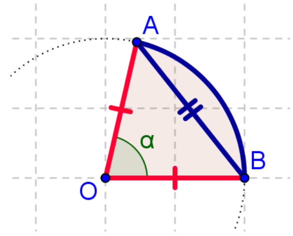
2de **DM n°7 : Trigonométrie**

à faire à deux ; essayer de respecter le délai (15 jours)

1) Trigonométrie et algorithmes

Équation n°1 : A et B étant deux points d'un cercle de centre O, on veut déterminer l'angle géométrique $\widehat{AOB}=\alpha$ pour lequel les longueurs $l_1=AO+OB$ et $l_2=\overset{\frown}{AB}+AB$ sont égales.



a) Montrer que $\frac{\alpha}{2}$ (en radians) est solution de l'équation $\sin x=1-x$.
b) Expliquer pourquoi ce nombre ne peut être déterminé par la méthode élémentaire vue en cours. Utiliser une méthode algorithmique pour déterminer une valeur approchée à 10^{-5} près de α.
c) Convertir la valeur de α trouvée en degrés (°), minutes (') et secondes ('') d'arc sachant que 3600''=60'=1°.

Équation n°2 : Harry joue en classe avec sa calculatrice. Il s'aperçoit qu'en tapant cos(1) et puis ensuite cos(*Ans*) (*Ans* est une fonction de la calculatrice qui rappelle le résultat précédent), puis à nouveau et encore cos(*Ans*), cos(*Ans*), cos(*Ans*), etc. il finit par obtenir une valeur qui ne change plus. Sally sa voisine lui fait remarquer que cela revient à faire cos(cos(cos(...(cos(cos(1)))...))) jusqu'à obtenir les 9 premières décimales d'un nombre β.
a) Quelle valeur de β (à 10^{-9} près) obtient-on en appliquant l'algorithme de Harry ?
Combien de fois faut-il réitérer la fonction cos pour arriver à ce résultat ?
b) Si on recommence en partant de 0 (au lieu de 1) quel résultat obtient-on ?
Choisir un autre point de départ et tester à nouveau l'algorithme. Conclure par une conjecture.
c) Expliquer pourquoi, le nombre β doit être solution de l'équation $\cos x=x$, puis tracer précisément la courbe de la fonction cosinus pour $0\leq x\leq \frac{\pi}{2}$ et montrer comment on retrouve β sur ce graphique.

Calcul de sin(x) : Lorsque x est un angle en radian, on a $\sin x=x-\frac{x^3}{3\times 2}+\frac{x^5}{5\times 4\times 3\times 2}-\frac{x^7}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}+etc.$ (P)
On va calculer une valeur approchée de sin(1), la solution de l'équation $\sin^{-1}(x)=1$, à l'aide de (P).
a) Simplifier les expressions $S_2(1)=1-\frac{1}{3\times 2}$, $S_3(1)=S_2(1)+\frac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$ et $S_4(1)=S_3(1)-\frac{1}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}$.
b) Calculer les écarts qu'il y a, à 10^{-9} près, entre sin(1) et $S_1(1)=1$, $S_2(1)$, $S_3(1)$ et $S_4(1)$.
c) Écrire un algorithme qui calcule $S_n(1)$ jusqu'à ce que $|\sin(1)-S_n(1)|< 10^{-9}$ et qui affiche le n trouvé.

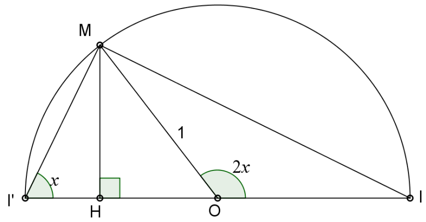
2) Trigonométrie et équations

a) Utilisation des formules de duplication* : Voici les formules en question, valables pour tout réel x : $\sin 2x=2\sin x\cos x$ et $\cos 2x=1-2(\sin x)^2=(\cos x)^2-(\sin x)^2=2(\cos x)^2-1$. Exprimer, en transformant ces identités, $(\cos x)^2$ et $(\sin x)^2$ en fonction de $\cos 2x$. Montrer comment, à l'aide de ces formules, on peut calculer, par exemple, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. La calculatrice donne aussi une valeur exacte de ces nombres : calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ avec la calculatrice et vérifier que les valeurs données correspondent aux vôtres.

b) Résolutions d'équations : D'autres identités existent, comme $\sin 3x=3\sin x-4(\sin x)^3$ ou $\cos 3x=4(\cos x)^3-3\cos x$, ou encore $\sin 5x=16(\sin x)^5-20(\sin x)^3+5\sin x$. En prenant $x=\frac{\pi}{5}$, montrer que $X=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ vérifie l'équation du 5ème degré en X : $16X^5-20X^3+5X=0$ qui se simplifie heureusement en $16Y^2-20Y+5=0$ lorsqu'on a posé $Y=X^2$ et que $X\neq 0$. Montrer qu'alors on trouve que $Y=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ et donc que $X=\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$. Expliquer pourquoi il faut pour $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ retenir une de ces valeurs et rejeter l'autre, et laquelle. Vérifier avec la calculatrice.

*Preuve en deux étapes de la formule de duplication du sinus $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$:

a) Démonstration sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$: Soit x un réel de $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et soit M le point du cercle trigonométrique associé à l'angle $2x$ *rad*. On note H le projeté orthogonal de M sur le diamètre $[II']$ (voir figure). En appliquant le théorème de l'angle au centre, montrer que $\widehat{II'M}=x$, puis en déduire que $MI=2\sin x$. Exprimer de même MI' en fonction de x, puis montrer que $MH=\sin 2x$. En calculant de deux manières l'aire du triangle IMI', montrer alors que $\sin 2x=2\sin x\cos x$.



b) Généralisation à $\mathbb{R}$: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin 2x-2\sin x\cos x$. Montrer que f est impaire et périodique de période π. Déduire des résultats précédents que $f(x)=0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.