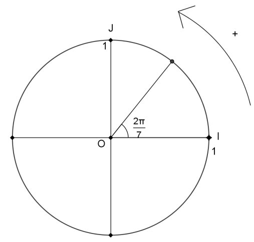
Entraînement au DS n°7

CORRECTION

I] Angles réels



a) Quelle est la mesure principale de l'angle $\alpha=\frac{2017\pi}{2}$ *rad* ?

$\frac{2017\pi}{2}=\frac{2016\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=1008\pi+\frac{\pi}{2}=504\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$ (504 tours plus un quart de tour).

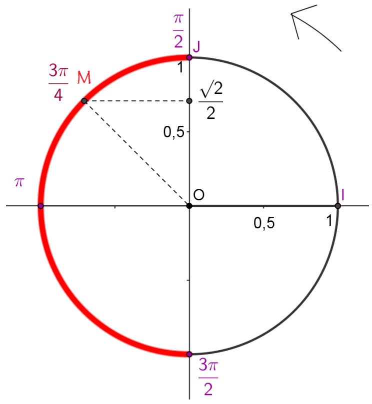
La mesure principale de α est donc $\frac{\pi}{2}$ *rad.*

Convertir en radians l'angle $\beta=\frac{2017}{\pi}\,°$.

$\beta=\frac{2017}{\pi}\,°=\frac{2017}{\pi}\times\frac{\pi}{180}=\frac{2017}{180}\approx 11{,}2056$ *rad.*

Donner la mesure de l'angle $\gamma\in[2016\pi;2017\pi]$ de mesure principale $\frac{2\pi}{7}$ *rad.*

$\frac{2\pi}{7}+2016\pi=\frac{2\pi+2016\times 7\pi}{7}=\frac{14114\pi}{7}\approx 2016{,}2857$ *rad.*



b) Tracer un cercle trigonométrique et y placer un point M tel que l'angle $\omega=\widehat{IOM}$ vérifie : $\omega\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ et $\sin(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donner la valeur exacte de l'angle ω .

C'est évident, sachant que $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

On a $\omega=\frac{3\pi}{4}$ *rad.*

c) À l'aide de la calculatrice et du cercle trigonométrique, déterminer $\sin\delta$ et l'angle δ (arrondir la valeur de δ au millième de *rad*) tel que $\delta\in[\pi;2\pi]$ et $\cos\delta=\frac{-1}{5}$.

La calculatrice donne $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{5}\right)\approx 1{,}77215$ *rad*, mais cette valeur correspond à un angle de $[0;\pi]$.

Il faut, pour trouver *δ*, prendre l'autre angle $-\cos^{-1}\left(\frac{-1}{5}\right)\approx -1{,}77215$ ayant même cosinus et lui ajouter 2π pour se retrouver dans $[\pi;2\pi]$. On a donc $\delta=2\pi-\cos^{-1}\left(\frac{-1}{5}\right)\approx 4{,}511$ *rad.*

Pour $\sin\delta$, on peut utiliser la relation $\sin^2\delta+\cos^2\delta=1$.

On trouve ainsi la valeur exacte $\sin^2\delta=1-\cos^2\delta=1-\left(\frac{-1}{5}\right)^2=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$.

Comme l'angle est dans $[\pi;2\pi]$, le sinus doit être négatif.

Donc $\sin\delta=-\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{-2\sqrt{6}}{5}\approx -0{,}97979$.

II] Propriétés

a) Simplifier les expressions A et B suivantes :

$$A=\cos(x+\pi)-\cos(-x)+2\cos(\pi-x)\ ;\ B=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+5\cos(2048\pi+x)$$

$A=-\cos(x)-\cos(x)+2(-\cos(x))=-4\cos(x)$.

$B=\cos(x)-3\cos(x)+5\cos(x)=3\cos(x)$ car $2048\pi=1024\times 2\pi$ (1024 tours).

b) Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.

indication : pour la dernière valeur, remarquer que $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$, d'où $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{16-(1+2\sqrt{5}+5)}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

La valeur cherchée de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est positive car $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$. On a donc $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\approx 0{,}5877852523$.

NB : la forme trouvée n'est pas très sympathique, il faut l'avouer. Voici quelques décimales supplémentaires :

$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx$ 0, 5877852522 9247312916 8705954639 0727685976 5243764314 5991072272 4807572784 7416235195 7508504049 8627413360...

