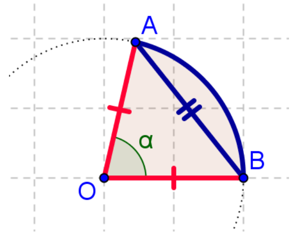
2de DM n°7 : Trigonométrie

CORRECTION

1) Trigonométrie et algorithmes

Équation n°1 : A et B étant deux points d'un cercle de centre O, on veut déterminer l'angle géométrique $\widehat{AOB}=\alpha$ pour lequel les longueurs $l_1=AO+OB$ et $l_2=\overset{\frown}{AB}+AB$ sont égales.

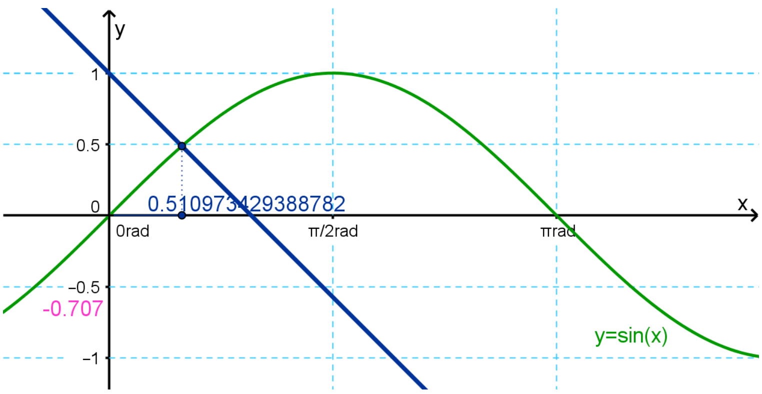
a) Montrer que $\frac{\alpha}{2}$ (en radians) est solution de l'équation $\sin x=1-x$.

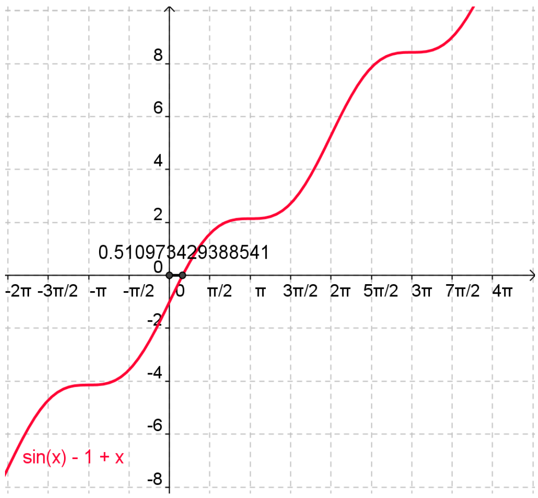


Ici, les longueurs égales sont $l_1=AO+OB=2R$ et $l_2=\overset{\frown}{AB}+AB=\alpha R+AB$, or AB se calcule en deux morceaux, en utilisant le milieu H de $[AB]$: $AH=R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et donc $AB=2\,AH=2\,R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. L'égalité entre l_1 et l_2 impose que l'on ait $2\,R=\alpha R+2\,R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et donc $2-\alpha=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, et en divisant par 2 : $1-\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Remplaçons $\frac{\alpha}{2}$ par x et l'on obtient $1-x=\sin x$. Cette équation ayant pour solution x_0. Nous pouvons en déduire que $\frac{\alpha}{2}=x_0$, donc $\alpha=2\,x_0$.

b) Expliquer pourquoi ce nombre ne peut être déterminé par la méthode élémentaire vue en cours. Utiliser une méthode algorithmique pour déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de α .

Ici on ne peut exprimer le membre de gauche sous la forme d'un sinus ou d'un cosinus, on ne peut donc pas mettre l'équation sous la forme $\sin x=\sin\alpha$ ou $\cos x=\cos\alpha$ (ni même $\tan x=\tan\alpha$) et donc elle ne peut être résolue comme on l'a vu en cours. Le moyen le plus évident, qui a été vu en cours (ou plutôt en TD), est de chercher la solution par une méthode algorithmique telle que la dichotomie.





Commençons par tracer la courbe d'équation $y=\sin x$ (en vert à gauche) et ensuite, traçons la droite d'équation $y=1-x$ (en bleu). À l'intersection de ces deux courbe, il y a un point qui a pour abscisse x_0.
Il est également possible de tracer la courbe d'équation $y=\sin x-1+x$ (tracée en rouge à droite) et de chercher l'abscisse du point où cette courbe coupe l'axe des abscisses.
Geogebra nous donne directement une valeur approchée à 15 chiffres $x_0\approx 0{,}510973429388541$.
Si on utilise cette valeur, on n'a pas besoin de la dichotomie. Mais si le graphique n'est pas aussi précis, il faut l'utiliser pour gagner de la précision. Une lecture graphique très grossière nous donne $x_0\approx 0{,}5$. On va donc partir de l'intervalle [0 ; 1] pour commencer la dichotomie et demander au programme de s'arrêter dès qu'il atteint la précision requise, ici 10^{-5}. On trouve ainsi $x_0\approx 0{,}51097$ et donc $\alpha\approx 2\times 0{,}51097$ *rad*, soit $\alpha\approx 1{,}02194$ *rad* soit un peu moins de $\frac{\pi}{3}\approx 1{,}04720\,rad$.

c) Convertir la valeur de α trouvée en degrés (°), minutes (') et secondes (") d'arc sachant que 3600"=60'=1°.

Pour convertir en degré, on doit multiplier par $\frac{180}{\pi}$, donc on a $\alpha\approx 58{,}55285°$, soit 58° et 0,55285° que l'on convertit en minutes en multipliant par 60 : 0,55285×60=33,171'.
On a donc 33' et 0,171' que l'on convertit en secondes en multipliant par 60 : 0,171×60=10,26".
On a donc 10" et 0,26" que l'on peut arrondir à 10".
Finalement $\alpha\approx$ 58°33'10".
NB : après la seconde d'arc (le 3600ième de degré), il y a les centièmes de seconde (on quitte les subdivisions sexagésimales traditionnelles pour entrer dans le monde plus moderne du décimal). On pourrait donc donner le résultat $\alpha\approx$ 58°33'10,26" mais ce résultat est trop précis par rapport à l'approximation qu'on a faite de x_0. Avec les 15 chiffres de GeoGebra, on trouve $\alpha\approx$ 58°33'11,67082048" (on a perdu 1,41" ce qui montre bien que le centième de seconde est une mesure trop précise ici).

