^{-8}$$

Calculer la probabilité de l'événement E_n : « on obtient n fois le côté pile » lorsqu'on joue n fois de suite à pile ou face. Comparer $P(E_n)$ et $P(\mathit{loto})$

Si on tire à pile ou face n fois, l'événement E_n : « on obtient n fois le côté pile (P) » a une probabilité $P(E_n) = \frac{1}{2^n}$ (car à chaque tirage on peut avoir « pile (P) » avec la probabilité $\frac{1}{2}$).
Avec un tableur, on voit que pour n=23, ce jeu a une probabilité plus élevée que celle de gagner à l'ancien Loto ; à partir de n=24, on a une probabilité plus faible de gagner à ce jeu que de gagner à l'ancien Loto.
En gros, gagner au Loto revenait à obtenir la suite : PPPPPPPPPPPPPPPPPPPPPPP, ou bien, parce que c'est symétrique, FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192
$P(E_n)$	5,0E-01	2,5E-01	1,3E-01	6,3E-02	3,1E-02	1,6E-02	7,8E-03	3,9E-03	2,0E-03	9,8E-04	4,9E-04	2,4E-04	1,2E-04

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2^n	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216	33554432
$P(E_n)$	6,1E-05	3,1E-05	1,5E-05	7,6E-06	3,8E-06	1,9E-06	9,5E-07	4,8E-07	2,4E-07	1,2E-07	6,0E-08	3,0E-08

Déterminer $P(\mathit{loto\ new})$ la nouvelle probabilité de gagner le gros lot, c'est-à-dire les cinq bons numéros et le n° chance.

Calculons la probabilité de gagner le gros lot avec la nouvelle version du Loto : on choisit d'abord cinq numéros parmi 49, sans ordre : 49×48×47×46×45=228 826 080 grilles ordonnées à diviser par 5×4×3×2×1=120 ordres différents donc 228 826 080÷120=1 906 884 grilles de cinq numéros différents. On choisit ensuite un numéro chance (il y en a 10). Cela fait donc 19 068 840 grilles de 5+1 numéros différents. La probabilité de gagner le gros lot est voisine mais plus faible, elle vaut

$$P(\mathit{loto\ new}) = \frac{1}{19068840} \approx 5{,}24 \times 10^{-8}$$

Il faut obtenir 25 fois « Pile » consécutivement pour avoir une probabilité inférieure...

Déterminer aussi :
La probabilité de E : « ne trouver aucun des 6 numéros »
E : « ne trouver aucun des 6 numéros » est réalisé, actuellement, lorsqu'on choisit, parmi les 1 906 884 grilles de cinq numéros différents, des grilles non-ordonnées contenant cinq numéros choisis parmi les 44 mauvais numéros, donc il y a 44×43×42×41×40÷120=130 320 960÷120=1 086 008 grilles de cinq mauvais numéros, avec à chaque fois 9 mauvais numéros « chance », donc en tout 1 086 008×9=9 774 072 grilles « favorables » (ne contenant que des mauvais numéros).
Cela nous donne $P(E)=\frac{9774072}{19068840}\approx 0{,}5125677283$.

La probabilité de F : « n'obtenir qu'un seul bon numéro »
Il y a 44×43×42×41÷(4×3×2×1)=135 751 grilles de quatre mauvais numéros, avec à chaque fois cinq choix du bon numéro et 9 choix du mauvais numéro « chance », donc en tout 135 751×5×9=6 108 795 grilles contenant 1 bon numéro seulement.
Cela nous donne $P(F)=\frac{6108795}{19068840}\approx 0{,}3203548302$.