$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

c) Montrer l'égalité suivante : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=0$.

$\frac{3\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{8}=\frac{8\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$ d'où

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

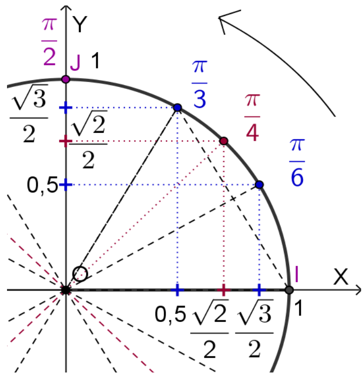
$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$

d) À l'aide de la propriété de duplication ($\cos 2x=2(\cos x)^2-1$) du cosinus et du cosinus d'un angle remarquable, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

La propriété permet de calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$, sachant $\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Remplaçons x par $\frac{\pi}{8}$ (et donc $2x$ par $2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$) dans $\cos 2x=2(\cos x)^2-1$:

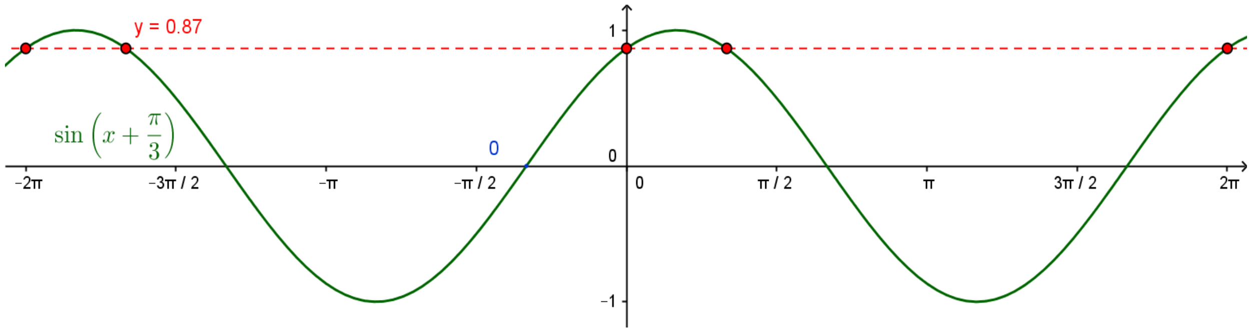
$$\cos(\frac{\pi}{4})-2(\cos\frac{\pi}{8})^2=-1 \text{, c'est-à-dire } (\cos\frac{\pi}{8})^2=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

La valeur cherchée de $\cos(\frac{\pi}{8})$ est positive car $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$.
On a donc $\cos(\frac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\approx 0{,}9238795325$.
Vérifions avec la calculatrice : $\cos(\frac{\pi}{8})\approx 0{,}9238795325$.



III] Équations

a) Compléter le cercle trigonométrique ci-contre avec les angles de $]0;\frac{\pi}{2}[$ et les valeurs remarquables de *cos* et *sin* correspondantes.
Nous avons juste rempli les valeurs du premier quadrant,
le seul concerné par l'intervalle $]0;\frac{\pi}{2}[$.
Résoudre alors l'équation E_1 : $\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in[-2\pi;2\pi]$.
$\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(\frac{\pi}{3})$, donc on doit avoir :
$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.
En isolant x dans le membre de gauche, cela s'écrit : $x=2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.
Pour choisir x dans l'intervalle considéré, on a le choix entre $x=-2\pi$, $x=0$, $x=2\pi$ (en prenant k=-1, 0 et 1 dans la 1ère égalité), $x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{3}-2\pi=\frac{-5\pi}{3}$.
Voici dans l'ordre les cinq solutions à cette équation -2π, $\frac{-5\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{3}$ et 2π.
Ce n'était pas demandé, mais voici aussi l'illustration graphique de cette équation.

