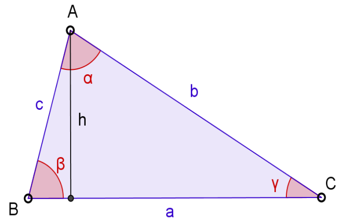
TD n°1 de trigonométrie

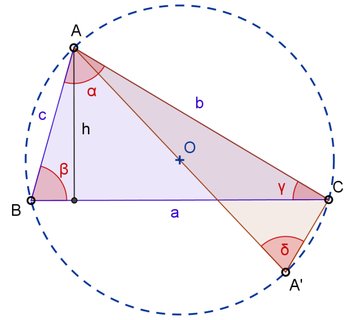
1) Loi des sinus



Le triangle ABC est acutangle : l'angle $\widehat{CAB}$ a une mesure α comprise entre 0° et 90°. De même, pour les deux autres angles β= $\widehat{ABC}$ et γ= $\widehat{BCA}$.

a) Montrer que l'aire S du triangle ABC se calcule à l'aide de la formule $S= \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin\beta$, notée aussi, avec les notations de la figure, $\frac{a\,c\sin\beta}{2}$.

b) Montrer qu'avec les notations de la figure, on a aussi $S=\frac{b\,c\sin\alpha}{2}=\frac{a\,b\sin\gamma}{2}$.



c) En déduire la relation suivante, dite loi des sinus :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{2\,S}{a\,b\,c}$$

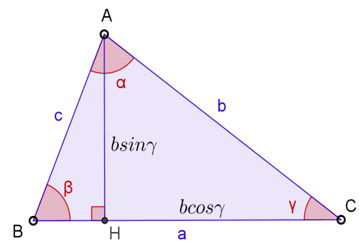
d) Si on note A' le symétrique de A par rapport à O, le centre du cercle circonscrit à ABC, rappeler la valeur des angles $\widehat{A'CA}$ et $\widehat{CA'A}$.

En déduire la valeur de $\frac{\sin\beta}{b}$ en fonction de R, le rayon du cercle circonscrit.

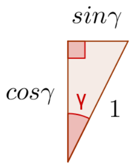
2) Loi des cosinus

On raisonne ici aussi sur un triangle acutangle ABC.

Les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.



a) Si on note H le pied de la hauteur issue de A, montrer que $AH= b\sin\gamma$ et que $CH= b\cos\gamma$. En déduire BH en fonction de a, b et γ, puis montrer* que l'on a $c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos\gamma$. Cette relation est appelée loi des cosinus ou bien théorème d'Al-Kashi ou encore théorème de Pythagore généralisé.



* il faut utiliser la propriété qui traduit le théorème de Pythagore en trigonométrie $\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$

b) Écrire les deux autres égalités qui traduisent la loi des cosinus dans le triangle ABC.

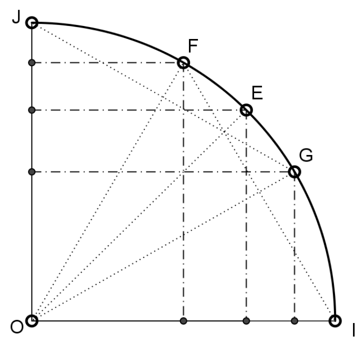
3) Valeurs trigonométriques remarquables

Un point M du quart de cercle IJ de rayon OI=1 ci-contre peut être repéré par des coordonnées qui ne dépendent que de x= $\widehat{IOM}$. On notera M(cos x ; sin x). Ce principe se prolonge sur ℝ pour y définir les fonctions *cos* et *sin* alors que *tan* reste défini par la relation $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

Retrouver les valeurs exactes des angles suivants :

(il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore)

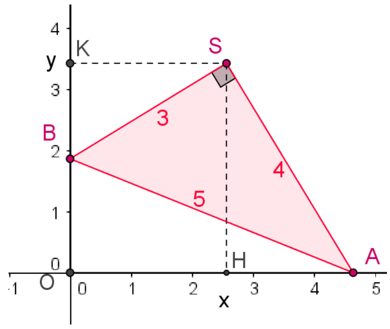
angle	0°	30°	45°	60°	90°
cos					
sin					
tan					



4) Glissement d'une équerre

Les extrémités A et B d'une équerre ABS glissent le long de deux demi-droites perpendiculaires [Ox) et [Oy). Nous nous intéressons à la trajectoire du sommet S (le sommet de l'angle droit) lors du glissement.

a) Réaliser l'expérience avec une vraie équerre, dessiner plusieurs positions du sommet lors du glissement de l'équerre. Montrer qu'au cours de ce déplacement, l'angle $\widehat{AOS}$ reste constant et égal à l'un des angles aigus de l'équerre.



b) S se déplace donc, en réalité, sur un segment [IJ]. En supposant que les côtés de l'équerre mesurent 3, 4 et 5 unités et qu'ils sont disposés comme la figure les montre, déterminer les coordonnées de I et de J.