Équation n°2 : Harry joue en classe avec sa calculatrice. Il s'aperçoit qu'en tapant cos(1) et puis ensuite cos(*Ans*) (*Ans* est une fonction de la calculatrice qui rappelle le résultat précédent), puis à nouveau et encore cos(*Ans*), cos(*Ans*), cos(*Ans*), etc. il finit par obtenir une valeur qui ne change plus. Sally sa voisine lui fait remarquer que cela revient à faire cos(cos(cos(...(cos(cos(1)))...))) jusqu'à obtenir les 9 premières décimales d'un nombre β.

a) Quelle valeur de β (à 10^{-9} près) obtient-on en appliquant l'algorithme de Harry ?
Combien de fois faut-il réitérer la fonction cos pour arriver à ce résultat ?

D'une façon pratique ici, il est juste demandé d'effectuer manuellement l'expérience de Harry. Comme cela peut être assez long, que c'est difficile de comptabiliser les itérations sans se tromper et que la manipulation de la calculatrice ne laisse pas de trace, je vais réaliser cela sur un tableur.

itérations	α (rad)	cosα	test
1	1	0,5403023059	NON
2	0,5403023059	0,8575532158	NON
3	0,8575532158	0,6542897905	NON
4	0,6542897905	0,7934803587	NON
5	0,7934803587	0,7013687736	NON
6	0,7013687736	0,7639596829	NON
7	0,7639596829	0,722102425	NON
8	0,722102425	0,7504177618	NON
9	0,7504177618	0,7314040424	NON
10	0,7314040424	0,7442373549	NON
77	0,7390851332	0,7390851332	NON
78	0,7390851332	0,7390851332	NON
79	0,7390851332	0,7390851332	NON
80	0,7390851332	0,7390851332	NON
81	0,7390851332	0,7390851332	NON
82	0,7390851332	0,7390851332	NON
83	0,7390851332	0,7390851332	NON
84	0,7390851332	0,7390851332	OUI
85	0,7390851332	0,7390851332	OUI
86	0,7390851332	0,7390851332	OUI

L'affichage des résultats intermédiaires est très facile et utile pour voir ce qui se passe. J'ai ajouté dans ma feuille de calcul une colonne où est recopiée la formule écrite cellule D2 : =SI(C2=B2;"OUI";"NON"). Cette colonne permet de voir rapidement où est obtenue l'égalité entre les deux valeurs. On voit sur l'extrait ci-contre que l'égalité est reconnue par ce test pour la 84ème étape, ce qui ne semble pas correspondre à l'égalité des 9 premiers chiffres après la virgule ; celle-ci étant réalisée bien avant. Le tableur affiche par défaut 10 chiffres mais il compare les valeurs sur 15 décimales. Voici, avec davantage de décimales, les résultats finaux (j'ai ajouté une autre colonne à droite pour calculer la différence cosα − α :

81	0,73908513321516600000	0,73908513321515700000	NON	-8,43769498715119E-015
82	0,73908513321515700000	0,73908513321516300000	NON	5,6621374255883E-015
83	0,73908513321516300000	0,73908513321515900000	NON	-3,77475828372553E-015
84	0,73908513321515900000	0,73908513321516200000	OUI	0
85	0,73908513321516200000	0,73908513321516000000	OUI	0
86	0,73908513321516000000	0,73908513321516100000	OUI	0

Revenons donc à notre question. Quand a t-on une différence cosα − α inférieure à 10^{-9} ? J'améliore mon test pour répondre à cette question, et le fait porter sur la colonne des différences. Pour cela, j'écris dans la colonne Test 2 :
=SI(ABS(E2)<=0,000000001;"OUI";"NON")
La cellule E2 contient la différence cosα − α (notée « Différence ») ; il faut en prendre la valeur absolue car celle-ci est alternativement positive et négative.

itérations	α (rad)	cosα	Test 1	Différence	Test 2
1	1,000000000	0,540302306	NON	-0,4596976941	NON
2	0,540302306	0,857553216	NON	0,31725091	NON
3	0,857553216	0,654289790	NON	-0,2032634253	NON
4	0,654289790	0,793480359	NON	0,1391905682	NON
5	0,793480359	0,701368774	NON	-0,0921115851	NON
6	0,701368774	0,763959683	NON	0,0625909093	NON
7	0,763959683	0,722102425	NON	-0,0418572579	NON
8	0,722102425	0,750417762	NON	0,0283153367	NON
49	0,739085135	0,739085132	NON	-2,60583699063233E-009	NON
50	0,739085132	0,739085134	NON	1,75532310908721E-009	NON
51	0,739085134	0,739085133	NON	-1,18240672808412E-009	NON
52	0,739085133	0,739085134	NON	7,96483434761797E-010	OUI
53	0,739085134	0,739085133	NON	-5,3652082776523E-010	OUI
54	0,739085133	0,739085133	NON	3,61406904403339E-010	OUI
55	0,739085133	0,739085133	NON	-2,43448039505267E-010	OUI
56	0,739085133	0,739085133	NON	1,63989488655147E-010	OUI

De cette façon, on observe que la différence devient inférieure ou égale à 10^{-9} à partir de 52 itérations. Strictement parlant, l'affichage de la calculatrice devrait rester inchangé à partir de 54 itérations. Ce petit écart provient de notre test qui examine la différence « réelle » (calculée avec un nombre de décimales supérieur à 9 mais pas infini) et non la différence affichée. On obtient la valeur finale 0,739085133 pour laquelle, semble t-il, on a cosα = α.