La probabilité de G : « avoir une grille gagnante » (avoir au moins le n° chance ou 2 bons numéros sur les 5 de la grille principale).
G n'est pas tout-à-fait $\overline{E}$ le contraire de E, il y a F qui est inclus dans $\overline{E}$, qu'il faut enlever à $\overline{E}$ (voir notre illustration). G et F sont incompatibles et leur réunion est $\overline{E}$, on a donc $P(G)=P(\overline{E})-P(F)=1-P(E)-P(F)=1-(P(E)+P(F))\approx 0{,}1670774415$.
Il y a un peu plus de 16,7% de chance d'avoir une grille gagnante avec cette nouvelle version du Loto.

Pour comparer, dans l'ancien Loto, on avait $P(F)=\frac{43\times 42\times 41\times 40\times 39\div 120\times 6}{13983816}=\frac{5775588}{13983816}\approx 0{,}4130194505$ et $P(E)=\frac{43\times 42\times 41\times 40\times 39\times 38\div 720}{13983816}=\frac{6096454}{13983816}\approx 0{,}4359649755$ et par conséquent, à l'ancien Loto, on avait $P(G)=1-(P(E)+P(F))\approx 0{,}151015574$, soit environ 15,1% d'avoir une grille gagnante. Les organisateurs du Loto on bien fait augmenter la chance d'avoir une grille gagnante (de 15,% à 16,7%) mais cependant, ils ont fait diminuer la chance de gagner le gros lot.

3. Les anniversaires

Lors d'une soirée, il y a n=30 personnes présentes. Vous y rencontrez Jean Transenne, un ami d'ami qui vous dit : « Je parie 20 € que deux personnes ici ont la même date d'anniversaire ». Comme vous êtes persuadé que Jean ne connaît personne à cette soirée, surtout pas les dates d'anniversaires, parier avec lui vous parait-il risqué ? En d'autres termes, quel serait votre espoir de gain à ce jeu si les 30 personnes avaient des dates d'anniversaires choisies au hasard ? Pour quelle valeur de n, ce pari est-il le plus équilibré ?

Si les 30 personnes ont des dates d'anniversaires choisies au hasard, il peut se trouver que ce soit n'importe quel jour pour chacune des personnes, il y a donc $365\times365\times..\times365=365^n$ choix possibles pour la liste des n dates d'anniversaire, listes ordonnées par l'ordre des n invités. Gardons-les ordonnées : si il n'y a que 3 personnes, la liste non-ordonnée (1-1-2) qui peut s'écrire dans 3 ordres différents (112, 121 et 211), n'est pas aussi probable que la liste non-ordonnée (1-2-3) qui peut s'écrire dans 6 ordres différents (123, 132, 213, 231, 312 et 321). On garde donc des listes ordonnées pour garder des probabilités équiprobables (exactement comme pour le cas de deux ou trois dés si on s'intéresse à leur somme).

Combien y a t-il de listes où « deux dates au moins sont identiques » ? Vous devez penser au contraire lorsque vous voyez écrit « au moins... ». Dans ce cas, le contraire de E : « deux dates au moins sont identiques » est $\overline{E}$: « toutes les dates sont différentes ». Pour avoir n dates différentes, il y a $365\times364\times363\times362\times...\times336$ possibilités ordonnées.

La probabilité de $\overline{E}$ est $P(\overline{E})=\frac{365\times364\times...}{365\times365\times...}=\frac{365}{365}\times\frac{365}{365}\times...\times\frac{336}{365}\approx0{,}29368$. Nous avons utilisé le tableur pour réaliser ce calcul (voir plus bas), ce qui nous donne $P(E)=1-P(\overline{E})\approx0{,}71$ soit une probabilité très forte de prés de 71% de ne pas se tromper en affirmant, comme Jean T., que « deux personnes ici ont la même date d'anniversaire ».

