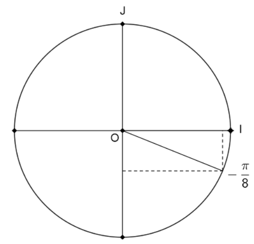
2de DS7 : Trigonométrie 30 mars 2018

CORRECTION

I] Angles réels



a) Quelle est la mesure principale de l'angle $\alpha=\frac{2018\pi}{3}$ *rad* ?

$\frac{2018\pi}{3}=\frac{2016\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=672\pi+\frac{2\pi}{3}=336\times2\pi+\frac{2\pi}{3}$ (336 tours plus deux tiers de tour).

La mesure principale de α est donc $\frac{2\pi}{3}$ *rad*.

Convertir en radians l'angle $\beta=2018°$.

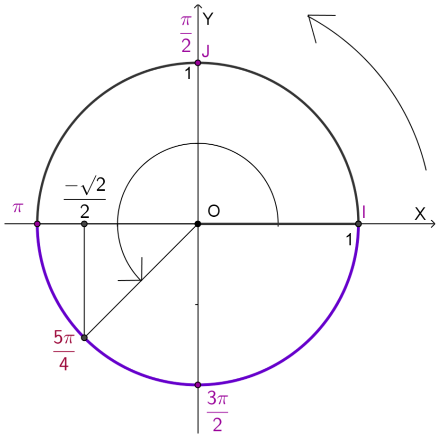
$\beta=2018°=2018\times\frac{\pi}{180}=\frac{2018\pi}{180}=\frac{1009\pi}{90}\approx11{,}211\pi$ *rad*, soit environ 35,22 *rad*.

Donner la mesure de l'angle $\gamma\in[2017\pi;2018\pi]$ de mesure principale $\frac{-\pi}{8}$ *rad*.

$\frac{-\pi}{8}+2018\pi=\frac{-\pi+2018\times8\pi}{7}=\frac{16143\pi}{8}=2017{,}875\pi$ *rad*, soit environ 6339,34 *rad*.

b) Tracer un cercle trigonométrique et y placer un point *M* tel que l'angle $\delta=\widehat{IOM}$ vérifie : $\delta\in[\pi;2\pi]$ et $\cos(\delta)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Donner la valeur exacte de l'angle δ.



C'est évident, sachant que $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$.

On a $\delta=\frac{5\pi}{4}$ *rad* qui est bien un angle de $[\pi;2\pi]$.

c) À l'aide de la calculatrice et du cercle trigonométrique, déterminer $\cos\lambda$ et l'angle λ (arrondir la valeur de λ au millième de *rad*) tel que $\lambda\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin\lambda=\frac{-1}{3}$.

La calculatrice donne $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\approx-0{,}339836909$ *rad*, mais cette valeur correspond à un angle de $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{+\pi}{2}\right]$.

Il faut, pour trouver *λ*, prendre l'autre angle $\pi-\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\approx3{,}481429563$ ayant même sinus pour se retrouver dans $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. On a donc $\lambda=\pi+\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx3{,}481$ *rad*. (je donne ici la valeur exacte simplifiée donnée par la Numworks qui est, je l'avoue, un peu déroutante...)

Pour $\cos\lambda$, on peut utiliser la relation $\sin^2\delta+\cos^2\delta=1$.

On trouve ainsi la valeur exacte $\cos^2\delta=1-\sin^2\delta=1-\left(\frac{-1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

Comme l'angle est dans $[\pi;2\pi]$, le cosinus doit être négatif. Donc $\cos\lambda=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

La Numworks donne ici, seulement la valeur approchée $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right)\approx-0{,}942809042$.

II] Propriétés

a) Simplifier les expressions *A* et *B* suivantes :

$$A=3\cos(x-\pi)-2\cos(-x)+\cos(\pi+x)-5\cos(2018\pi+x)\ ;\ B=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$A=3\cos(-(\pi-x))-2\cos x-\cos x-5\cos x=3\cos(\pi-x)-8\cos x=-3\cos x-8\cos x=-11\cos x$.

$B=\cos x+\cos x+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=2\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2\cos x-\cos x=\cos x$.

b) Sachant que $\cos(\mu)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos(\mu-\pi)$, $\sin(\mu)$ et $\cos\left(\frac{\pi+2\mu}{2}\right)$.

$\cos(\mu-\pi)=\cos(\pi-\mu)=-\cos\mu=\frac{-\sqrt{3}}{3}$.

$\cos^2(\mu)+\sin^2(\mu)=1$, d'où $\sin^2(\mu)=1-\cos^2(\mu)=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

La valeur cherchée de $\sin(\mu)$ est positive ou négative, on ne sait pas, car on ne sait rien sur μ à part son *cosinus*. On a donc $\sin(\mu)=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\approx\pm0{,}816496581$.