La calculatrice en mode calcul a t-elle le comportement que l'on vient de décrire ? La réponse dépend de la calculatrice : la calculatrice Numworks n'affiche que 6 décimales par défaut et, curieusement, lorsqu'on tape cos(Ans) à la 2ème étape, elle affiche le résultat en remplaçant l'écriture cos(ans) par cos(cos(1)). Ensuite, on obtient l'écriture exacte cos(cos(cos(1))), etc. jusqu'à ce que l'affichage dépasse la ligne prévue pour le calcul et on voit seulement cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(co (le reste est coupé). Il n'y a rien à dire là-dessus, et on peut conclure qu'il faut 36 étapes pour avoir l'égalité des 6 chiffres.

x	1	0,540302	0,857553	0,65429	0,79348	0,701369	0,76396	0,722102	0,750418
cos x	0,540302	0,857553	0,65429	0,79348	0,701369	0,76396	0,722102	0,750418	0,731404

x	0,731404	0,744237	0,735605	0,741425	0,737507	0,740147	0,738369	0,739567	0,73876
cos x	0,744237	0,735605	0,741425	0,737507	0,740147	0,738369	0,739567	0,73876	0,739304

x	0,739304	0,738938	0,739184	0,739018	0,73913	0,739055	0,739106	0,739071	0,739094
cos x	0,738938	0,739184	0,739018	0,73913	0,739055	0,739106	0,739071	0,739094	0,739079

x	0,739079	0,739089	0,739082	0,739087	0,739084	0,739086	0,739085	0,739086	0,739085
cos x	0,739089	0,739082	0,739087	0,739084	0,739086	0,739085	0,739086	0,739085	0,739085

Un coup d'œil sur mon tableau montre que la valeur trouvée correspond bien aux valeurs arrondies à 6 chiffres.

	x	$\cos(x)$
33	0,739086423	0,739084264
34	0,739084264	0,739085719
35	0,739085719	0,739084739
36	0,739084739	0,739085399
37	0,739085399	0,739084954

arrondis à 9 chiffres

	x	$\cos(x)$
33	0,739086	0,739084
34	0,739084	0,739086
35	0,739086	0,739085
36	0,739085	0,739085
37	0,739085	0,739085

arrondis à 6 chiffres

En réalité, sur la Numworks, on peut modifier le nombre de chiffres affichés dans le menu « paramètres ». Si on écrit 9 chiffres, on obtient cos(1)=0,54030231 soit 8 chiffres après la virgule (le 9$^{\text{ème}}$ est le 0 des unités). En écrivant 10 chiffres, on obtient cos(1)=0,540302306 soit 9 chiffres de la partie décimale. Dans ce cas, on va pouvoir répondre très précisément au problème posé. La démarche est un peu longue à mettre en œuvre et on peut perdre le compte des itérations... pour cette raison, il vaut mieux écrire un petit programme en Python : je commence par écrire un programme qui détermine à partir de quelle valeur de *n* (le nombre d'itérations) la différence devient réellement plus petite que 10^{-9}. Je retrouve ainsi la valeur de 52 itérations trouvée avec le tableur. Pour répondre à la question posée, il faut prendre les valeurs arrondies à 9 chiffres. La fonction *round*(*a*,*n*) de Python arrondit à *n* chiffres après la virgule le nombre *a*. Elle donne, par exemple, *round*(cos(1),9)=0.540302306. Mais, attention, il n'y a rien derrière le 6 : *round*(cos(1),9)-0.540302306=0. Ce n'est pas exactement ce que fait la calculatrice : elle arrondit à 9 chiffres mais continue à calculer des valeurs correctes en utilisant des chiffres cachés. Il faut donc modifier le programme pour obtenir une comparaison sur les 9 premiers chiffres mais un calcul avec toutes les décimales de la notation flottante des réels (15 chiffres en Python comme sur le tableur).

```python
from math import *
a=1
n=1
while  (abs(cos(a)-a)>10**(-9)):
     a=cos(a)
     n+=1
print(a,n)
```

```
0.7390851327392538 52
```

```python
from math import *
a=1
n=1
while abs(round(cos(a),9)-round(a,9))>10**(-9):
     a=cos(a)
     n+=1
print(cos(a),round(cos(a),9),n)
```

```
0.7390851327392538 0.739085133 51
```

b) Si on recommence en partant de 0 (au lieu de 1) quel résultat obtient-on ?
Choisir un autre point de départ et tester à nouveau l'algorithme. Conclure par une conjecture.

Notre feuille de calcul va nous resservir ici : il suffit de remplacer la valeur initiale de α par 0 (au lieu de 1). On obtient la même valeur finale 0,739085133 mais au bout d'un nombre différent d'itérations. L'affichage de la calculatrice reste inchangé à partir de 55 itérations (ou 54 si on ne compte pas la 1$^{\text{ère}}$ étape). Si on choisit une valeur encore différente, par exemple 0,7 (plus proche de la valeur finale), on va obtenir la même valeur finale, mais beaucoup plus vite encore (forcément direz-vous car on était plus proche au départ) : dans ce cas, il ne faut que 47 étapes (ou 46). Et si on essaie avec un nombre beaucoup plus grand, en dehors de l'intervalle [0;2π], par exemple 2018, on obtient le résultat finale en …. seulement 52 étapes (ou 51) ! Il faut dire que la grandeur du nombre initial ne compte pour ainsi dire pas, car dès la 1$^{\text{ère}}$ étape on est ramené dans l'intervalle [-1;1] puisque le cosinus prend ses valeurs dans cet intervalle.