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
366-n	365	364	363	362	361	360	359	358	357	356	355	354
(366-n)/365	1	0,99726	0,99452	0,99178	0,98904	0,98630	0,98356	0,98082	0,97808	0,97534	0,97260	0,96986
P(En)	1	0,99726	0,99180	0,98364	0,97286	0,95954	0,94376	0,92566	0,90538	0,88305	0,85886	0,83298
1-P(En)	0	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,09	0,12	0,14	0,17

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
366-n	353	352	351	350	349	348	347	346	345	344	343	342	341
(366-n)/365	0,96712	0,96438	0,96164	0,95890	0,95616	0,95342	0,95068	0,94795	0,94521	0,94247	0,93973	0,93699	0,93425
P(En)	0,80559	0,77690	0,74710	0,71640	0,68499	0,65309	0,62088	0,58856	0,55631	0,52430	0,49270	0,46166	0,43130
1-P(En)	0,19	0,22	0,25	0,28	0,32	0,35	0,38	0,41	0,44	0,48	0,51	0,54	0,57

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
341	340	339	338	337	336	335	334	333	332	331	332	333	334	335	336
0,93425	0,93151	0,92877	0,92603	0,92329	0,92055	0,91781	0,91507	0,91233	0,90959	0,90685	0,90959	0,91233	0,91507	0,91781	0,92055
0,43130	0,40176	0,37314	0,34554	0,31903	0,29368	0,26955	0,24665	0,22503	0,20468	0,18562	0,16883	0,15403	0,14095	0,12937	0,11909
0,57	0,6	0,63	0,65	0,68	0,71	0,73	0,75	0,77	0,8	0,81	0,83	0,8460	0,8590	0,8706	0,8809

On s'aperçoit, avec le tableau ci-dessus, qu'à partir de n=23, la probabilité de ne pas se tromper en prenant le pari de Jean T. est supérieure à 1 chance sur 2.

La classe de 2de4 de cette année ne fait pas exception à cette loi des anniversaires. L'événement n'est pas certain (il le serait avec 366 personnes), mais avec 40 personnes la probabilité de ne pas se tromper est supérieure à 4 chances sur 5 (0,8809). Si mon fichier est exact, il y a bien quatre fois deux personnes qui sont nées le même jour : 02/02 (Lisa et Paul), 03/06 (Albertine et Tom), 20/07 (Elouan et Nina) et 09/12 (Louisa-Rose et Geoffroy). L'événement E est bien réalisé dans cette classe.

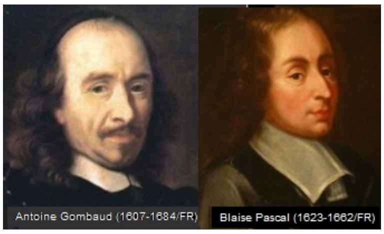
4. Le problème du chevalier de Méré

Nous sommes en 1654, le chevalier s'adresse à Pascal approximativement en ces termes « lorsque l'on tire quatre fois un dé à 6 faces, obtenir au moins un 6 est un événement favorable, par contre il semblerait que lorsque l'on tire vingt-quatre fois deux dés à 6 faces, obtenir au moins un double 6 est un événement défavorable. Cette observation vous semble t-elle correcte ? » Que répondriez-vous à la place de Pascal pour justifier les deux observations du chevalier ?

Les deux observations du chevalier sont correctes. Pour la première, calculons la probabilité qu'en tirant quatre fois un dé, on n'obtienne aucun six. Cette probabilité est égale à $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5^4}{6^4}=\frac{625}{1296}\approx0{,}48225$. Donc la probabilité d'obtenir au moins un 6 vaut $1-\frac{625}{1296}\approx0{,}5177$. Cet événement est bien favorable à celui qui parie dessus.

Lorsqu'on tire vingt-quatre fois deux dés, on n'obtiendra aucun double six avec la probabilité $(\frac{35}{36})^{24}\approx0{,}508586$ et donc la probabilité d'obtenir au moins un double 6 vaut $1-0{,}508586\approx0{,}4914$.

Cet événement est bien défavorable à celui qui parie dessus.



