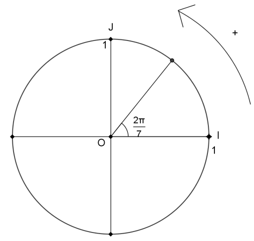
Barème : 5 pts par question

La calculatrice est autorisée ; n'oubliez pas de la mettre en mode rad.

I] Angles réels



a) Quelle est la mesure principale de l'angle $\alpha=\frac{2017\pi}{2}$ *rad* ?
Convertir en radians l'angle $\beta=\frac{2017}{\pi}\,°$.
Donner la mesure de l'angle $\gamma\in[2016\pi\,;2017\pi]$ de mesure principale $\frac{2\pi}{7}$ *rad.*

b) Tracer un cercle trigonométrique et y placer un point *M* tel que l'angle $\omega=\widehat{IOM}$ vérifie : $\omega\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ et $\sin(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donner la valeur exacte de l'angle ω .

c) À l'aide de la calculatrice et du cercle trigonométrique, déterminer $\sin\delta$ et l'angle δ (arrondir la valeur de δ au millième de *rad*) tel que $\delta\in[\pi\,;2\pi]$ et $\cos\delta=\frac{-1}{5}$.

II] Propriétés

a) Simplifier les expressions *A* et *B* suivantes :

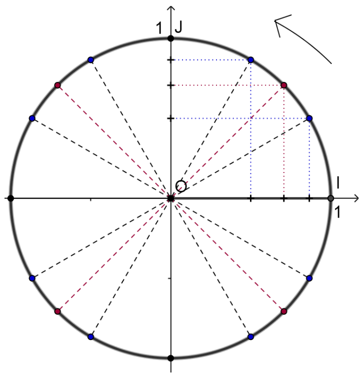
$$A=\cos(x+\pi)-\cos(-x)+2\cos(\pi-x)\ ;\ B=\sin(x+\tfrac{\pi}{2})-3\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)+5\cos(2048\pi+x)$$

b) Sachant que $\cos(\frac{\pi}{5})=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos(\frac{6\pi}{5})$, $\sin(\frac{\pi}{5})$ et $\cos(\frac{3\pi}{10})$.
indication : pour la dernière valeur, remarquer que $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

c) Montrer l'égalité suivante : $\sin(\frac{\pi}{8})-\sin(\frac{3\pi}{8})+\sin(\frac{5\pi}{8})-\sin(\frac{7\pi}{8})=0$.

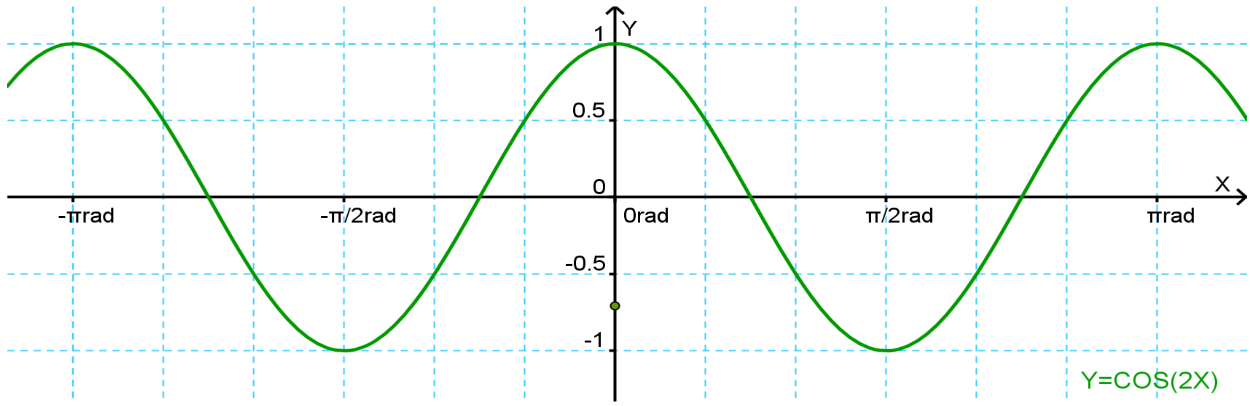
d) À l'aide de la propriété de duplication ($\cos 2x=2(\cos x)^2-1$) du cosinus et du cosinus d'un angle remarquable, déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

