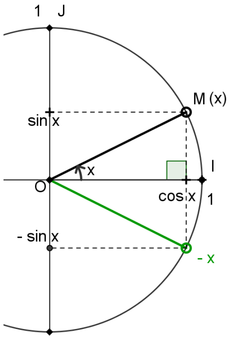
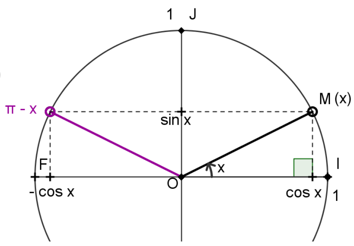
TD n°4 de trigonométrie : équations

CORRECTION

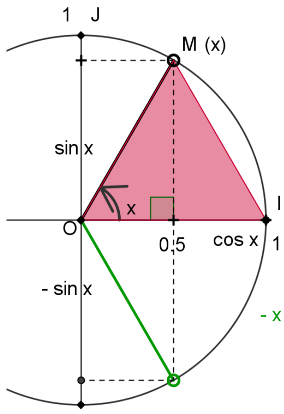
1) Équations trigonométriques





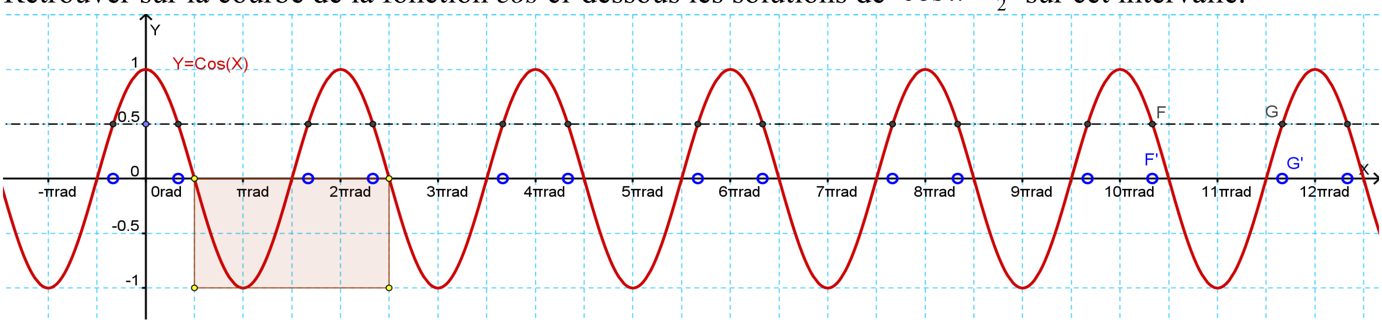
a) Partie théorique : Les *équations trigonométriques élémentaires* se ramènent à $\cos x = \cos \alpha$ ou $\sin x = \sin \alpha$, α étant un réel fixé.
L'équation $\cos x = \cos \alpha$ a pour solutions réelles $x = \pm\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
L'équation $\sin x = \sin \alpha$ a pour solutions $x = \alpha + 2k\pi$ et $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Illustrer chacune de ces deux situations sur le cercle trigonométrique ci-contre.

À gauche, on a mis les deux angles qui ont un même cosinus : ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Leurs valeurs principales sont donc opposées. On obtient toutes les valeurs possibles en ajoutant ou retranchant un nombre entier de fois 2π, d'où la formule $k \in \mathbb{Z}, x = \pm\alpha + 2k\pi$.
À droite, on a mis les deux angles qui on un même sinus : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, donc supplémentaires. Leurs valeurs principales sont donc égales à x et $\pi - x$. On obtient toutes les valeurs possibles en ajoutant ou retranchant un nombre entier de fois 2π, d'où la formule $k \in \mathbb{Z}, x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.



b) Première équation : $\cos x = \frac{1}{2}$
Écrire l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ sous la forme $\cos x = \cos \alpha$ où α est un angle de $[0 ; \pi]$ à déterminer.
On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (angle d'un triangle équilatéral),
donc l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ s'écrit $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Déterminer ensuite l'expression générale des solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$, On en déduit que $k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pm\pi}{3} + 2k\pi$.
puis donner celles qui sont dans l'intervalle $[0 ; 12\pi]$.
Dans cet intervalle, les valeurs qui conviennent sont :
$\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{19\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{25\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{31\pi}{3}$, et
$\frac{-\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{17\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 8\pi = \frac{23\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 10\pi = \frac{29\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3} + 12\pi = \frac{35\pi}{3}$.
Mettons ces douze valeurs dans l'ordre :
$\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{17\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{3}$; $\frac{23\pi}{3}$; $\frac{25\pi}{3}$; $\frac{29\pi}{3}$; $\frac{31\pi}{3}$; $\frac{35\pi}{3}$.

