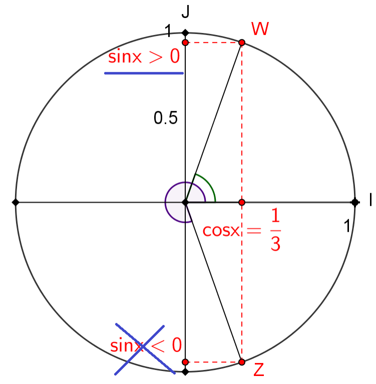
TD n°6 de trigonométrie

CORRECTION

1) Lignes trigonométriques incomplètes

Rappel : Les lignes trigonométriques de tout angle réel x vérifient l'égalité $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$.
De plus, on sait que $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $\cos x\in[-1\,;1]$ et $\sin x\in[-1\,;1]$.

a) Sachant que $0\leq x\leq\pi$ et que $\cos x=\frac{1}{3}$, déterminer la valeur exacte de $\sin x$, puis déterminer une valeur approchée de x.



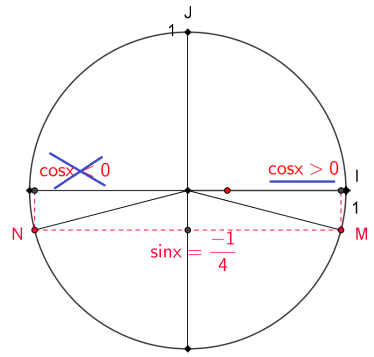
$(\sin x)^2=1-(\cos x)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

Comme $0\leq x\leq\pi$, d'après le cercle trigonométrique, on devrait avoir $\sin x\geq 0$, et donc $\sin x=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (le bon point sur le cercle est W).

Comme $0\leq x\leq\pi$, la calculatrice donne le bon angle pour $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (à cette question, elle donne toujours un angle de l'intervalle [0 ;π].

On a donc $x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx 1{,}230959417$ *rad*.

b) Sachant que $\frac{-\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ et que $\sin x=\frac{-1}{4}$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$, puis déterminer une valeur approchée de x.



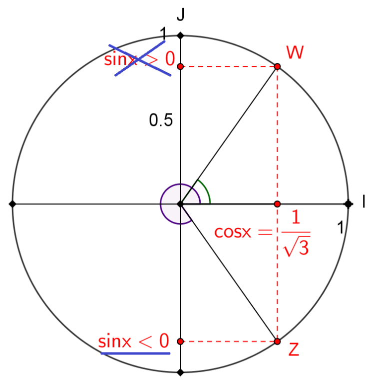
$(\cos x)^2=1-(\sin x)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

Comme $\frac{-\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, d'après le cercle trigonométrique, on devrait avoir $\cos x\geq 0$, donc $\cos x=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ (le bon point sur le cercle est M).

Comme $\frac{-\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, la calculatrice donnera le bon angle pour $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)$ (à cette question, elle donne toujours un angle de l'intervalle [$\frac{-\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] ; par contre, elle donnerait la mauvaise valeur si on l'interrogeait sur $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$, puisqu'elle donnerait un angle de *sin* positif).

On a donc $x=\sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)\approx -0{,}2526802551$ *rad*.

c) Sachant que $\pi\leq x\leq 2\pi$ et que $\cos x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, déterminer la valeur exacte de $\sin x$, puis déterminer une valeur approchée de x.



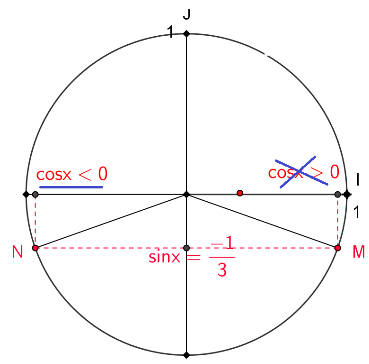
$(\sin x)^2=1-(\cos x)^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Comme $\pi\leq x\leq 2\pi$, d'après le cercle trigonométrique, on devrait avoir $\sin x\leq 0$, et donc $\sin x=-\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{6}}{3}$ (le bon point sur le cercle est Z).

Comme $\pi\leq x\leq 2\pi$, la calculatrice donne la bonne position sur le cercle pour $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ mais il faudra ajouter 2π à cette valeur pour tomber dans l'intervalle (à la question $\sin^{-1}(x)$, elle donne toujours un angle de l'intervalle [$\frac{-\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]).

On a donc $x=2\pi+\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{6}}{3}\right)\approx 5{,}327868689$ *rad*.

d) Sachant que $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ et que $\sin x=\frac{-1}{3}$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$, puis déterminer une valeur approchée de x.



$(\sin x)^2=1-(\cos x)^2=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

Comme $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$, d'après le cercle trigonométrique, on devrait avoir $\cos x\leq 0$, et donc $\cos x=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ (le bon point sur le cercle est N).