Ce qui paraît étonnant au chevalier de Méré est que l'événement « obtenir un double 6 en vingt-quatre tirages » semble être 6 fois la répétition de l'événement « obtenir un 6 en quatre tirages » car 24=6×4. Ou plutôt, « obtenir un 6 en quatre tirages » semble avoir une probabilité de $\frac{4}{6}$ alors que « obtenir un double 6 en vingt-quatre tirages » semble avoir une probabilité de $\frac{24}{36}=\frac{4}{6}$ ce qui est la même valeur dans les deux cas. L'expérience du jeu avait donné au chevalier l'impression qu'un des événements était plus probable que l'autre ce qui contredisait le raisonnement, plus intuitif que rigoureux, qu'il faisait. Dans une lettre à Fermat (29/07/1654), Pascal dit du chevalier (Antoine Gombaud de son vrai nom) : « il a très bon esprit, mais n'est pas géomètre ». Pascal résolu cette question en donnant les valeurs des probabilités. Dans ses échanges avec Fermat ils posèrent les bases du calcul des probabilités. À titre d'information, Pascal est enterré dans l'église Saint-Étienne-du-Mont, en face du Lycée.

♣ ♦ ♥ ♠ ♣ ♦ ♥ ♠ ♣ ♦ ♥ ♠ ♣ ♦ ♥ ♠ *fin de la correction* ♣ ♦ ♥ ♠ ♣ ♦ ♥ ♠ ♣ ♦ ♥ ♠ ♣ ♦ ♥ ♠

Voici, à propos de cette question, une petite prolongation trouvée sur internet qui examine trois solutions algorithmiques pour simuler l'expérience 1 du chevalier : tirer 4 dés et afficher « gagné » si on obtient au moins un 6.

Pour simuler l'expérience, Thibault a écrit les trois algorithmes suivants et les a programmés.

ALGORITHME 1

```
K=0
Pour i allant de 1 à 4
  A est un entier aléatoire  entre 1 et 6
  Si A=6
    K prend la valeur K+1
Si K=0
  Afficher "Perdu !"
Sinon
  Afficher "Gagné!"
```

ALGORITHME 2

```
i=0
Tant que i est inférieur à 4
      A est un entier aléatoire  entre 1 et 6
    Si A=6
       i prend la valeur i+4
       Afficher "Gagné !"
   Sinon
       i prend la valeur i+1
   Si i>=4
      Afficher "Perdu !"
```

ALGORITHME 3

```
A=0
i=0
Tant que A est différent de 6
   A est un entier aléatoire  entre 1 et 6
   i prend la valeur i+1
Si i est inférieur ou égal à 4
   Afficher "Gagné !"
Sinon
   Afficher "Perdu !"
```

a) Expliquer le principe de chacun de ces algorithmes et le rôle de leurs variables.
b) Thibault a ajouté des compteurs pour déterminer le nombre de fois que la boucle de chaque algorithme s'exécute. En expérimentant chacun d'eux, il obtient comme nombre de boucles 3,4 et 6. A quel algorithme correspond chacun de ces résultats ?
c) Lequel des trois algorithmes semble être le plus économe ?

J'aimerai suggérer qu'en plus de ces questions :

1) vous écriviez un algorithme qui simule N fois ce tirage (par exemple N=100 fois ou N=40000 fois) et qui comptabilise le nombre de fois ou on a « gagné ».
2) vous refassiez le travail pour l'expérience 2 : un algorithme pour simuler le tirage de 24 fois deux dés et qui affiche « gagné » si on obtient au moins un double 6. Puis un algorithme qui simule N fois ce tirage et qui comptabilise le nombre de fois ou on a « gagné ».