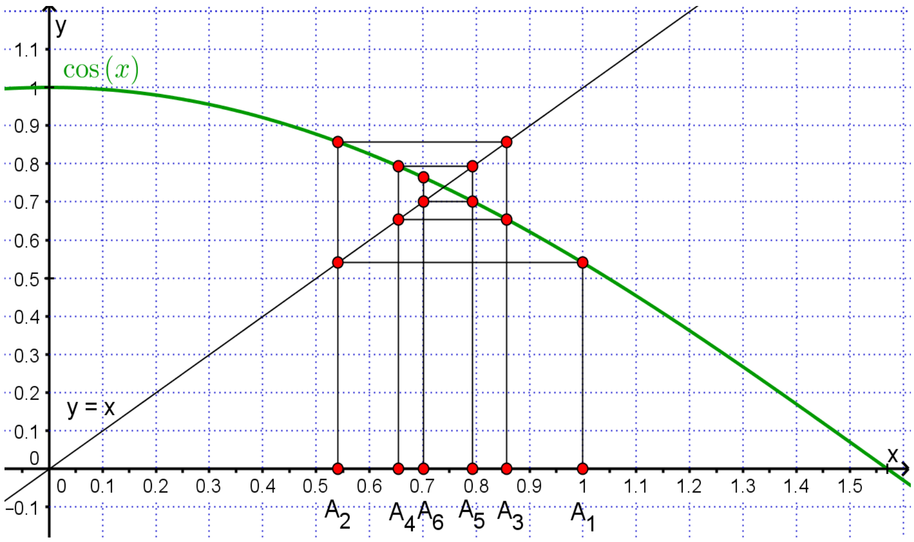
itérations	α (rad)	cos α	Test 1	Différence	Test 2
1	0,000000000	1,000000000	NON	1	NON
2	1,000000000	0,540302306	NON	-0,4596976941	NON
3	0,540302306	0,857553216	NON	0,31725091	NON
4	0,857553216	0,654289790	NON	-0,2032634253	NON
5	0,654289790	0,793480359	NON	0,1391905682	NON
6	0,793480359	0,701368774	NON	-0,0921115851	NON
7	0,701368774	0,763959683	NON	0,0625909093	NON
49	0,739085131	0,739085135	NON	3,86845366850963E-009	NON
50	0,739085135	0,739085132	NON	-2,60583699063233E-009	NON
51	0,739085132	0,739085134	NON	1,75532310908721E-009	NON
52	0,739085134	0,739085133	NON	-1,18240672808412E-009	NON
53	0,739085133	0,739085134	NON	7,96483434761797E-010	OUI
54	0,739085134	0,739085133	NON	-5,3652082776523E-010	OUI
55	0,739085133	0,739085133	NON	3,61406904403339E-010	OUI
56	0,739085133	0,739085133	NON	-2,43448039505267E-010	OUI

itérations	α (rad)	cosα	Test 1	Différence	Test 2
1	2018,000000000	0,455808127	NON	-2017,5441918731	NON
2	0,455808127	0,897905594	NON	0,4420974666	NON

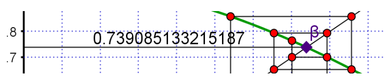
Voici donc notre conjecture (résultat subodoré mais non prouvé) : quel que soit le nombre α pris au départ, en réitérant l'affectation de α dans cosα, la différence cosα − α finit par être nulle au bout d'un certain nombre d'étapes. Pour une précision de 9 chiffres après la virgule (l'affichage ordinaire d'une calculatrice), en partant d'un nombre α entier de radians, il semble que cela nécessite une cinquantaine d'étapes avant que la différence soit indécelable.

c) Expliquer pourquoi, le nombre β doit être solution de l'équation $\cos x = x$, puis tracer précisément la courbe de la fonction cosinus pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et montrer comment on retrouve β sur ce graphique.

Le processus décrit par l'algorithme de Harry s'achève lorsque la différence cosα − α devient indécelable sur les 9 premières décimales, cela signifie que l'on doit avoir $|\cos\alpha - \alpha| \leq 10^{-9}$. En réalité, si on continue, avec une précision plus grand, on peut rendre l'écart |cosα − α| aussi petit que l'on veut, aussi proche de 0 que l'on veut. Cela indique qu'à la limite, en poursuivant le processus une infinité de fois, les deux nombres finissent par devenir égaux et la différence nulle. Le nombre que l'on obtient à l'étape finale est donc une approximation de la solution de l'équation $\cos x = x$ à la précision fixée.



Si on trace la courbe de la fonction cosinus et la droite d'équation $y=x$ sur un même graphique, on peut visualiser le processus de Harry : en partant du point $A_1(1;0)$ on lit cos(1)≈0,54 sur l'axe des ordonnées et on reporte ce nombre sur l'axe des abscisse en utilisant la droite d'équation $y=x$. Cela donne le point $A_2(\approx 0{,}54;0)$. De ce point, on recommence, et par le même genre de construction, on obtient le point $A_3(\approx 0{,}86;0)$. L'abscisse 0,86 de A_3 est simplement égale au cosinus de celle de A_2. Les abscisses de ces points A_1, A_2, A_3, etc. se suivent exactement comme les valeurs de notre premier tableau. On s'approche ainsi progressivement de l'abscisse du point d'intersection de la courbe de la fonction cosinus et de la droite d'équation $y=x$. Cette intersection a pour abscisse 0,739085133215187 (on utilise le maximum de précision donné par GeoGebra). Ce nombre est bien celui que l'on a obtenu par l'algorithme de Harry.



Calcul de sin(x) : Lorsque x est un angle en radian, on a $\sin x = x - \frac{x^3}{3\times 2} + \frac{x^5}{5\times 4\times 3\times 2} - \frac{x^7}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2} + etc.$ (P)

On va calculer une valeur approchée de sin(1), la solution de l'équation $\sin^{-1}(x)=1$, à l'aide de (P).

a) Simplifier les expressions $S_2(1)= 1-\frac{1}{3\times 2}$, $S_3(1)= S_2(1)+\frac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$ et $S_4(1)= S_3(1)-\frac{1}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}$.

$S_1(1)=1$

$S_2(1)= 1-\frac{1}{3\times 2}=\frac{6-1}{6}=\frac{5}{6}\approx 0{,}833333$,

$S_3(1)= S_2(1)+\frac{1}{5\times 4\times 3\times 2}=\frac{5\times 5\times 4+1}{5!}=\frac{101}{120}\approx 0{,}841667$,

$S_4(1)= S_3(1)-\frac{1}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}=\frac{101\times 7\times 6-1}{7!}=\frac{4241}{5040}\approx 0{,}841468$,

$S_5(1)= S_4(1)+\frac{1}{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}=\frac{4241\times 9\times 8+1}{9!}=\frac{305353}{362880}\approx 0{,}841471$, etc.