$\cos\left(\frac{\pi+2\mu}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\mu\right)=-\sin(\mu)=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ avec cette précision que si $\sin(\mu)=\frac{\sqrt{6}}{3}$ alors $\cos\left(\frac{\pi+2\mu}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (ils sont de signes contraires) et réciproquement.

c) Sans calculatrice, montrer l'égalité suivante : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)=2$.

$\frac{3\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}=\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$ d'où

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\tfrac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\tfrac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\tfrac{7\pi}{8}\right)&=\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\tfrac{\pi}{8}\right)\\&=\left(\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right)\right)+\left(\cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right)\right)=1+1=2.\end{aligned}$$

d) Montrer comment, à l'aide de la propriété de duplication du cosinus ($\cos2x=2(\cos x)^2-1$), on peut déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

La propriété permet de calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, sachant $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remplaçons x par $\frac{\pi}{12}$ (et donc $2x$ par $2\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$) dans $\cos 2x=2(\cos x)^2-1$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^2=-1 \text{ , c'est-à-dire } \left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{3}+2}{4}.$$

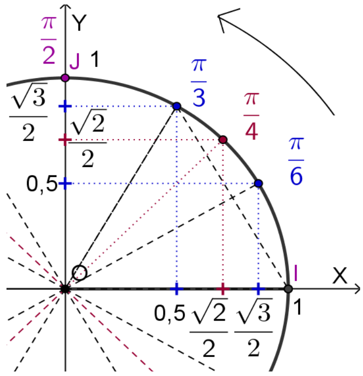
La valeur cherchée de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est positive car $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$.

On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\approx 0{,}965925826$.

Vérifions avec la calculatrice : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\approx 0{,}965925826$.

Pourquoi les valeurs exactes ne sont pas égales ? Elles le sont, vérifions cela en élevant les deux expressions au carré : $\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right)^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6}{16}=\frac{8+2\sqrt{12}}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

III] Équations



a) Compléter le cercle trigonométrique ci-contre avec les angles de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et les valeurs remarquables de *cos* et *sin* correspondantes.

Résoudre alors l'équation E_1 : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ pour $x\in[-2\pi;2\pi]$.

E_1 : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, donc on doit avoir :

$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$.

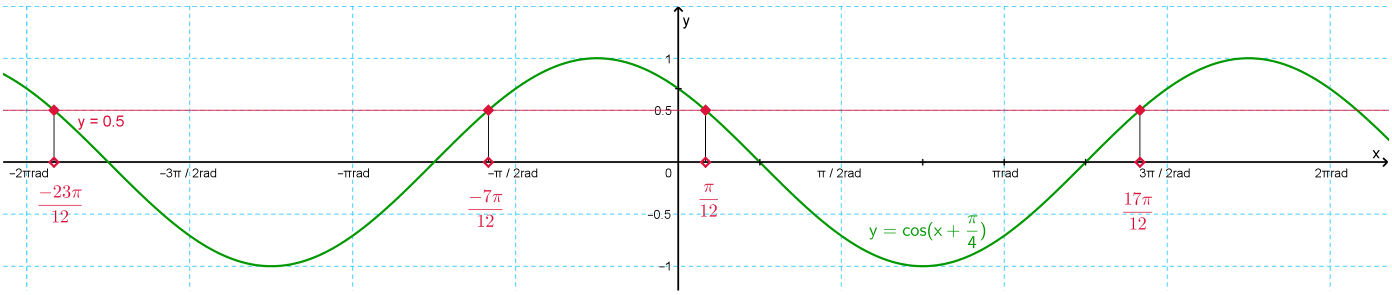
En isolant x dans le membre de gauche, cela s'écrit :

$x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ou $x=\frac{-\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{-7\pi}{12}+2k\pi$.

Pour choisir x dans l'intervalle considéré, on a le choix entre $x=\frac{\pi}{12}-2\pi=\frac{-23\pi}{12}$, $x=\frac{\pi}{12}$ (en prenant k=-1 et 0 dans la 1ère égalité), $x=\frac{-7\pi}{12}$ et $x=\frac{-7\pi}{12}+2\pi=\frac{17\pi}{12}$ (en prenant k=0 et 1 dans la 2ème égalité).

Voici dans l'ordre les quatre solutions à cette équation $\frac{-23\pi}{12}$, $\frac{-7\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$.

Ce n'était pas demandé, mais voici aussi l'illustration graphique de cette équation.



b) Résoudre l'équation E_2 : $\cos x=\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$ tout d'abord, puis pour $x\in]0;2\pi]$ (ranger les solutions trouvées dans l'ordre croissant).

E_2 : $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ (on peut aussi écrire une égalité entre deux *sinus*).