Pour répondre brièvement aux questions posées (cherchez-en d'abord la réponse)

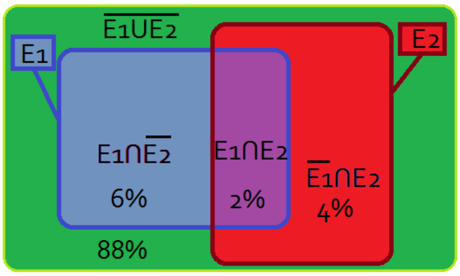
- L'algorithme 1 effectue une boucle « pour ». Il faut tirer 4 fois le dé, donc pour i allant de 1 à 4. On est certain de ne passer que 4 fois dans la boucle.
- L'algorithme 2 effectue une boucle « tant que ». On doit tirer 4 fois le dé si on n'obtient jamais de 6, mais si on obtient un 6 on peut s'arrêter avant. La solution envisagée augmente de 1 le compteur i, sauf quand on obtient 6 où on augmente de 4 le compteur i (on aurait aussi pu faire i=4). On exécute donc la boucle *au plus* 4 fois.
- L'algorithme 3 effectue une boucle « tant que » mais teste le résultat du dé (au départ on initialise ce résultat à 0 pour entrer dans la boucle). Le compteur i est toujours incrémenté de 1, quel que soit le résultat du dé. On exécute la boucle jusqu'à ce que le résultat soit 6, donc on peut dépasser 4 tirages (donc 4 passages dans la boucle), mais aussi on peut avoir moins de 4 tirages (si on obtient 6 au 2$^{\text{ème}}$ coup, on sort de la boucle).

Si on est passé 6 fois dans la boucle, ce ne peut être qu'avec l'algorithme 3. Si on est passé 3 fois dans la boucle, ce peut être avec l'algorithme 2 mais aussi avec l'algorithme 3. Comme on a utilisé chaque algorithme 1 fois, c'est l'algorithme 2 qui a donné 3 passages. Il ne reste que l'algorithme 1, donc le 4 est obtenu avec cet algorithme. Notez qu'on peut obtenir 4 passages dans la boucle avec les trois algorithmes.
L'algorithme 2 qui s'arrête au pire au 4$^{\text{ème}}$ tirage est le plus efficace. On va le choisir pour réaliser un grand nombre de tirages. Cela va optimiser les temps d'exécution.

Compléments (extraits d'une ancienne évaluation)

a) Une usine fabrique des articles en grande quantité dont certains sont défectueux. La cause des défauts peut être D_1 : une erreur d'assemblage ou D_2 : un problème de dimension. Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles fabriqués sont défectueux. 8% des articles fabriqués ont un défaut D_1 tandis que 6% des articles ont un défaut D_2. On prélève au hasard un article et on note E_1 : « l'article présente un défaut D_1 » et E_2 : « l'article présente un défaut D_2 ». Définir par une phrase les événements $E_1 \cup E_2$, $\overline{E_1 \cup E_2}$, $E_1 \cap E_2$ et $(\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})$.
Déterminer grâce aux données, les probabilités de ces divers événements.

$E_1 \cup E_2$: « l'article présente au moins un des deux défauts D_1 **ou** D_2 (éventuellement les deux) ».
$\overline{E_1 \cup E_2}$: « l'article présente ne présente aucun des deux défauts ».
$E_1 \cap E_2$: « l'article présente les des deux défauts D_1 **et** D_2 ».
$(\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})$: « l'article présente un seul des deux défauts D_1 **ou** D_2 (jamais les deux) ».



$P(E_1 \cup E_2) = 12\% = 0{,}12$,
$P(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - 12\% = 88\% = 0{,}88$,
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$ donc
$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2) = 8\% + 6\% - 12\% = 2\%$ et
$P((\overline{E_1} \cap E_2) \cup (E_1 \cap \overline{E_2})) = P(E_1 \cup E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 12\% - 2\% = 10\%$.

b) On lance deux dés tétraédriques (4 faces triangulaires isométriques) dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On s'interroge sur les valeurs que peut prendre la somme S des dés et les différentes probabilités attachées à chacune de ces valeurs. Répondre à l'aide d'un tableau, en justifiant les réponses.