On constate que ces différentes valeurs rationnelles $S_1(1)$, $S_2(1)$, $S_3(1)$, $S_4(1)$, $S_5(1)$, etc. s'approchent de plus en plus d'un nombre. Avec la calculatrice, on trouve ce nombre : c'est sin(1)=0,8414709848... Les décimales de ce nombres sont imprévisibles car il n'est pas rationnel, mais on s'en approche progressivement par cette suite de valeurs rationnelles.

b) Calculer les écarts qu'il y a, à 10^{-9} près, entre sin(1) et $S_1(1)=1$, $S_2(1)$, $S_3(1)$ et $S_4(1)$.

Nous avons donné les valeurs approchées décimales à 10^{-6} près, mais évaluons maintenant les écarts avec la « vraie » valeur de sin(1) (celle donnée par la calculatrice ou le tableur). Nous constatons que cet écart diminue rapidement, et qu'avec $S_4(1)$ il n'est plus que de 0,000002731 environ. L'approximation de sin(1) donnée par cette expression rationnelle $S_4(1)=\frac{4241}{5040}$ est précise à 3 millionièmes près, alors qu'elle était précise à seulement 2 dix-millièmes près avec $S_3(1)$ et à près de 1 centième avec $S_2(1)$. Il semblerait donc que l'on gagne approximativement 2 chiffres de précision à chaque nouvelle valeur de n dans $S_n(1)$.

x rad	sin x	S1	S2	S3	S4	S5	sin x – S1	sin x – S2	sin x – S3	sin x – S4	sin x – S5
1,00000	0,841470984807896	1,000000000	0,833333333	0,841666667	0,841468254	0,841471010	-0,158529015	0,008137651	-0,000195682	0,000002731	-0,000000025

Pour information, cette formule est valable pour toutes les valeurs de x, mais elle ne donne pas une précision équivalente pour toutes les valeurs. Observez ce qui se passe pour x variant entre 1 et 2 rad :

x rad	sin x	S1	S2	S3	S4	S5	sin x – S1	sin x – S2	sin x – S3	sin x – S4	sin x – S5
1,00000	0,841470984807896	1,000000000	0,833333333	0,841666667	0,841468254	0,841471010	-0,158529015	0,008137651	-0,000195682	0,000002731	-0,000000025
1,10000	0,891207360061435	1,100000000	0,878166667	0,891587583	0,891200933	0,891207431	-0,208792640	0,013040693	-0,000380223	0,000006427	-0,000000071
1,20000	0,932039085967226	1,200000000	0,912000000	0,932736000	0,932025051	0,932039270	-0,267960914	0,020039086	-0,000696914	0,000014035	-0,000000184
1,30000	0,963558185417193	1,300000000	0,933833333	0,964774417	0,963529406	0,963558630	-0,336441815	0,029724852	-0,001216231	0,000028779	-0,000000444
1,40000	0,985449729988460	1,400000000	0,942666667	0,987485333	0,985393796	0,985450732	-0,414550270	0,042783063	-0,002035603	0,000055934	-0,000001002
1,50000	0,997494986604055	1,500000000	0,937500000	1,000781250	0,997391183	0,997497123	-0,502505013	0,059994987	-0,003286263	0,000103804	-0,000002136
1,60000	0,999573603041505	1,600000000	0,917333333	1,004714667	0,999388566	0,999577939	-0,600426397	0,082240270	-0,005141064	0,000185037	-0,000004336
1,70000	0,991664810452468	1,700000000	0,881166667	0,999488083	0,991346443	0,991673239	-0,708335190	0,110498144	-0,007823273	0,000318367	-0,000008429
1,80000	0,973847630878195	1,800000000	0,828000000	0,985464000	0,973316777	0,973863402	-0,826152369	0,145847631	-0,011616369	0,000530854	-0,000015771
1,90000	0,946300087687414	1,900000000	0,756833333	0,963174917	0,945439366	0,946328607	-0,953699912	0,189466754	-0,016874829	0,000860721	-0,000028519
2,00000	0,909297426825682	2,000000000	0,666666667	0,933333333	0,907936508	0,909347443	-1,090702573	0,242630760	-0,024035907	0,001360919	-0,000050016

Pour $x=2$ radians, l'écart entre sin(x) et $S_4(x)$ est de 0,001360919 environ, soit environ 500 fois plus que l'écart entre sin(1) et $S_4(1)$. La formule est la plus précise quand on se rapproche de 0 rad.

x rad	sin x	S1	S2	S3	S4	S5	sin x – S1	sin x – S2	sin x – S3	sin x – S4	sin x – S5
1,00000	0,841470984807896	1,000000000	0,833333333	0,841666667	0,841468254	0,841471010	-0,158529015	0,008137651	-0,000195682	0,000002731	-0,000000025
0,90000	0,783326909627483	0,900000000	0,778500000	0,783420750	0,783325850	0,783326917	-0,116673090	0,004826910	-0,000093840	0,000001060	-0,000000008
0,80000	0,717356090899523	0,800000000	0,714666667	0,717397333	0,717355723	0,717356093	-0,082643909	0,002689424	-0,000041242	0,000000368	-0,000000002
0,70000	0,644217687237691	0,700000000	0,642833333	0,644233917	0,644217577	0,644217688	-0,055782313	0,001384354	-0,000016229	0,000000111	0,000000000
0,60000	0,564642473395035	0,600000000	0,564000000	0,564648000	0,564642446	0,564642473	-0,035357527	0,000642473	-0,000005527	0,000000028	0,000000000
0,50000	0,479425538604203	0,500000000	0,479166667	0,479427083	0,479425533	0,479425539	-0,020574461	0,000258872	-0,000001545	0,000000005	0,000000000
0,40000	0,389418342308650	0,400000000	0,389333333	0,389418667	0,389418342	0,389418342	-0,010581658	0,000085009	-0,000000324	0,000000001	0,000000000
0,30000	0,295520206661340	0,300000000	0,295500000	0,295520250	0,295520207	0,295520207	-0,004479793	0,000020207	-0,000000043	0,000000000	0,000000000
0,20000	0,198669330795061	0,200000000	0,198666667	0,198669333	0,198669331	0,198669331	-0,001330669	0,000002664	-0,000000003	0,000000000	0,000000000
0,10000	0,099833416646828	0,100000000	0,099833333	0,099833417	0,099833417	0,099833417	-0,000166583	0,000000083	0,000000000	0,000000000	0,000000000
0,00000	0,000000000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000	0,000000000