Retrouver sur la courbe de la fonction *cos* ci-dessous les solutions de $\cos x = \frac{1}{2}$ sur cet intervalle.



Sur la courbe ci-dessous nous avons mis les douze valeurs trouvées dans l'intervalle, ainsi qu'une supplémentaire avant ($\frac{-\pi}{3}$ <0) et une après ($\frac{37\pi}{3} > 12\pi$).

c) Deuxième équation $\sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
Écrire l'équation $\sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ sous la forme $\sin(2x) = \sin \alpha$ où α est un angle de $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ à déterminer.
On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (angle d'un triangle équilatéral) et donc que $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.
L'équation $\sin X = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ s'écrit $\sin X = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$, ici on a $\sin(2x) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$.
Le cercle trigonométrique précédent nous montre cet angle de $\frac{-\pi}{3}$ en vert.
Déterminer ensuite l'expression générale de 2*x* (indication dans la partie théorique), puis diviser par 2 pour

obtenir l'expression générale des solutions de $\sin(2x)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (diviser aussi le modulo 2π).

On en déduit que $k\in\mathbb{Z}, 2x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=\pi-(\frac{-\pi}{3})+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ et, en divisant par 2 et en simplifiant, on obtient $k\in\mathbb{Z}, x=\frac{-\pi}{6}+k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$.

Donner enfin les solutions qui sont dans l'intervalle [-2π ; 2π].

Dans cet intervalle, les valeurs qui conviennent sont :

$\frac{-\pi}{6}-\pi=\frac{-7\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6}$, et

$\frac{2\pi}{3}-2\pi=\frac{-4\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}-\pi=\frac{-\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{5\pi}{3}$.

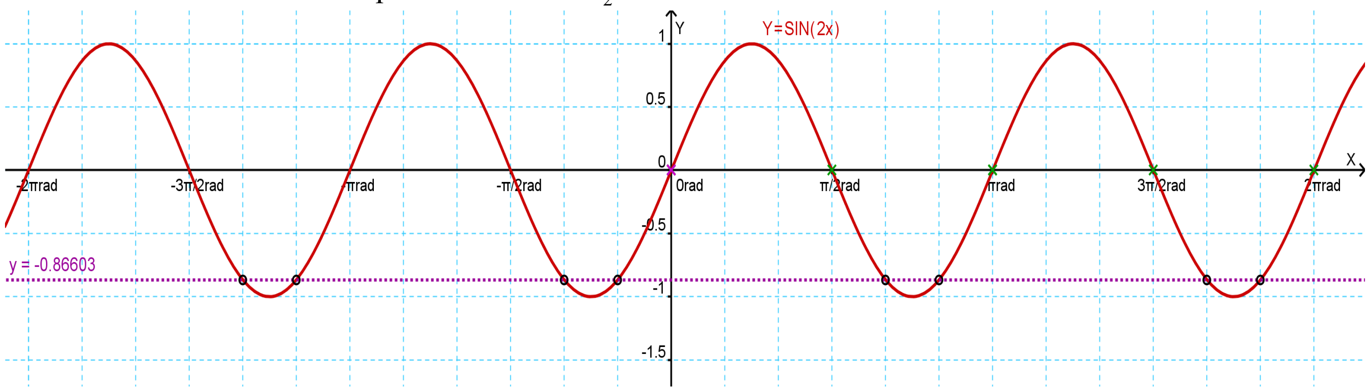
Mettons ces huit valeurs dans l'ordre :

$\frac{-4\pi}{3}$; $\frac{-7\pi}{6}$; $\frac{-\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{6}$.

La courbe ci-dessous représente la fonction $f: x\mapsto \sin 2x$ sur l'intervalle [-2π ; 2π].