Dé1	Dé2	Somme
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
2	1	3
2	2	4
2	3	5
2	4	6
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
4	1	5
4	2	6
4	3	7
4	4	8

Si on regarde les résultats possibles pour la somme, il y en a sept différents : 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8. Mais chacun correspondant à un nombre d'éventualités différent (voir tableau de gauche), les probabilités sont différentes. Il y a $4^2=16$ éventualités équiprobables. On les trouve en distinguant les deux dés, chacun pouvant donner 1, 2, 3 ou 4 comme résultat du tirage. Il n'y a qu'une façon d'obtenir 2 ou 8 donc $P(S=2) = P(S=8) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$, il y a deux façons d'obtenir 3 (1-2 ou 2-1) ou 7 (3-4 ou 4-3) donc $P(S=3) = P(S=7) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Somme	Proba
2	1
3	2
4	3
5	4
6	3
7	2
8	1
Total	16

De la même façon, il y a trois façons d'obtenir 4 (1-3, 2-2 ou 3-1) ou 6 (2-4, 3-3 ou 4-2) donc $P(S=4) = P(S=6) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$ et il y a quatre façons d'obtenir 5 (1-4, 4-1, 2-3 ou 3-2) donc $P(S=5) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
On peut vérifier que la somme de ces probabilités fait bien 1.

c) On dispose d'un jeu de 52 cartes dans lequel on prélève une carte au hasard.
On note A : « la carte est un as » et P : « la carte est un pique ».
Quelle est la probabilité de l'événement $A \cup P$?

$A \cup P$: « la carte est un as ou un pique ».
D'après le résultat du cours $P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P)$.
Il y a 4 as sur 52 cartes donc $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ (il faut choisir le niveau de la carte parmi les 13 niveaux possibles). Il y a 13 piques sur 52 cartes donc $P(P) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ (il faut choisir la couleur « pique » parmi les 4 possibles). Il y a un seul as de pique dans le jeu donc $P(A \cap P) = \frac{1}{52}$ (il faut choisir la couleur « pique » parmi les 4 possibles). Finalement, $P(A \cup P) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Bonus (+1 point) : quelle est la probabilité de tirer une main de quatre cartes contenant exactement une paire d'as (et rien d'autre de remarquable) ?

Il y a $52 \times 51 \times 50 \times 49 = 6497400$ mains ordonnées possibles de 4 cartes. Chaque main peut être ordonnée de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ façons différentes. Il y a donc $\frac{6497400}{24} = 270725$ mains non-ordonnées de 4 cartes.

Combien possèdent une paire d'as (le « et rien d'autre de remarquable » n'est pas très clair... surtout si on n'a pas connaissance sur le jeu de Poker. Il aurait mieux valu dire cela autrement, par exemple, ni 3 as, ni 4 et pas d'autre paire).

option 1 : Comptons le nombre de façon de réaliser **une paire d'as et pas 3 as ni 4** :

- On choisit les 2 as : il y a $4\times3\div2=6$ couples non-ordonnés possibles ;
- On choisit les 2 autres cartes qui ne sont pas des as : il y a $48\times47\div2=1128$ couples possibles.

Il y a donc au final $6\times1128=6768$ mains contenant une paire d'as (et pas 3 ni 4 as), la probabilité de ce genre de main est $\frac{6768}{270725}\approx0{,}0249995$, soit environ 2,5%.

option 2 : Comptons le nombre de façon de réaliser **une paire d'as et pas 3 as, ni 4 et pas d'autre paire** :

- On choisit les 2 as : il y a $4\times3\div2=6$ couples non-ordonnés possibles ;
- On choisit les 2 autres cartes qui ne sont ni des as, ni une autre paire : il y a $48\times47\div2=1128$ couples possibles ne contenant pas d'as parmi lesquels $12\times6=72$ sont des paires (il suffit de choisir le niveau de la paire, il y en a 12, et les 2 couleurs formant cette paire parmi les 4 couleurs possibles, on a vu qu'il y avait 6 façons de choisir ces 2 couleurs). Il y a donc $1128-72=1056$ façons d'obtenir 2 cartes qui ne sont ni des as, ni une autre paire.