Comme $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ et que *sin x* est négatif, la calculatrice ne peut pas donner la bonne position sur le cercle. Pour $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$ elle va donner la position du point M, disons α dans l'intervalle [$\frac{-\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]. Il faudra calculer π-α pour tomber dans l'intervalle.

On a donc $x=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\approx 3{,}481429563$ *rad*.

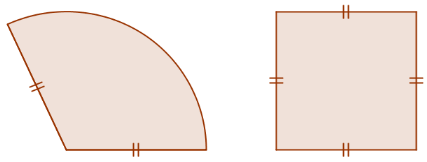
Vérifions que $\frac{\pi}{2}\leq 3{,}481429563\leq\frac{3\pi}{2}$. En effet, car $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$ et $\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}71$.

Vérifions aussi que $\sin(3{,}481429563)\approx\frac{-1}{3}$: oui, car $\sin(3{,}481429563)\approx -0{,}333333333$.

Vérifions enfin que $\cos(3{,}481429563)\approx -2\frac{\sqrt{2}}{3}$: oui,
car $\cos(3{,}481429563)\approx -0{,}9428090416$ et $-2\frac{\sqrt{2}}{3}\approx -0{,}9428090416$.

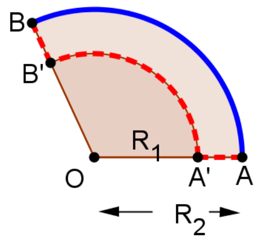
2) Deux radians

a) Montrer qu'un secteur circulaire de rayon R et d'angle au centre 2 *rad* a même aire et même périmètre qu'un carré de côté R.



L'aire S d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle au centre α *rad* est $S=\frac{\alpha R^2}{2}$, celui d'un carré de côté R est R^2. L'égalité de ces deux aires oblige à avoir $\frac{\alpha R^2}{2}=R^2$, et donc $\alpha=2\,rad$.

Le périmètre du secteur circulaire est $l=R+R+\alpha R=R(2+\alpha)$ et celui du carré est $4R$, donc l'égalité de ces deux périmètres oblige à avoir $R(2+\alpha)=4R$, soit $2+\alpha=4$ ou encore $\alpha=2\,rad$. On constate que pour cette valeur $\alpha=2\,rad$, les aires et les périmètres des deux figures sont égaux, et ce, quelque soit la valeur de R évidemment.



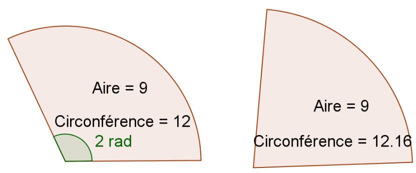
b) A et B étant deux points d'un même cercle, déterminer l'angle α (en radians) pour lequel les deux chemins suivants allant de A à B ont la même longueur :

- $A\widehat{A'B'}B$ (en pointillé)
- $\widehat{AB}$ (l'arc en trait plein)

Le chemin $A\widehat{A'B'}B$ (en pointillé) a une longueur égale à $AA'+R_1\times\alpha+B'B=2(R_2-R_1)+R_1\times\alpha$.
Le chemin $\widehat{AB}$, quant-à lui, mesure $R_2\times\alpha$.
L'égalité de ces deux chemins oblige à avoir $2(R_2-R_1)+R_1\times\alpha=R_2\times\alpha$, soit $2(R_2-R_1)=\alpha(R_2-R_1)$ ou encore $\alpha=2\,rad$.

c) Soit A l'aire d'un secteur circulaire de rayon R et d'angle au centre α *rad* et soit l son périmètre.
Montrer que, d'une façon générale, on a $l=\frac{2A}{R}+2R$.
Comme on l'a vu, le périmètre du secteur circulaire est $l=R+R+\alpha R=2R+\alpha R$ et l'aire A du secteur est $A=\frac{\alpha R^2}{2}$. On déduit cette dernière égalité que $\alpha R=\frac{2A}{R}$, et en remplaçant dans la première, on obtient $l=2R+\frac{2A}{R}$, ce qui correspond bien à l'égalité de l'énoncé.

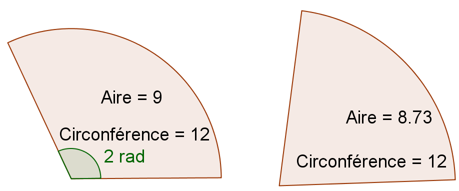
Montrer que pour α=2 *rad*, le périmètre mesure $l_0=4\sqrt{A}$.
En remplaçant α par 2 dans l'expression du périmètre, on obtient $l_0=2R+2R=4R$. En faisant la même chose dans l'expression de l'aire, on obtient $A=\frac{2R^2}{2}=R^2$, donc $R=\sqrt{A}$.
Finalement, on a $l_0=4R=4\sqrt{A}$.



