

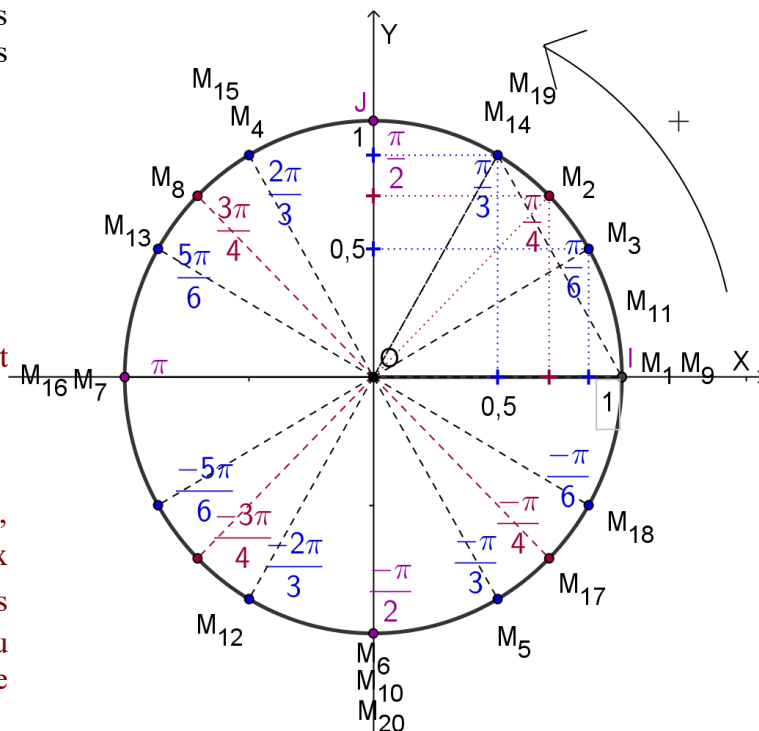
1) Position sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les vingt points M_1 à M_{20} , correspondants aux angles exprimés en radians suivants :

- $M_1(0)$; $M_2(\frac{\pi}{4})$; $M_3(\frac{\pi}{6})$; $M_4(\frac{2\pi}{3})$;
- $M_5(\frac{-\pi}{3})$; $M_6(\frac{-\pi}{2})$; $M_7(-\pi)$; $M_8(\frac{3\pi}{4})$;
- $M_9(12\pi)$; $M_{10}(\frac{7\pi}{2})$; $M_{11}(\frac{\pi}{12})$; $M_{12}(\frac{4\pi}{3})$;
- $M_{13}(\frac{-7\pi}{6})$; $M_{14}(\frac{13\pi}{3})$; $M_{15}(\frac{-4\pi}{3})$; $M_{16}(-21\pi)$;
- $M_{17}(\frac{-9\pi}{4})$; $M_{18}(\frac{23\pi}{6})$; $M_{19}(\frac{-17\pi}{3})$; $M_{20}(\frac{-121\pi}{2})$.

Certains points sont superposés, tels M_6 , M_{10} et M_{20} puisque, modulo 2π , on a $\frac{-\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} = \frac{-121\pi}{2}$.

Une égalité entre deux angles modulo 2π signifie que l'on peut ajouter un multiple de 2π à un des angles pour trouver l'autre. Par exemple, $\frac{-\pi}{2} + 2 \times 2\pi = \frac{-\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$. Il faut ajouter deux tours, soit 4π , à $\frac{-\pi}{2}$ pour trouver $\frac{7\pi}{2}$. Les angles égaux modulo 2π correspondent au même emplacement sur le cercle trigonométrique.



2) Mesure principale

La *mesure principale* d'un angle est celle de l'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ qui correspond à la même position sur le cercle trigonométrique.

Par exemple, un angle mesurant $\frac{5\pi}{2}$ rad, a une mesure principale de $\frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{5\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$; on vérifie que $\frac{\pi}{2}$ rad, appartient bien à $]-\pi ; \pi]$.

a) Déterminer la mesure principale des douze angles orientés exprimés en radians suivants, ainsi que le nombre de tours à ajouter à la mesure principale pour obtenir la mesure réelle :

Sur le cercle trigonométrique ci-dessus, nous avons indiqué les mesures principales des différents emplacements. Pour remplir la 1^{ère} ligne du tableau et pour le nombre de tours, il faut (re)faire le calcul. Par exemple, pour $\frac{9\pi}{2}$ on écrit $\frac{9\pi}{2} - \frac{8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. La mesure principale est donc $\frac{\pi}{2}$ et le nombre de tours est -2 car on a enlevé $\frac{8\pi}{2} = 4\pi = 2 \times 2\pi$

| | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|--------|---------|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------|-------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
| Mesure réelle | $-\pi$ | 12π | $\frac{9\pi}{2}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{-7\pi}{6}$ | $\frac{13\pi}{3}$ | $\frac{-4\pi}{3}$ | -21π | $\frac{-9\pi}{4}$ | $\frac{23\pi}{6}$ | $\frac{-17\pi}{3}$ | $\frac{-121\pi}{2}$ |
| Mesure principale | π | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{-2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | π | $\frac{-\pi}{4}$ | $\frac{-\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{-\pi}{2}$ |
| Nombre de tours à ajouter | -1 | 6 | 2 | 1 | -1 | 2 | -1 | -11 | -1 | 2 | -3 | -30 |

b) Déterminer l'angle appartenant à $]100\pi ; 102\pi]$ qui a pour mesure principale $\frac{-\pi}{2}$ rad.