On a donc $x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$.

Cela conduit à, d'une part, $4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$, et d'autre part $-2x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

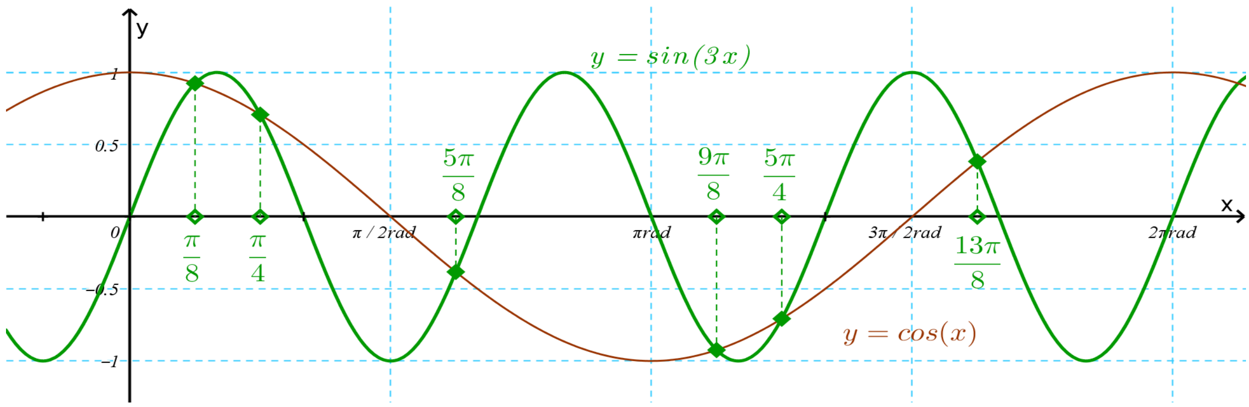
Cela conduit à trouver quatre solutions entre 0 et 2π pour la 1ère égalité :

$$\frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8},\ \frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}=\frac{9\pi}{8} \text{ et } \frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}=\frac{13\pi}{8}.$$

La 2ème égalité donne deux solutions qui sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$.

Il y a donc six solutions dans $[\,0;2\pi\,]$. Ce sont, dans l'ordre, $\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{4}=\frac{10\pi}{8}$ et $\frac{13\pi}{8}$.

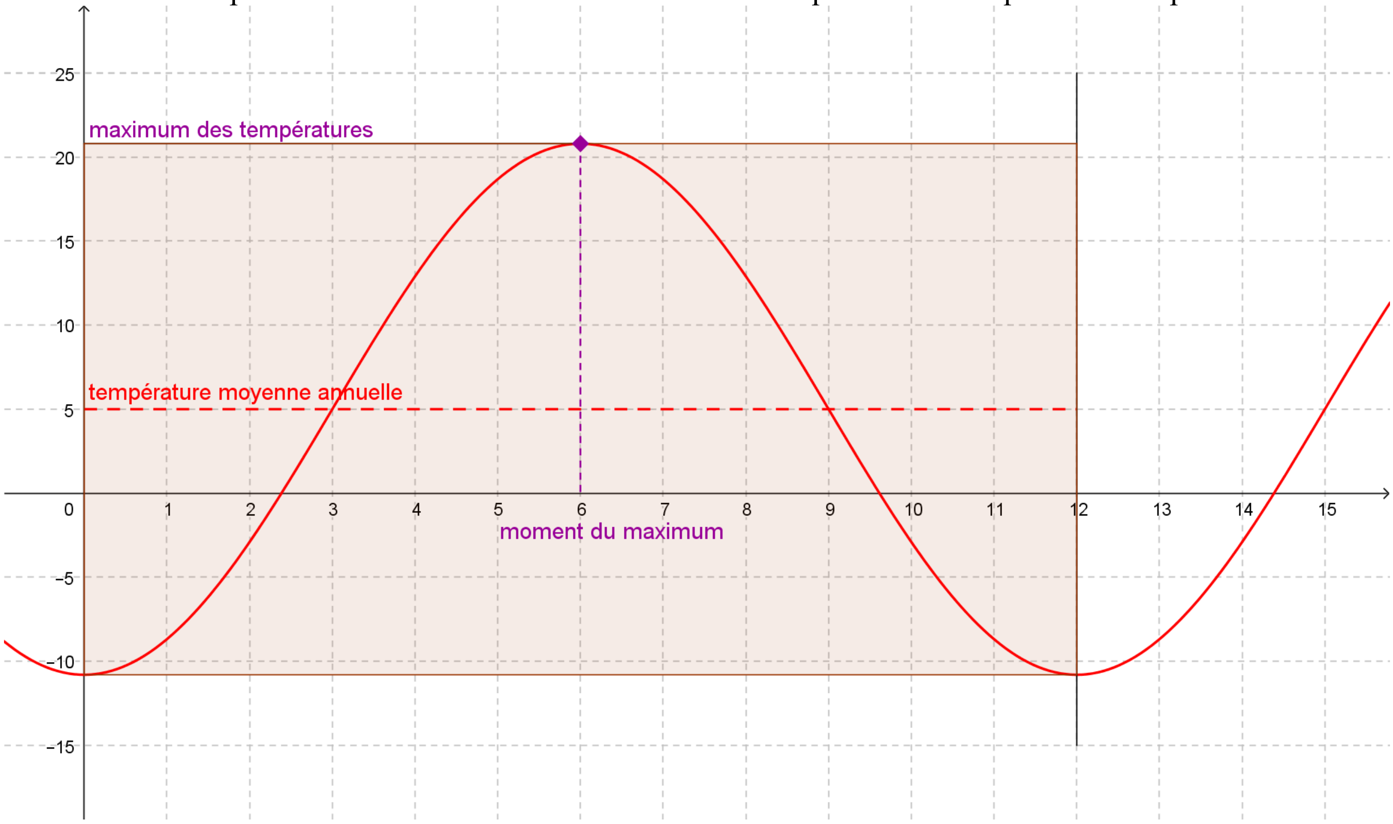
Faire figurer la courbe de la fonction *cosinus* sur l'illustration ci-dessous,
puis retrouver graphiquement les valeurs trouvées pour E_2.