On voit mieux les valeurs des solutions lorsque la grille est découpée en multiples de $\frac{\pi}{6}$

Retrouver les solutions de l'équation $\sin 2x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ sur cette courbe.



d) <u>Troisième équation</u> : $\sin 3x=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$

Déterminer, les solutions de l'équation $\sin 3x=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$

(remplacer, par exemple, le sinus à l'aide de la propriété $\sin X=\cos(\frac{\pi}{2}-X)$, valable $\forall X\in\mathbb{R}$).

Remplaçons le sinus par un cosinus comme indiqué, l'équation devient $\sin 3x=\cos(\frac{\pi}{2}-3x)=\cos(\frac{\pi}{4}-x)$.

Déduisons-en que, selon l'équation élémentaire, $\frac{\pi}{2}-3x=\pm(\frac{\pi}{4}-x)+2k\pi$.

Cela conduit à, d'une part $\frac{\pi}{2}-3x=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$, soit $-2x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$. En divisant par -2 on trouve $x=\frac{\pi}{8}+(-k)\pi$ et en posant $k'=-k$, $x=\frac{\pi}{8}+k'\pi$. Comme k et k' sont des entiers indéterminés, on peut aussi bien noter cela $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$.

D'autre part, on peut avoir $\frac{\pi}{2}-3x=-(\frac{\pi}{4}-x)+2k\pi$ et donc $-4x=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi$. En divisant par -4 et en simplifiant, on trouve $x=\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$ (comme précédemment on a changé $-k$ en k', puis k' en k).

Il y a donc deux familles de solutions : les unes se suivent tous les π , les autres tous les $\frac{\pi}{2}$.

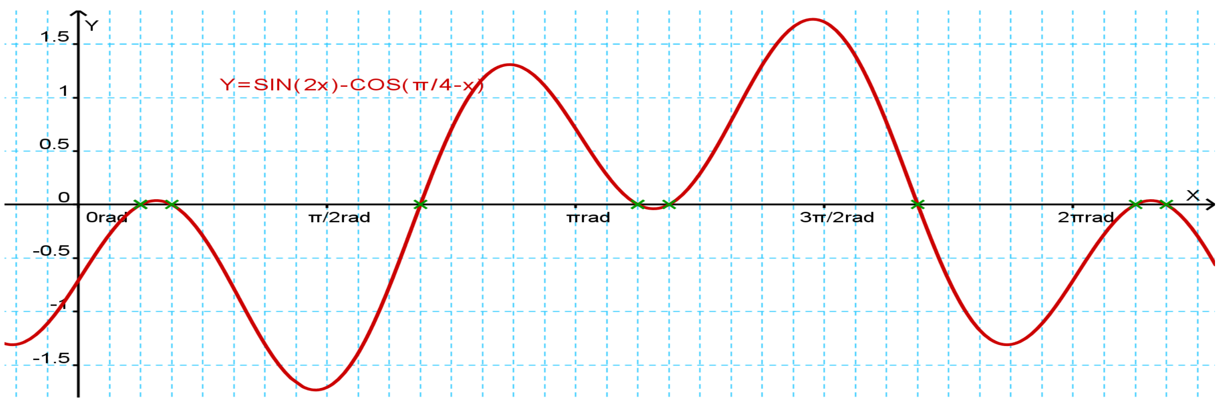
D'une part, il y a $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}+2\pi=\frac{17\pi}{8}$; etc. ,

et d'autre part, il y a $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}+\frac{2\pi}{2}=\frac{19\pi}{16}$; $\frac{27\pi}{16}$; $\frac{35\pi}{16}$; etc.

Mettons ces valeurs dans l'ordre :

$\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{11\pi}{16}$; $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{19\pi}{16}$; $\frac{27\pi}{16}$; $\frac{17\pi}{8}$; $\frac{35\pi}{16}$; etc.

Déterminer les solutions de cette équation dans l'intervalle] 0 ; 2π].



Les deux dernières solutions sont en dehors de cet intervalle.
Voyons ce que cela donne sur une représentation graphique : nous avons choisi de tracer la courbe d'équation $y=\sin 3x-\cos(\frac{\pi}{4}-x)$, les solutions apparaissent alors comme les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. Pour plus de lisibilité, nous avons gradué l'axe des abscisses en seizièmes de π.