III] Équations



a) Compléter le cercle trigonométrique ci-contre avec les angles de $]0;\frac{\pi}{2}[$ et les valeurs remarquables de *cos* et *sin* correspondantes.
Résoudre alors l'équation E_1 : $\sin(x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x\in[-2\pi\,;2\pi]$.

b) Résoudre l'équation E_2 : $\sin x=\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ tout d'abord, puis pour $x\in[-\pi\,;\pi]$ (ranger les solutions trouvées dans l'ordre croissant).
Faire figurer la courbe de la fonction *sinus* sur l'illustration ci-dessous, puis retrouver graphiquement les valeurs trouvées pour E_2.
En s'appuyant sur le graphique, déterminer les solutions de l'inéquation $\sin x\geq\cos(2x)$ pour $x\in[-\pi\,;\pi]$.



IV] Étude de fonction

a) Montrer que la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos 2x-2(\cos x)^2$ est périodique de période π .
Montrer que la fonction *g* est paire. Sachant que, de plus, pour tout angle $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, on a la propriété $\cos 2x=2(\cos x)^2-1$, expliquer pourquoi on peut en déduire que $\forall\, x\in\mathbb{R},\ g(x)=-1$.

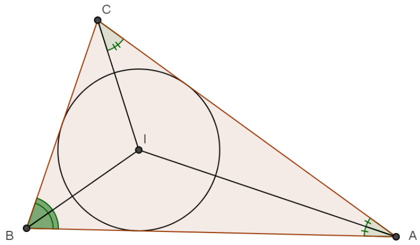
b) Montrer que la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\sin(6x+1)$ est périodique de période $T_1=\frac{\pi}{3}$.
Déterminer la période T_2 de la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x)=\sin(15x-1)$.
En déduire la période T de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

<u>Bonus</u> (2 points) :

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit (I est à l'intersection des bissectrices).

On suppose que AI=BC et que $\widehat{ICA} = 2\,\widehat{IAC}$.

Quelle est la valeur de $\widehat{ABC}$?



Indication : on pourra utiliser la loi des sinus qui, dans le triangle ABC s'écrit $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R$. Pour vous aider, j'ai fait une figure (elle ne respecte pas les conditions de l'énoncé).

Note de 2018 : Ce qui suit n'était pas donnée au DS.

Il s'agit du problème du bonus tel qu'il était présenté pour la sélection aux Olympiades avec sa correction.

(plus d'informations sur http://www.animath.fr/spip.php?rubrique35&lang=fr)

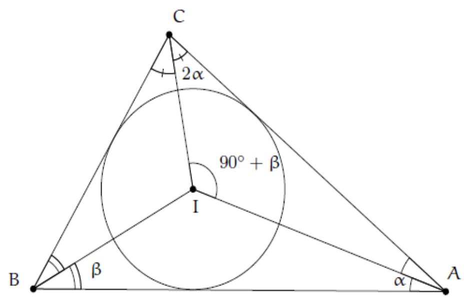
OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE SÉLECTION 2012 – CORRIGÉ

Exercice 10. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On suppose que $AI = BC$ et que $\widehat{ICA} = 2\widehat{IAC}$.

Quelle est la valeur de $\widehat{ABC}$?

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Notons α l'angle $\widehat{IAB}$ et β l'angle $\widehat{IBA}$. Par hypothêse, $\widehat{ICA} = 2\alpha$.



Il est facile de vérifier que $\beta = 90° - 3\alpha$ et $\widehat{IAC} = 90° + \beta$. Nous allons utiliser la loi des sinus dans les triangles AIC et ABC ce qui donne respectivement

$$\frac{AI}{\sin(2\alpha)} = \frac{AC}{\sin(90° - \beta)} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{\sin(2\beta)} = \frac{BC}{\sin(2\alpha)}.$$

Par hypothèse $AI = BC$. On a donc,

$$\frac{AI}{AC} \cdot \sin(2\alpha) = \sin(90° - \beta) = \sin(2\beta).$$

D'après les propriétés de la fonction sinus, si deux angles x et y de moins de 180° vérifient $\sin(x) = \sin(y)$, alors $x = y$ ou $x = 180° - y$. Regardons les deux cas :

- si $90° - \beta = 2\beta$, on a alors $\beta = 90°$ et $\widehat{ABC} = 180°$ et le triangle est plat, ce qui n'est pas une bonne solution
- $90° - \beta = 180° - 2\beta$, on a alors $\beta = 30°$ et $\widehat{ABC} = 60°$, ce qui donne la figure présentée ci dessus.

La solution est $\widehat{ABC} = 60°$.

Fin