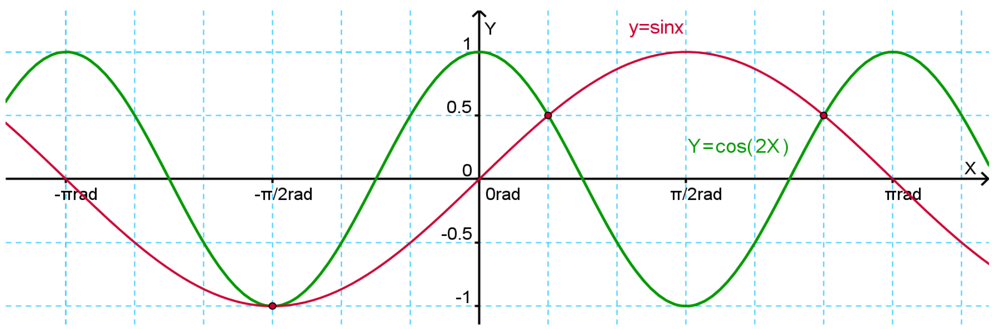


b) Résoudre l'équation E_2 : $\sin x=\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ tout d'abord, puis pour $x\in[-\pi;\pi]$ (ranger les solutions trouvées dans l'ordre croissant).
Faire figurer la courbe de la fonction *sinus* sur l'illustration ci-dessous,
puis retrouver graphiquement les valeurs trouvées pour E_2.
En s'appuyant sur le graphique, déterminer les solutions de l'inéquation $\sin x\geq\cos(2x)$ pour $x\in[-\pi;\pi]$.
L'équation s'écrit $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(2x)$. On a donc $2x=\pm(\frac{\pi}{2}-x)+2k\pi$.
Cela conduit à, d'une part $3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, et d'autre part $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$.
Nous avons donc d'une part $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, et d'autre part $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$.
Cela conduit à trouver trois solutions entre $-\pi$ et π pour la 1ère égalité :

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{-3\pi}{6}=\frac{-\pi}{2}.$$

La seule solution donnée par la 2ème égalité est $\frac{-\pi}{2}$ qui a déjà été trouvée.
Il y a donc trois solutions seulement sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ qui sont, dans l'ordre : $\frac{-\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.
On peut vérifier cela en traçant la courbe de la fonction *sin* (en rouge).

Cette courbe coupe la courbe tracée, qui a pour équation $y=\cos(2x)$, en trois points qui ont pour abscisses les solutions de l'équation (avec la grille donnée, graduée en $\frac{\pi}{6}$, c'était facile à vérifier).



IV] Étude de fonction

a) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos 2x-2(\cos x)^2$ est périodique de période π .
Montrer que la fonction g est paire. Sachant que, de plus, pour tout angle $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$, on a la propriété $\cos 2x=2(\cos x)^2-1$, expliquer pourquoi on peut en déduire que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=-1$.

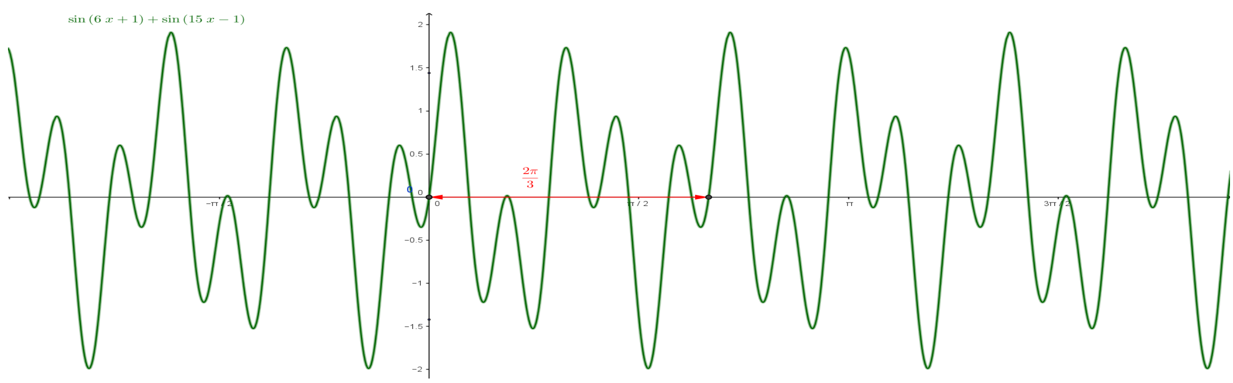
La fonction g est périodique de période π car on a :
$g(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)-2(\cos(x+\pi))^2=\cos(2x+2\pi)-2(-\cos x)^2=\cos(2x)-2(\cos x)^2=g(x)$.