Si on veut se servir de cette formule pour programmer une calculatrice (comment croyez-vous qu'une calculatrice donne les valeurs de cos x, sin x, etc.?), il faudra se servir des arcs associés afin de ramener l'évaluation du sinus de 2 rad à un sinus plus facile à calculer précisément ou à un cosinus. Par exemple, on peut utiliser $\sin(2)=\cos(\frac{\pi}{2}-2)$ et la formule du cosinus :

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\times3\times2}-\frac{x^6}{6\times5\times4\times3\times2}+\ldots+\frac{(-1)^n\times x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\,.$$

c) Écrire un algorithme qui calcule $S_n(1)$ jusqu'à ce que $|\sin(1)-S_n(1)|< 10^{-9}$ et qui affiche le n trouvé.
L'algorithme doit évaluer à chaque nouvelle itération, un nouveau terme de la somme. Remarquons que $S_1(1)=1$, $S_2(1)=S_1(1)-\frac{1}{3!}$, $S_3(1)=S_2(1)+\frac{1}{5!}$, $S_4(1)=S_3(1)-\frac{1}{7!}$, $S_5(1)=S_4(1)+\frac{1}{9!}$, etc.
Pour calculer les factorielles, si on ne dispose pas de la fonction factorielle, il faut les calculer de proche en proche, juste avant le calcul du nouveau terme de la somme. Si on part de 1!=1, on a 3!=3×2×1 !, 5! =5×4×3 !, 7!=7×6×5 !, 9!=9×8×7 !, etc. Voici donc l'algorithme que nous proposons :

- x=1
- f=1 (c'est la factorielle de 1)
- s=1 (c'est la somme des termes)
- n=1 (c'est le rang auquel on a calculé la somme)
- tant que $|\sin(1)-s|> 10^{-9}$:
  - $n=n+1$
  - $f=f\times(2n\text{-}1)\times(2n\text{-}2)\times(\text{-}1)$
  - $s=s+1/f$
- afficher n
- afficher s

Le calcul de la factorielle f mérite qu'on l'explique davantage : la 1^ère^ fois qu'on entre dans la boucle, on a n=1+1=2 et on doit multiplier f par 3 et par 2, donc par $(2\times2-1)\times(2\times2-2)$. Au passage, on change le signe du terme en multipliant par -1 car il faut alternativement ajouter ou soustraire ce terme. Au 2^ème^ passage dans la boucle, on a n=2+1=3 et on doit multiplier f par 5 et par 4, donc par $(2\times3-1)\times(2\times3-2)$. Au passage, on rechange le signe du terme en multipliant par -1. Ainsi de suite, on minimise ainsi les calculs ce qui optimise le temps de réponse de la calculatrice.
Passons à la programmation de cela : nous allons utiliser Python pour commencer.

```
from math import sin
x,f,n,s=1,1,1,1
while abs(sin(1)-s)>10**(-9):
    n+=1
    f*=(2*n-1)*(2*n-2)*(-1)
    s+=1/f
print('au bout de n={} termes, on trouve sin({})={}'.format(n,x,s))
```

```
>>>
au bout de n=6 termes, on trouve sn(1)=0.841470984648068
```

Notez que l'on peut initialiser plusieurs variables sur la même ligne :
x,f,n,s=1,1,1,1 initialise les 4 variables entières x, f, n et s à 1. La variable s devrait être initialisée à part car c'est rapidement un nombre flottant (ce n'est plus un entier) ; mais cette subtilité n'est pas nécessaire en Python car si on initialise s à 1 (un entier) dès qu'on va lui ajouter un flottant, cette variable va devenir un flottant. On a aussi f qui est entier mais $1/f$ est flottant. Ces conversions de type ne posent généralement pas de problème en Python.
Notez également l'abréviation courante en programmation n+=1 signifie $s=s+1$, $f\times=(2n-1)\times(2n-2)\times(-1)$ signifie $f=f\times(2n-1)\times(2n-2)\times(-1)$, etc.
On rappelle que les multiplications doivent être notées * (ce n'est pas exactement la même étoile ; ce caractère est la multiplication du clavier numérique) et l'exponentiation (l'élévation à la puissance) est notée **. Pour l'instruction d'affichage, nous avons utilisé une des multiples possibilités qui permet d'écrire l'affichage d'un texte entre guillemets " " dans lequel les variables sont remplacées par {} et on indique quelles variables insérer par l'extension .format(variable1,variable2, etc.). On peut aussi écrire simplement *print*(*n,x,s*) pour avoir l'affichage des trois variables. On peut aussi ajouter des chaînes de texte, par exemple en tapant : *print*(« au bout de », *n*, « termes on trouve que sin(», *x*, «)= », *s*).
Une dernière chose : en Python, les fonctions mathématiques principales (*sin*, *cos*, *sqrt*, etc.) doivent être importées pour être utilisées ; cela explique la présence de cette ligne : *from math import sin*. Dans cette instruction, *math* est le module dans lequel se situe la fonction *sin* que l'on utilise ensuite, en écrivant *sin*(1). La fonction *abs*() est présente de façon native sans besoin de l'importer. Avec la Numworks, l'importation du module *math* en entier se fait par défaut avec l'instruction *from math import* * qui est ajoutée à chaque nouveau programme.
Pour ceux qui utilisent une calculatrice Casio ou TI, il faut programmer cet algorithme en respectant la syntaxe *Basic* spécifique à la calculatrice utilisée. Cela peut ressembler à quelque chose comme ça :

