TD n°1 de probabilités : de la fréquence expérimentale aux probabilités

1. Paradoxe du duc de Toscane

Nous sommes au début de l'invention des probabilités : en 1620, à la cour de Florence, le duc de Toscane parie sur la somme de trois dés. Grand joueur, il a remarqué que la somme 10 tombe un peu plus souvent que la somme 9, alors qu'on peut obtenir ces deux sommes du même nombre de façons différentes :

9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3 (six façons)

10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3 (six façons)

Il questionne Galilée (1554-1642) qui développe la question, jetant les bases de la théorie des probabilités.

a) L'approche statistique

Écrire un algorithme qui simule le tirage de trois dés à six faces, en calcule la somme S pour un nombre *n* de tirages et comptabilise les fois où S=9 et ceux où S=10.

>>Déterminer la fréquence expérimentale f_9 de l'événement « S=9 » et la fréquence f_{10} de l'événement « S=10 » pour un échantillon de *n*=1000 tirages.

Comparer alors f_9 et f_{10}.

L'*intervalle de confiance* dans lequel on peut s'attendre à trouver la probabilité *p* au seuil de 5% est $[f_e-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f_e+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ où f_e est la fréquence dans l'échantillon. Cet intervalle ayant une amplitude de $\frac{2}{\sqrt{n}}$, si on veut que f_e approche *p* à moins de 10^{-q}, il faut réaliser un nombre *n* d'expériences tel que $\frac{1}{\sqrt{n}}<10^{-q}$.

>>Déterminer le nombre *n* de tirages à effectuer pour que la fréquence expérimentale f_e soit une approximation de *p* au dixième près, puis au centième près.

Que pensez-vous alors de l'observation du duc ?

Pour *p* au dixième près : $n \geq$ ......

Pour *p* au centième près : $n \geq$ ......

b) L'approche probabiliste :

L'arbre ci-dessous est difficile à tracer en entier mais il permet de faire la liste des chemins (branches) menant à la réalisation de ces événements

>>Après avoir effectué ces dénombrements, déterminer les probabilités des événements « S=9 » et « S=10 ».

Que pensez-vous qu'a répondu Galilée au duc ?

Nombre de branches au total : …......

dont, branches menant à « S=9 » : ….......

branches menant à « S=10 » : ….......

d'où : P(S=9)= …....... et P(S=10)= …......

2. Jeu équilibré ou jeu favorable/défavorable

Imaginons qu'à ce jeu, un joueur mise une somme *m* sur « S=10 » dans l'espoir de toucher *k*=6 fois la mise si les dés font 10. S'il perd, il perd sa mise. Par exemple, il mise *m*=5 € sur le 10 : si les dés font 10 il gagne 30 € (6×5=30) et il récupère sa mise, dans tous les autres cas il perd sa mise de 5 € (il gagne −5 €).

a) Calculer ce que le joueur va gagner en moyenne, à chaque tirage des trois dés. Ce jeu est-il favorable ou défavorable au joueur ?

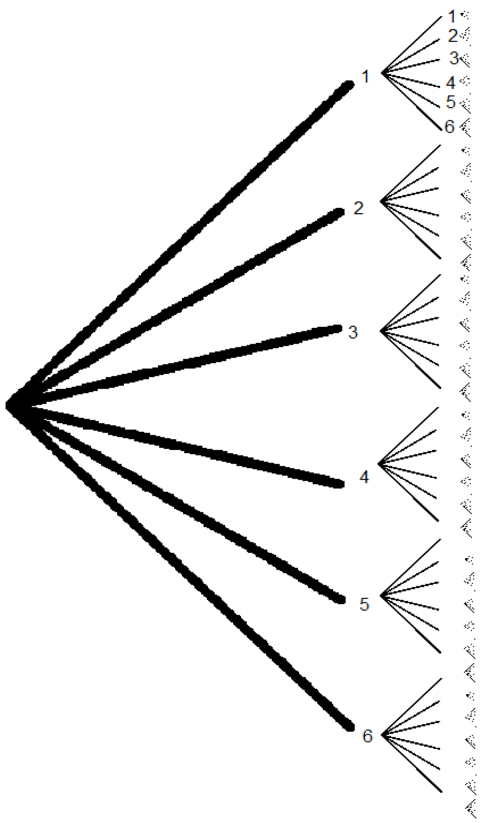
Espérance de gain dans l'hypothèse *k*=6:

Ce jeu est ❑ favorable ❑ défavorable au joueur

b) Pour qu'un jeu soit équilibré, il ne doit être ni favorable ni défavorable. Calculer le facteur multiplicatif *k* pour que le jeu soit équilibré.

Condition d'équilibre :

$k_{équilibre}$ =



c) Mêmes questions lorsqu'on mise une somme *m* sur « S=9 ».

Espérance de gain dans l'hypothèse *k*=6 :

Facteur multiplicatif $k_{équilibre}$ pour que le jeu soit équilibré) :