En s'appuyant sur le graphique, déterminer les solutions de l'inéquation $\cos x \geq \sin(3x)$ pour $x \in]0 ; 2\pi]$.
La courbe de la fonction *cosinus* coupe la courbe tracée (d'équation $y = \sin(3x)$) en six points qui ont pour abscisses les solutions de l'équation. Pour l'inéquation, il faut dire comment sont les abscisses des points où la courbe rouge (de la fonction *cosinus*) est au-dessus de la courbe verte (d'équation $y = \sin(3x)$) :
il s'agit des valeurs comprises dans l'ensemble $]0 ; \frac{\pi}{8}] \cup [\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{8}] \cup [\frac{9\pi}{8} ; \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{13\pi}{8} ; 2\pi]$.

IV] Problèmes

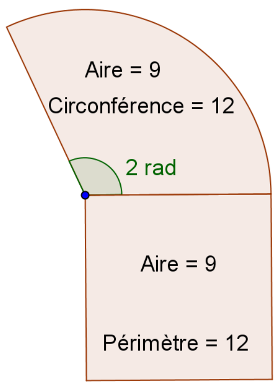
a) La température à Ottawa (Canada) est modélisée par la fonction $T(t) = 15{,}8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 5$, où t est le nombre de mois écoulés depuis le 1er janvier. Représenter graphiquement $T(t)$ pour $0 \leq t \leq 12$, puis déterminer la température maximale de l'année à Ottawa ainsi que la date à laquelle elle se produit.



La température est maximale à Ottawa lorsque le sinus qui la modélise est égal à 1 (le maximum de la fonction sinus), soit pour un moment t tel que $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 1$. On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et d'après la courbe, il n'y a qu'une solution à l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dans l'intervalle considéré : c'est la valeur qui vérifie $\frac{\pi}{6}(t-3) = \frac{\pi}{2}$, soit $t-3=3$ ou encore t=6. Il fait donc le plus chaud, selon ce modèle, après 6 mois, au milieu de l'année, soit aux alentours du 1er juillet.
Cette température maximale est égale à 5+15,8=20,8° (le *sinus* vaut alors 1).

b) Déterminer la mesure de l'angle au centre α (en *radians*) d'un secteur circulaire de rayon R pour que ce secteur ait même aire et même périmètre qu'un carré de côté R.
L'aire S d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle au centre α *rad* est $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, celui d'un carré de côté R est R^2. L'égalité de ces deux aires oblige à avoir $\frac{\alpha R^2}{2} = R^2$, et donc $\alpha = 2\,rad$.

Le périmètre du secteur circulaire est $l = R + R + \alpha R = R(2+\alpha)$ et celui du carré est $4R$, donc l'égalité de ces deux périmètres oblige à avoir $R(2+\alpha) = 4R$, soit $2+\alpha = 4$ ou encore $\alpha = 2\,rad$. On constate que pour cette valeur $\alpha = 2\,rad$, les aires et les périmètres des deux figures sont égaux, et ce, quelque soit la valeur de R évidemment.



Sur l'illustration ci-contre le rayon R vaut 3, mais si on divise cette longueur par 3, les aires divisées par 9 valent 1, et les périmètres divisées par 3 valent 4, mais ils restent égaux entre eux