1→x	while abs(sin(1)-s)>10^(-9)	La fin en Casio : whileEnd	La fin en TI : End
1→f	n+1→n	n◢	disp(n)
1→n	f×(2n-1)×(2n-2)×(-1)→f	s◢	disp(s)
1→s	s+1/f→s		

Dans tous les cas, on doit trouver le même résultat :

```
from math import sin
x=float(input('nombre dont on veut le sinus = '))
f,n,s=1,1,x
while abs(sin(x)-s)>10**(-9):
    n+=1
    f*=(2*n-1)*(2*n-2)*(-1)
    s+=x**(2*n-1)/f
print('au bout de n={} termes, on trouve sin({})={}'.format(n,x,s))
```

```
>>>
nombre dont on veut le sinus = 6.28
au bout de n=15 termes, on trouve sin(6.28)=-0.00318530115378269
```

au bout de n=6 termes, on trouve la valeur approchée de *sin*(1) par s=0.841470984648068 qui ne s'éloigne de *sin*(1) que d'un écart inférieur à 0,000000001 (1 milliardième ou 10^{-9}), en plus ou en moins. Mais ce que nous disions plus haut peut être mesuré ici : pour s'approcher de *sin*(2) à moins de 10^{-9} , il ne faut pas 6 étapes, mais 8. Si on veut calculer *sin*(5) avec la même précision, il faut déjà 13 termes, et pour *sin*(6,28) qui est presque *sin*(2π), il faut 15 termes.
Le programme doit être légèrement modifié pour effectuer cela : on demande d'entrer la valeur de x comme un flottant (pour s'autoriser les valeurs non entières), on initialise s à x (et non à 1), on évalue la différence entre *sin*(x) et s (et non *sin*(1) et s), on ajoute x^{2n-1} au numérateur de la fraction qui est ajoutée à s (au lieu de 1 à chaque fois qui vient du fait que $1^{2n-1}=1$).

2) Trigonométrie et équations

a) Utilisation des formules de duplication* : Voici les formules en question, valables pour tout réel x : $\sin 2x=2\sin x\cos x$ et $\cos 2x=1-2(\sin x)^2=(\cos x)^2-(\sin x)^2=2(\cos x)^2-1$. Exprimer, en transformant ces identités, $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$ en fonction de $\cos 2x$. Montrer comment, à l'aide de ces formules, on peut calculer, par exemple, $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$. La calculatrice donne aussi une valeur exacte de ces nombres : calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$ avec la calculatrice et vérifier que les valeurs données correspondent aux vôtres.

$2(\cos x)^2-1=\cos 2x$ et donc $(\cos x)^2=\frac{1+\cos 2x}{2}$ et $(\sin x)^2=1-(\cos x)^2=1-\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}$.

Pour un angle x de l'intervalle [$\frac{-\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$], $\cos x \geq 0$ et donc on peut écrire $\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$.

Pour un angle x de l'intervalle [0 ; π], $\sin x \geq 0$ et donc on peut écrire $\sin x=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$.

$$(\cos\frac{\pi}{8})^2=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ et } (\sin\frac{\pi}{8})^2=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Comme $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, son *cos* et son *sin* sont positifs tous les deux, on a donc :

$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

De la même façon, on a $\sin(\frac{\pi}{12})=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\approx 0{,}258819$.

Vérifions sur la calculatrice Numworks : $\cos(\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, cette valeur est bien égale à $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.

Par contre, elle donne $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ce qui correspond moins évidemment à $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

Élevons l'expression donnée par la Numworks au carré :

$\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2-2\sqrt{2}\sqrt{6}}{16}=\frac{8-2\sqrt{12}}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$, l'identité apparaît alors bien.

b) Résolutions d'équations : D'autres identités existent, comme $\sin 3x=3\sin x-4(\sin x)^3$ ou $\cos 3x=4(\cos x)^3-3\cos x$, ou encore $\sin 5x=16(\sin x)^5-20(\sin x)^3+5\sin x$. En prenant $x=\frac{\pi}{5}$, montrer que $X=\sin(\frac{\pi}{5})$ vérifie l'équation du 5ème degré en X : $16X^5-20X^3+5X=0$ qui se simplifie heureusement en $16Y^2-20Y+5=0$ lorsqu'on a posé $Y=X^2$ et que $X\neq 0$. Montrer qu'alors on trouve que $Y=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ et donc que $X=\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$. Expliquer pourquoi il faut pour $\sin(\frac{\pi}{5})$ retenir une de ces valeurs et rejeter l'autre, et laquelle. Vérifier avec la calculatrice.

En prenant $x=\frac{\pi}{5}$ dans la dernière égalité on obtient $\sin\pi=16(\sin\frac{\pi}{5})^5-20(\sin\frac{\pi}{5})^3+5\sin\frac{\pi}{5}$, or $\sin\pi=0$.

Le nombre $X=\sin(\frac{\pi}{5})$ vérifie donc bien l'équation du 5ème degré en X : $16X^5-20X^3+5X=0$ qui se simplifie d'abord par $X\neq 0$ ($X=\sin(\frac{\pi}{5})$ ne peut pas être égal à 0 car $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ et donc, comme la fonction sinus est croissante sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$], $\sin(0)<\sin(\frac{\pi}{5})<\sin(\frac{\pi}{2})\Leftrightarrow 0<\sin(\frac{\pi}{5})<1$).

On en déduit que $X=\sin(\frac{\pi}{5})$ vérifie $16X^4-20X^2+5=0$.

En posant $Y=X^2$, cette équation s'écrit $16Y^2-20Y+5=0$.

La résolution de cette équation se fait comme d'habitude :

$$(4Y)^2-2\times 4Y\times\frac{5}{2}+5=(4Y-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+5=(4Y-\frac{5}{2})^2-\frac{5}{4}=(4Y-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})(4Y-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}).$$

Par conséquent les solution de l'équation en Y vérifient $4Y-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=0$ ou $4Y-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=0$ et donc on doit avoir $Y=\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ ou $Y=\frac{5}{8}-\frac{\sqrt{5}}{8}=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$.