Il y a donc au final $6\times1056=6336$ mains contenant une paire d'as (et rien d'autre de remarquable), la probabilité de ce genre de main est $\frac{6336}{270725}\approx0{,}0234$, soit environ 2,3%.

Questions supplémentaires :
Quelle est la probabilité d'obtenir une suite (4 cartes qui se suivent, pas nécessairement de la même couleur, la plus forte carte n'étant pas forcément un as) ?
Ici, on doit choisir la hauteur de la suite parmi les dix suivantes :
2-3-4-5, 3-4-5-6, 4-5-6-7, 5-6-7-8, 6-7-8-9, 7-8-9-10, 8-9-10-V, 9-10-V-D, 10-V-D-R et V-D-R-As
Pour chaque hauteur de suite choisie, on a le choix entre 4 couleurs pour chacune des cartes. Il y a donc 4^4=256 possibilités de suite d'une hauteur donnée, donc 10×256=2560 suites distinctes. On peut remarquer que les suites composées d'une même couleur sont désignées au Poker par le terme quinte *flush* mais comme son nom l'indique il faut 5 cartes pour faire une quinte... Ici on ne distingue pas de « quartes flush », il n'y a donc pas lieu d'exclure les suites d'une même couleur.
La probabilité d'obtenir une suite est donc égale à $\frac{2560}{270725}\approx0{,}009456$, soit un peu moins de 1%.
Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur (4 cartes de la même couleur) ?
Il faut choisir la couleur : il y en a quatre. Il faut ensuite choisir les 4 cartes parmi les 7 : dans un certain ordre, il y en a 13×12×11×10=17160, mais on a compté 4×3×2×1=24 fois chaque quadruplet. Il y a donc 17160÷24=715 quadruplet non ordonné de 4 cartes d'une couleur donnée, soit 715×4=2860 mains d'une couleur donnée.
La probabilité d'obtenir une couleur est donc égale à $\frac{2860}{270725}\approx0{,}01056$, soit un peu plus de 1% et donc un peu plus que la probabilité d'obtenir une suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir une couleur (4 cartes de la même couleur) ?
Parmi les 2860 mains d'une couleur donnée, combien sont composées de cartes qui se suivent ? Ou bien, parmi les 2560 suites, combien sont composées de cartes d'une même couleur ? Reprenons le raisonnement au début : il y a dix hauteurs de suite. Il n'y a donc que 10 suites d'une couleur donnée. Comme il y a 4 couleurs, cela fait 40 suite d'une même couleur. La probabilité d'obtenir une suite de la même couleur est donc égale à $\frac{40}{270725}\approx0{,}000147756$, soit 0,015% ou encore 1 chance sur 6768.
Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan d'as (3 as et pas 4) ?
On choisit l'as qui manque : il y en a 4 possibles. On choisit la carte parmi les 48 restantes. Cela fait 4×48=192 mains contenant des brelans d'as. La probabilité d'obtenir un brelan d'as est donc égale à $\frac{192}{270725}\approx0{,}0007092$, soit 0,071% ou encore 1 chance sur 1410.
Quelle est la probabilité d'obtenir le carré d'as (les 4 as) ?
Il n'y en a qu'une main possible, sa probabilité est donc de $\frac{1}{270725}\approx0{,}000003694$, soit 0,00037%.

d) Le roi est issu d'une famille de deux enfants. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ? Argumentez votre réponse en justifiant l'équiprobabilité des différent cas possibles. (NB : il ne faut pas en douter, le roi est un garçon).
Il y a quatre sortes de familles de deux enfants : FG, GF, FF, GG. Comme il y a déjà un garçon dans cette famille, il faut exclure les familles FF. Il reste donc trois cas possibles équiprobables FG, GF et GG. Il y en a deux qui contiennent une fille donc la probabilité que l'autre enfant soit une fille est 2 sur 3.