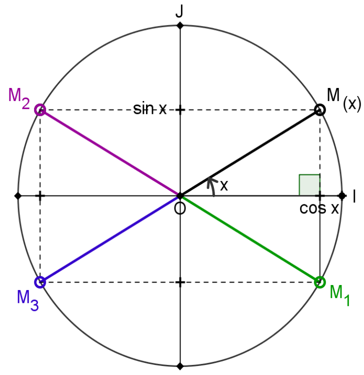
# TD n°3 de trigonométrie : angles associés et périodicité

## 1) Les angles associés




a) À tout réel $x$ de l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on peut associer le point $M$ du cercle trigonométrique correspondant à l'angle $\widehat{IOM}$ de mesure $x$ *rad*.

- En supposant que $x=\frac{\pi}{5}$, citer d'autres angles réels correspondant au même point $M$.

Il y a $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}+2\pi=\frac{11\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}-2\pi=\frac{-9\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}+4\pi=\frac{21\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des mesures d'angles réels correspondants au même point $M$ ?

$\frac{\pi}{5}+2k\pi$, $k$ étant un entier relatif.

b) $M_1$ est le symétrique de $M$ par rapport à $(OI)$.

- Donner la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}_1$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$.

$\widehat{IOM}_1=-\widehat{IOM}=-x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_1=\frac{-\pi}{5}$.

- Citer d'autres angles réels correspondant au même point $M_1$.

Il y a $\frac{-\pi}{5}$, $\frac{-\pi}{5}+2\pi=\frac{9\pi}{5}$, $\frac{-\pi}{5}-2\pi=\frac{-11\pi}{5}$, $\frac{-\pi}{5}+4\pi=\frac{19\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des angles réels correspondants au même point $M_1$ ?

$\frac{-\pi}{5}+2k\pi$, $k$ étant un entier relatif.

c) $M_2$ est le symétrique de $M$ par rapport à $(OJ)$.

- Donner la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}_2$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$

$\widehat{IOM}_2=\pi-\widehat{IOM}=\pi-x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_2=\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$.

- Citer d'autres angles correspondant au même point $M_2$.

Il y a $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}+2\pi=\frac{14\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}-2\pi=\frac{-6\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}+4\pi=\frac{24\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des angles correspondants au même point $M_2$ ?

$\frac{4\pi}{5}+2k\pi$, $k$ étant un entier relatif.

d) $M_3$ est le symétrique de $M$ par rapport à $O$.

- Donner la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}_3$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$

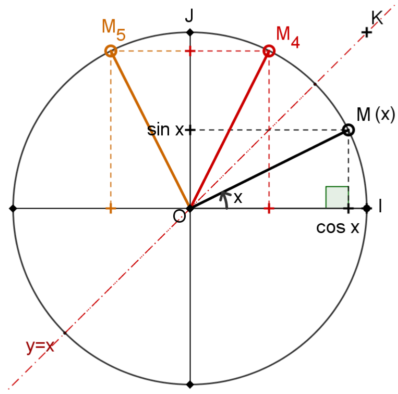
$\widehat{IOM}_3=\pi+\widehat{IOM}=\pi+x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_3=\pi+\frac{\pi}{5}=\frac{6\pi}{5}$.

- Citer d'autres angles réels correspondant au même point $M_3$.

Il y a $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}+2\pi=\frac{16\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}-2\pi=\frac{-4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}+4\pi=\frac{26\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des angles réels correspondants au même point $M_3$ ?

$\frac{6\pi}{5}+2k\pi$, $k$ étant un entier relatif.




e) Autres angles associés importants : $K$ étant le point de coordonnées (1;1), $M_4$ est le symétrique de $M$ par rapport à $(OK)$, la droite d'équation $y=x$ et $M_5$ est le symétrique de $M_4$ par rapport à $(OJ)$.

- Donner d'autres mesures de l'angle $\widehat{IOM}_4$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$.

$\widehat{IOM}_4=\frac{\pi}{2}-\widehat{IOM}=\frac{\pi}{2}-x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$ :

$$\widehat{IOM}_4=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

Il y a $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+2\pi=\frac{23\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}-2\pi=\frac{-17\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+4\pi=\frac{43\pi}{10}$, etc.

La forme générale est $\frac{3\pi}{10}+2k\pi$, $k$ étant un entier relatif.

- Donner d'autres mesures de l'angle $\widehat{IOM}_5$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$.

$\widehat{IOM}_5=\frac{\pi}{2}+\widehat{IOM}=\frac{\pi}{2}+x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_5=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}=\frac{7\pi}{10}$. Il y a $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}+2\pi=\frac{27\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}-2\pi=\frac{-13\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}+4\pi=\frac{47\pi}{10}$, etc. La forme générale est $\frac{7\pi}{10}+2k\pi$, $k$ étant un entier relatif.

## 2) Lignes trigonométriques des angles associés

a) Utiliser le cercle trigonométrique pour exprimer les lignes trigonométriques de $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$, $\frac{\pi}{2}-x$ et $\frac{\pi}{2}+x$ en fonction de $x$.

| | $-x$ | $\pi-x$ | $\pi+x$ | $\frac{\pi}{2}-x$ | $\frac{\pi}{2}+x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *cos* | $\cos x$ | $-\cos x$ | $-\cos x$ | $\sin x$ | $-\sin x$ |
| *sin* | $-\sin x$ | $\sin x$ | $-\sin x$ | $\cos x$ | $\cos x$ |

b) Deux applications

➢ En utilisant les lignes trigonométriques exactes des angles remarquables et les propriétés ci-dessus, déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ , $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ , $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ , $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)$ , $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ , $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ .

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ .

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ .

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$ .

$\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ .

$\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ .

$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ .

➢ Résoudre dans ℝ les équations suivantes : $\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (angle d'un triangle équilatéral) et donc que $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ .

L'équation n°1 s'écrit donc $\sin x=\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ .

On en déduit que $k\in\mathbb{Z}, x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(\frac{-\pi}{3}\right)+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ .

On sait que $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et donc, l'équation n°2 s'écrit $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ .

On en déduit que $k\in\mathbb{Z}, x=\frac{3\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=\frac{-3\pi}{10}+2k\pi$ .

3) Périodicité

Une fonction *F*, définie sur ℝ ou sur une réunion d'intervalle d'amplitude *T*, est périodique de période *T*>0 si $\forall\ x\in\mathbb{R}, F(x+T)=F(x)$ où *T* est le plus petit nombre vérifiant cette égalité.

a) Montrer que la fonction $f: x\mapsto$ sin 3*x* est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{3}$ . *indication : montrer que* $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$ .

Pour montrer cela, il faut utiliser la périodicité de la fonction *sin* : $\forall X\in\mathbb{R}, sin(X+2\pi)=sin(X)$ .

Calculons $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin(3x)$ .

La fonction *f* a donc pour période $\frac{2\pi}{3}$ .

*Pour cette fonction, il y a exactement trois périodes complètes dans un intervalle de longueur* $2\pi$ .

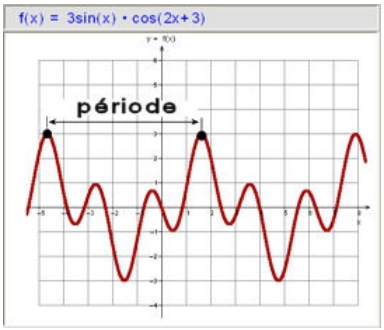
b) Montrer que la fonction $g: x\mapsto$ cos (2*x*+3) a pour période $\pi$ .

Calculons $g(x+\pi)=\cos(2(x+\pi)+3)=\cos(2x+2\pi+3)=\cos(2x+3)=g(x)$ (ici, on a utilisé la périodicité de la fonction *cos* : $\forall X\in\mathbb{R}, cos(X+2\pi)=cos(X)$ ).

La fonction *g* a donc pour période $\pi$ .

Pour cette fonction, il y a exactement deux périodes complètes dans un intervalle de longueur $2\pi$ .

Quelle est la période de la fonction *f* définie par $f(x)=3\sin(x)+\cos(2x+3)$ et illustrée par le graphique ci-contre? Expliquer pourquoi.




Cette fonction *f* est la somme de deux expressions $f_1(x)=3\,sin\,x$ et $f_2(x)=cos(2x+3)$ qui ont chacune leur périodicité.

La première est une expression de période $2\pi$ (c'est la fonction *sin* multipliée par un coefficient qui ne change rien à la périodicité) tandis que la seconde est une expression de période $\pi$ (c'est *g*(*x*)).

On observe sur le graphique que la période de *f* est environ 6,3 ce qui est une valeur approchée de $2\pi$ . Cette observation est un indice mais ce n'est pas une preuve.

La période d'une fonction somme n'est pas la somme des périodes : c'est le premier multiple commun des deux périodes. Ici l'expression $f_1(x)=3\,sin\,x$ impose à la période globale d'être un multiple de $2\pi$ , tandis que l'expression $f_2(x)=cos(2x+3)$ impose à la période globale d'être un multiple de $\pi$ .

Le premier multiple commun de $\pi$ et $2\pi$ est évidemment $2\times\pi=2\pi$ qui est donc la période de *f*.

Pour la fonction *f*, il y a deux périodes complètes de $f_1$ et une période de $f_2$ dans un intervalle de longueur $2\pi$ .

c) Quel est l'ensemble de définition de *tan* : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ ?

Il faut savoir pour quelles valeurs de $x$ on a $\cos x = 0$ .
C'est une équation qui s'écrit $\cos x = \cos \frac{\pi}{2}$ , car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

D'où les solutions sur $\mathbb{R}$ : $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ .

L'ensemble de définition de *tan* est donc $D_{\tan} = \{ x \in \mathbb{R} / x \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ .

En fait, si on remarque bien, les valeurs interdites étant distantes de π, la moitié de 2π, elles sont à intervalle régulier : ..., $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, ... On peut les écrire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k$ entier relatif de $\mathbb{Z}$ .

$D_{\tan}$ est donc la réunion d'intervalles d'amplitude π, de la forme $]\frac{-\pi}{2} + k\pi \; ; \; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ .

Montrer que la période de *tan* est $\pi$ .

En appliquant les propriétés ci-dessus donnant les lignes trigonométrique de l'angle associé $x+\pi$ , on a :

$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ pour toutes les valeurs de $D_{\tan}$ .

La fonction *tan* est donc périodique de période π.