La fonction g est paire car on a :
$g(-x)=\cos 2(-x)-2(\cos(-x))^2=\cos(-2x)-2(\cos x)^2=\cos(2x)-2(\cos x)^2=g(x)$.

La propriété s'écrit $g(x)=-1, \forall x\in[0;\frac{\pi}{2}]$, mais comme g est paire, par symétrie autour de l'axe des ordonnées, on aura $g(x)=-1, \forall x\in[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, un intervalle d'amplitude π.
La périodicité permet d'étendre la propriété en recouvrant, par translation, tout l'ensemble des réels.
Conclusion : g est constante sur $\mathbb{R}$.

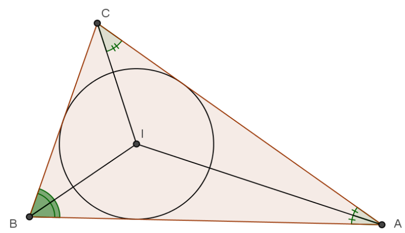
Remarque : dire d'une fonction constante qu'elle est périodique de période π paraît en contradiction avec la définition que nous avions donné de la période (*plus petite* valeur positive T vérifiant $g(x+T)=g(x)$). En réalité, nous avons juste voulu montrer, en utilisant la périodicité de la fonction *cos*, que $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x+\pi)=g(x)$. Cette propriété, conjuguée avec la parité, nous permet de prouver que la propriété $g(x)=-1$ s'étend à $\mathbb{R}$. La conclusion finale étant que g est constante, il faut revenir sur la période qui n'est pas π , puisque $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall T\geq 0,\ g(x+T)=g(x)$. Il n'y a pas de plus petite valeur strictement positive T vérifiant $g(x+T)=g(x)$), la fonction g n'est pas périodique.

b) Montrer que la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\sin(6x+1)$ est périodique de période $T_1=\frac{\pi}{3}$.
La fonction f_1 est périodique de période $T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ car on a, en utilisant la périodicité de la fonction *sin* :
$f(x+\frac{\pi}{3})=\cos(6(x+\frac{\pi}{3})+1)=\cos(6x+2\pi+1)=\cos(6x+1)=f(x)$.
Déterminer la période T_2 de la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x)=\sin(15x-1)$.
La fonction f_2 est périodique de période $T_2=\frac{2\pi}{15}$ (en utilisant la propriété qui a été vue en TD)
En déduire la période T de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.
Il faut chercher le plus petit multiple commun aux deux périodes.
Les multiples de $T_1=\frac{\pi}{3}$ sont $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{3}=\pi$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{6\pi}{3}=2\pi$ ...
Les multiples de $T_2=\frac{2\pi}{15}$ sont $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{4\pi}{15}$, $\frac{6\pi}{15}$, $\frac{8\pi}{15}$, $\frac{10\pi}{15}=\frac{2\pi}{3}$, $\frac{12\pi}{15}$, $\frac{14\pi}{15}$, $\frac{16\pi}{15}$, $\frac{18\pi}{15}$, $\frac{20\pi}{15}$..., $\frac{30\pi}{15}=2\pi$, ...
Il faut simplifier les fractions trouvées : le premier multiple commun n'est pas 2π , mais $\frac{2\pi}{3}$.
Ce n'était bien sûr pas demandé mais voici la courbe d'équation $y=\sin(6x+1)+\sin(15x-1)$ où on voit bien que la période est $\frac{2\pi}{3}$.



<u>Bonus</u> (2 points) :
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit (I est à l'intersection des bissectrices).
On suppose que AI=BC et que $\widehat{ICA}=2\widehat{IAC}$.
Quelle est la valeur de $\widehat{ABC}$?

Indication : on pourra utiliser la loi des sinus qui, dans le triangle ABC s'écrit $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2S}=2R$. Pour vous aider, j'ai fait une figure (elle ne respecte pas les conditions de l'énoncé).



Cette question et son corrigé sont extraits des annales des Olympiades Françaises de Mathématiques (année 2012). Voir la correction sur le sujet du DS directement.