Déterminer l'angle appartenant à $]100\pi ; 102\pi]$ qui a pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Pour trouver ces angles, il faut ajouter à 100π un angle positif ou retrancher à 102π un angle négatif.

Pour le 1^{er} de mesure principale négative $\frac{-\pi}{2}$ rad, on retranche $\frac{\pi}{2}$ à 102π , cela donne

$$102\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{204\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{203\pi}{2} = 101,5\pi .$$

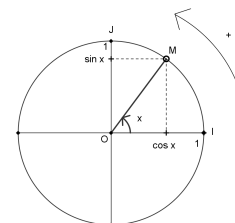
Si on avait ajouté 100π à $\frac{-\pi}{2}$, on aurait trouvé une mesure inférieure à 100π . Il aurait alors fallu ajouter encore 2π pour se retrouver dans l'intervalle voulu.

Pour le 2^d de mesure principale positive $\frac{2\pi}{3}$ rad, on ajoute $\frac{2\pi}{3}$ à 100π , cela donne

$$100\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{300\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{302\pi}{3} \approx 100,667\pi .$$

3) Lignes trigonométriques

M étant le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle réel x , on note $(\cos x ; \sin x)$ les coordonnées de M . Ceci définit les fonctions cos et sin sur \mathbb{R} .

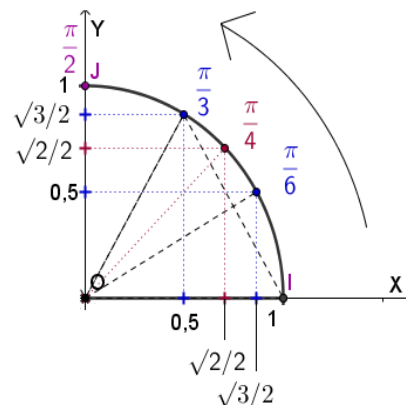


$\cos x$ et $\sin x$ sont aussi appelés *lignes trigonométriques* de l'angle réel x .

a) Retrouver les lignes trigonométriques exactes des angles suivants

(à partir de maintenant, sauf précision contraire, les angles sont exprimés en radians) :

| | | | | | |
|-------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| angle | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |



b) Déterminer les lignes trigonométriques exactes des angles suivants

| | | | | | | |
|-------|-----------------------|------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| angle | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
| cos | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| sin | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

c) Déterminer l'angle α de $]100\pi ; 102\pi]$ qui a pour lignes trigonométriques $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Il s'agit, sans tenir compte des signes, d'un des quatre angles $\frac{-\pi}{4}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{-3\pi}{4}$ rad, $\frac{3\pi}{4}$ rad,

mais en tenant compte que le sinus est négatif et le cosinus positif, il ne reste plus que $\frac{-\pi}{4}$ rad.

Maintenant, il faut prendre la valeur de cet angle dans l'intervalle considéré, donc enlever $\frac{\pi}{4}$ rad à 102π .

Cela donne $102\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{408\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{407\pi}{4}$.

Déterminer l'angle β de $]100\pi ; 102\pi]$ qui a pour lignes trigonométriques $\cos \beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \beta = \frac{1}{2}$.

Il s'agit, sans tenir compte des signes, d'un des quatre angles $\frac{-\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{-5\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{6}$ rad, mais en tenant compte que le sinus est positif et le cosinus négatif, il ne reste plus que $\frac{5\pi}{6}$ rad.

Maintenant, il faut prendre la valeur de cet angle dans l'intervalle considéré, donc ajouter $\frac{5\pi}{6}$ rad à 100π .

Cela donne $100\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{600\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{605\pi}{6}$.

d) Sachant que $\pi \leq x \leq 2\pi$ et que $\cos x = \frac{1}{3}$, en vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer la valeur exacte de $\sin x$ (utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), puis déterminer une valeur approchée de x .

$(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Si on voulait que $0 \leq x \leq \pi$, on aurait $\sin x \geq 0$, et donc on aurait

$\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mais comme on doit avoir $\pi \leq x \leq 2\pi$,

d'après le cercle trigonométrique, on aura $\sin x \leq 0$, et donc

$\sin x = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$.

La calculatrice donne, pour la fonction \cos^{-1} , un angle de l'intervalle $[0; \pi]$ (il faut le savoir, et on en reparlera, mais pour la fonction \sin^{-1} c'est différent : la calculatrice donne un angle dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, réfléchissez un peu et vous comprendrez pourquoi).

Donc ici, comme on veut que $x \in [\pi; 2\pi]$, on doit prendre l'opposé de la valeur donnée (elle a même cosinus et son sinus est opposé) et ajouter un multiple de 2π pour revenir dans l'intervalle qui nous concerne.

La calculatrice (en mode radian !) donne : $\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 1,230959417$ rad.

C'est l'angle correspondant à l'angle \widehat{IOW} , en vert sur notre illustration.

Nous voulons la valeur de l'angle \widehat{IOZ} , en violet sur notre illustration.

Pour cela, on prend l'opposé de $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$, ce qui donne $-\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx -1,230959417$.

Cet angle est la mesure principale de l'angle que l'on cherche : il a bien un sinus négatif, mais il n'appartient pas à l'intervalle voulu. Il faut lui ajouter 2π :

On a donc ici $x = 2\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 2\pi - 1,230959417$ rad, soit $x \approx 5,05222589$ rad.

On a bien $x \in [\pi \approx 3,14; 2\pi \approx 6,28]$ car $3,14 < 5,05 < 6,28$.