Vérifier que $l\geq l_0$.
Montrons que, d'une façon générale $2R+\frac{2A}{R}\geq 4\sqrt{A}$.
Cela s'écrit $2R-4\sqrt{A}+\frac{2A}{R}\geq 0$ ou $R^2-2R\sqrt{A}+A\geq 0$ ou encore $(R-\sqrt{A})^2\geq 0$, ce qui est bien vrai puisqu'un carré est toujours positif.

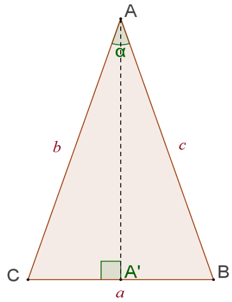
En déduire que parmi les secteurs circulaires ayant une aire donnée, celui dont le périmètre est minimal correspond à un angle de mesure 2 radians.
Le périmètre d'un secteur circulaire d'aire A est toujours supérieur au périmètre d'un secteur circulaire de même aire et d'angle α=2 *rad*. Parmi tous les secteurs de même aire A, celui d'angle 2 *rad* est celui qui est le plus compact (la compacité est grande quand le rapport l/A est petit).

d) Nous cherchons à déterminer, parmi les secteurs circulaires ayant un périmètre l donné, celui dont l'aire est maximum. En notant x le rayon, montrer que l'aire du secteur est $\frac{1}{2}x(l-2x)$ avec $0<x<\frac{l}{2}$.
C'est le problème inverse, et on se doute déjà que l'on va trouver α=2 *rad*. L'aire du secteur est $A=\frac{\alpha R^2}{2}$ et le périmètre $l=2R+\alpha R$.
De cette dernière on tire $\alpha=\frac{l-2R}{R}$, ou, avec la notation $x=R$, $\alpha=\frac{l-2x}{x}$. En remplaçant dans l'autre égalité $A=\frac{\alpha R^2}{2}=\frac{\alpha x^2}{2}$, on obtient $A=\frac{\alpha R^2}{2}=\frac{(l-2x)x^2}{2x}=\frac{(l-2x)x}{2}$ qui est bien l'expression cherchée.



Soit f la fonction définie sur $]0;\frac{l}{2}[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x(l-2x)$, montrer que f est croissante sur $]0;\frac{l}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{l}{4};\frac{l}{2}[$. En déduire le maximum de f et la valeur de α correspondante.

$f(x)=\frac{1}{2}(l-2x)x=-x^2+\frac{l}{2}x$. La fonction f est une fonction trinôme de coefficient $a=-1$ négatif.
Le sens de variation est croissant jusqu'à $x=\frac{-b}{2a}=\frac{l}{4}$, puis décroissant. Elle passe par un maximum, obtenu pour $x=\frac{l}{4}$ qui est $f\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(l-\frac{l}{2}\right)\frac{l}{4}=\frac{l^2}{16}$ Comme $\alpha=\frac{l-2R}{R}=\frac{l-2x}{x}$, en remplaçant x par ce qu'on vient de trouver ($x=\frac{l}{4}$), cela donne $\alpha=\frac{l-\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}}=\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}}=\frac{4}{2}=2$ *rad*.



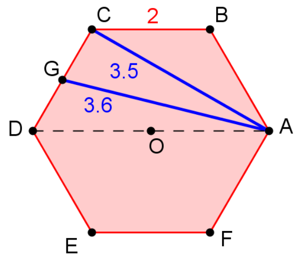
3) Formule de la base

Montrer que dans un triangle ABC isocèle en A, la base BC se calcule à l'aide de la formule suivante : $BC=2AB\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$.

C'est évident si on considère le triangle $AA'B$ rectangle en A' (A' est le milieu de $[BC]$) :
$BA'=AB\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$ et comme $BC=2BA'$ on a $BC=2AB\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$.
Avec les notations habituelles, on aurait $a=2b\sin\frac{\alpha}{2}=2c\sin\frac{\alpha}{2}$.

Sachant que $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté 2 et que G est le milieu de $[CD]$.
Calculer les longueurs AC et AG.

ABC est un triangle isocèle en B, et l'angle d'un hexagone régulier mesure 120°, c'est à dire $\frac{2\pi}{3}$ rad.
On a donc $AC=2AB\sin\frac{2\pi}{6}=4\sin\frac{\pi}{3}=4\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\approx 3{,}464101615$.



Pour la longueur AG, il n'y a pas de triangle isocèle évident à utiliser. Par contre, on peut remarquer que l'angle $\widehat{DCA}$ est droit (c'est facile à montrer). Le triangle GCA est rectangle en C et donc $GA^2=GC^2+AC^2$ d'après Pythagore.
En remplaçant par les valeurs, cela conduit à :
$AG=\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+4\times 3}=\sqrt{13}\approx 3{,}605551275$.

Ce sera tout pour ce chapitre 7 : six TDs !
Mais vous avez remarqué que dans ce sixième TD, il n'y avait rien de nouveau.