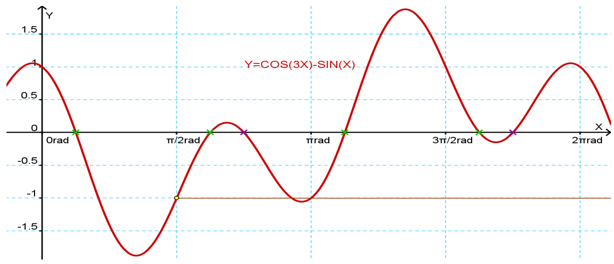
e) <u>D'autres équations</u>

- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x=\sin(\frac{\pi}{5})$;

Remplaçons le sinus par un cosinus, l'équation devient $\cos x=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})$. Déduisons-en que, selon l'équation élémentaire, $x=\pm(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})+2k\pi=\pm(\frac{3\pi}{10})+2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $x=\frac{3\pi}{10}+2k\pi$, et d'autre part $x=\frac{-3\pi}{10}+2k\pi$. Nous avons donc d'une part $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+2\pi=\frac{23\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+4\pi=\frac{43\pi}{10}$, etc. et d'autre part $\frac{-3\pi}{10}$, $\frac{-3\pi}{10}+2\pi=\frac{17\pi}{10}$, $\frac{-3\pi}{10}+4\pi=\frac{37\pi}{10}$, etc. Il y a deux solutions par tour, entre 0 et 2π il n'y a que $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{17\pi}{10}$.

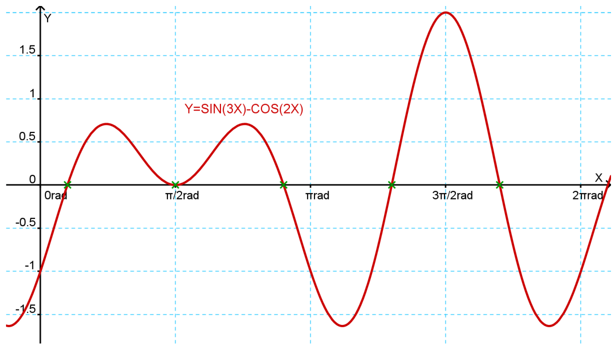
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos 3x=\sin x$

Remplaçons encore une fois le sinus par un cosinus, l'équation devient $\cos 3x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$. On a donc $3x=\pm(\frac{\pi}{2}-x)+2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, et d'autre part $2x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$. Nous avons donc d'une part $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$, et d'autre part $x=\frac{-\pi}{4}+k\pi$.
Cela conduit à écrire les solutions $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}=\frac{13\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}+2\pi=\frac{17\pi}{8}$ etc. et d'autre part $\frac{-\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$, $\frac{-\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$, etc.
Il y a 4+2=6 solutions par tour, entre 0 et 2π il y a $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
Traçons la courbe de la fonction $h : x\mapsto \cos 3x-\sin x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$. Faisons figurer les solutions de l'équation sur cette courbe (en vert les quatre premières et en violet les deux dernières).



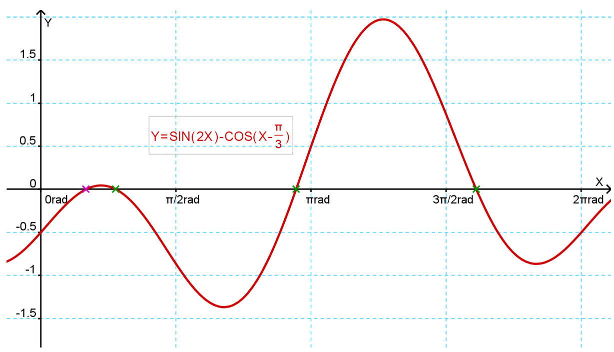
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin 3x=\cos 2x$

Suivant le même principe, l'équation devient $\cos(\frac{\pi}{2}-3x)=\cos 2x$. On a donc $\frac{\pi}{2}-3x=\pm 2x+2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $-5x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$, et d'autre part $-x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$. Nous avons donc d'une part $x=\frac{\pi}{10}-2k\frac{\pi}{5}$, et d'autre part $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Remarquons que $x=\frac{\pi}{10}-2k\frac{\pi}{5}$ ou $x=\frac{\pi}{10}+2k'\frac{\pi}{5}$ revient au même, puisque k ou $k'=-k$ sont des entiers relatifs. Cela conduit à écrire les solutions $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10}+2\frac{\pi}{5}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{10}+4\frac{\pi}{5}=\frac{9\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10}+6\frac{\pi}{5}=\frac{13\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10}+8\frac{\pi}{5}=\frac{17\pi}{10}$, etc. et d'autre part $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{5\pi}{2}$, etc. Ces valeurs données par la 2ème égalité sont redondantes (en double). Il n'y a donc que cinq solutions par tour (entre 0 et 2π) comme on peut le voir sur cet extrait de la courbe d'équation $y=\sin 3x-\cos 2x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.