Pour trouver $X=\sin(\frac{\pi}{5})$, il suffit alors de prendre la racine carrée de Y, puisque la valeur trouvée est forcément positive (on a vu que, *sin* étant croissante, $0<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\sin(\frac{\pi}{5})<1$).

On trouve donc $X=\sqrt{Y}=\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$.

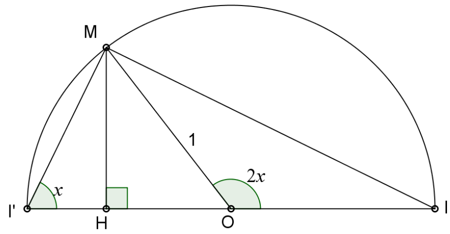
De ces deux valeurs, une doit être rejetée. On sait que $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$ et comme *sin* est croissante sur [0; $\frac{\pi}{2}$], on en déduit que $\sin\frac{\pi}{6}<\sin\frac{\pi}{5}<\sin\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}<\sin\frac{\pi}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou encore $0{,}5<\sin\frac{\pi}{5}<0{,}707$. On a $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\approx 0{,}951$ alors que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\approx 0{,}588$, donc la bonne valeur est $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\approx 0{,}588$.

Vérifions sur la calculatrice Numworks : $\sin(\frac{\pi}{5})=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}\approx 0{,}587785252$.

Il s'agit donc bien de la même valeur car $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$.

*Preuve en deux étapes de la formule de duplication du sinus $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$:

a) Démonstration sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$: Soit *x* un réel de $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ et soit *M* le point du cercle trigonométrique associé à l'angle 2 *x rad*. On note *H* le projeté orthogonal de *M* sur le diamètre [*II'*] (voir figure). En appliquant le théorème de l'angle au centre, montrer que $\widehat{II'M}=x$, puis en déduire que *MI*=2 sin *x*. Exprimer de même *MI'* en fonction de *x,* puis montrer que *MH*=sin 2 *x*. En calculant de deux manières l'aire du triangle *IMI'*, montrer alors que $\sin 2x=2\sin x\cos x$.



I', I et *M* étant trois points d'un même cercle de centre *O*, l'angle inscrit $\widehat{II'M}$ interceptant le même arc que l'angle au centre $\widehat{IOM}$, on a $2\times\widehat{II'M}=\widehat{IOM}=2x$ (le théorème de l'angle au centre permet d'affirmer que l'angle inscrit interceptant le même arc que l'angle au centre a une mesure égale à la moitié de ce dernier).

On peut aussi se passer de ce théorème ici :

MOI' étant un triangle isocèle en *O* (car *M* et *I'* sont sur un même cercle de centre O) et l'angle $\widehat{MOI'}$ étant le supplémentaire de $\widehat{IOM}=2x$ (car *I, O* et *I'* sont alignés) on en déduit d'abord $\widehat{MOI'}=\pi-2x$ et ensuite $\widehat{OMI'}=\widehat{MI'O}=\frac{\pi-(\pi-2x)}{2}=\frac{2x}{2}=x$ (car la somme des angles d'un triangle fait π *rad*).

Le triangle *IMI'* étant rectangle en *M* (car c'est un triangle dont un des côtés est le diamètre [*II'*] du cercle), on peut calculer le sinus de l'angle $\widehat{II'M}=x$ qui est égal à $\sin x=\frac{MI}{II'}=\frac{MI}{2}$ (le cercle a pour rayon *OI*=1, donc pour diamètre *II'*=2), d'où $MI=2\sin x$.

De même, $\cos\widehat{II'M}=\cos x=\frac{MI'}{II'}=\frac{MI'}{2}$, d'où $MI'=2\cos x$.

Dans le triangle *MOH*, rectangle en *H*, on a $\sin\widehat{MOH}=\sin(\pi-2x)=\frac{MH}{MO}=\frac{MH}{1}=MH$, or on sait que pour tout *x*, $\sin(\pi-2x)=\sin(2x)$, donc $MH=\sin(2x)$.

L'aire du triangle *IMI'* vaut $\frac{MH\times II'}{2}$ et aussi $\frac{MI\times MI'}{2}$, donc $\frac{\sin(2x)\times 2}{2}=\frac{2\sin(x)\times 2\cos(x)}{2}$ et finalement on a bien $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.

b) Généralisation à $\mathbb{R}$: Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin 2x-2\sin x\cos x$. Montrer que *f* est impaire et périodique de période π . Déduire des résultats précédents que $f(x)=0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

La fonction *f* est périodique de période π car on a :

$f(x+\pi)=\sin 2(x+\pi)-2\sin(x+\pi)\cos(x+\pi)=\sin(2x+2\pi)-2(-\sin x)(-\cos x)=\sin 2x-2\sin x\cos x$.

La fonction *f* est impaire car on a :

$f(-x)=\sin 2(-x)-2\sin(-x)\cos(-x)=-\sin 2x-2(-\sin x)(\cos x)=-\sin 2x+2\sin x\cos x=-f(x)$.

On vient de montrer que, puisque $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ pour tout angle $x\leq\frac{\pi}{2}$ (car $\widehat{IOM}=2x$ peut augmenter jusqu'à devenir un angle plat, soit $2x\leq\pi\Leftrightarrow x\leq\frac{\pi}{2}$), on a $f(x)=0, \forall x\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

Comme *f* est impaire, par symétrie par rapport à l'origine, on aura $f(x)=0, \forall x \in [\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

La fonction *f* est donc nulle sur un intervalle d'amplitude π. La périodicité permet alors d'étendre cette valeur nulle constante sur tout l'ensemble des réels : on a $f(x+k\pi)=0, \forall x \in [\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \forall k \in \mathbb{Z}$,

c'est-à-dire $f(x)=f(x+\pi)=f(x+2\pi)= \dots =f(x-\pi)=f(x-2\pi)= \dots =0, \forall x \in [\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

La fonction *f* est donc nulle sur $\dots \cup [\frac{-3\pi}{2};\frac{-\pi}{2}] \cup [\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}] \cup \dots$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}$,

autrement dit $\sin 2x - 2\sin x \cos x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ou encore $\sin 2x = 2\sin x \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$