- Résoudre dans $[0;2\pi[$: $\sin 2x=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

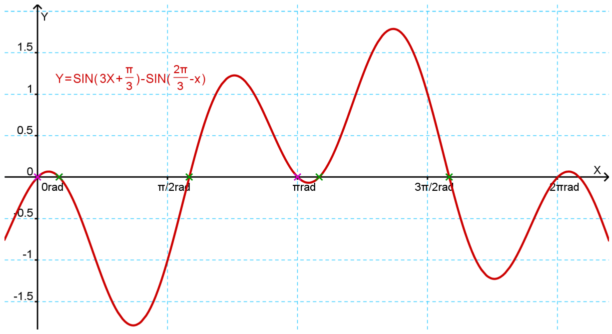
L'équation s'écrit $\cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$. On a donc $\frac{\pi}{2}-2x=\pm(x-\frac{\pi}{3})+2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $-3x=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{-5\pi}{6}+2k\pi$, et d'autre part $-x=\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{-\pi}{6}+2k\pi$. Nous avons donc d'une part $x=\frac{5\pi}{18}+2k'\frac{\pi}{3}$, et d'autre part $x=\frac{\pi}{6}+2k'\pi$. Comme expliqué plus haut, on a écrit dans ces deux égalités, directement $k'=-k$. Cela conduit à écrire les trois solutions entre 0 et 2π de la 1ère égalité : $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18}+2\frac{\pi}{3}=\frac{17\pi}{18}$ et $\frac{5\pi}{18}+4\frac{\pi}{3}=\frac{29\pi}{18}$, la seule solution donnée par la 2ème égalité est $\frac{\pi}{6}$, elle n'est pas redondante, il y a



donc quatre solutions par tour comme on peut le voir sur cet extrait de la courbe d'équation $y=\sin 2x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ sur l'intervalle [0; 2π] où la dernière solution est marquée en violet (c'est la plus petite de l'intervalle).

➢ Résoudre dans $[0;2\pi[$: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

Pour une fois, on va rester avec l'égalité des sinus. On a donc, soit $3x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-x+2k\pi$, soit $3x+\frac{\pi}{3}=\pi-\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+2k\pi$. Cela se transforme en, soit $4x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, soit $2x=0+2k\pi$. Cela conduit à, d'une part $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$, et d'autre part $x=k\pi$. Cela conduit à écrire les quatre solutions entre 0 et 2π de la 1ère égalité : $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12}+3\frac{\pi}{2}=\frac{19\pi}{12}$, les deux solutions données par la 2ème égalité sont 0 et π, il y a donc six solutions par tour comme on peut le voir sur cet extrait de la courbe d'équation $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$ sur l'intervalle [0; 2π].



➢ Résoudre dans $[0;2\pi[$: $\cos^2 x=\sin^2 2x$

On peut commencer par écrire $\cos^2 x-\sin^2 2x=(\cos x-\sin 2x)(\cos x+\sin 2x)=0$,
chacun des facteurs pouvant s'annuler, on a
soit $\cos x-\sin 2x=0$ c'est-à-dire $\cos x=\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$,
soit $\cos x+\sin 2x=0$ c'est-à-dire $\cos x=-\sin 2x=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$.
Remarquez l'utilisation dans cette dernière égalité de l'angle associé $\pi-x$ qui change le signe du cosinus.
On obtient donc les solutions en écrivant d'abord $x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2k\pi$ et $x=\pm\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+2k\pi$, puis $3x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $-x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ et $3x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$.
Finalement, on obtient $x=\frac{\pi}{6}+2k\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi$, $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ et $x=\frac{-\pi}{6}+2k'\frac{\pi}{3}$.
Combien de solutions sur l'intervalle [0; 2π]?
Faites les calculs et vérifiez sur la courbe qu'il y a les six nombres suivants : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{6}$, $7\frac{\pi}{6}$, $3\frac{\pi}{2}$ et $9\frac{\pi}{6}$.