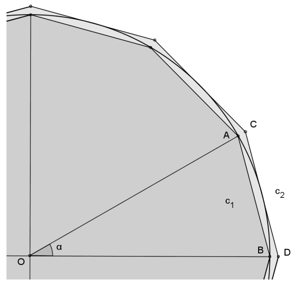
DM n°7 : Trigonométrie

à réaliser à deux

1) Calcul de π à la façon d'Archimède

Le nombre π est un de ceux qui intrigua le plus les mathématiciens. Archimède, au 3e siècle avant J.C., utilisa des polygones réguliers pour encadrer cette valeur : en inscrivant un polygone à quatre-vint-seize côtés dans un cercle, et en déterminant le périmètre – forcément inférieur à celui du cercle – de ce polygone par le calcul, on obtient une valeur approchée par défaut de π. En inscrivant le cercle dans un agrandissement de ce polygone, le périmètre de ce nouveau polygone conduit à une valeur approchée par excès.



a) Considérer deux dodécagones réguliers encadrant au plus juste un cercle de rayon R=1. En prenant α pour valeur de l'angle au centre $\widehat{AOB}$, exprimer le côtés c_1 du petit dodécagone (à l'intérieur) à l'aide de la loi des cosinus dans le triangle *OAB*.
Utiliser ensuite la formule de duplication du cosinus pour en déduire $c_1=2\sin\frac{\alpha}{2}$.
Montrer que le côté c_2 du grand dodécagone (à l'extérieur) est $c_2=2\tan\frac{\pi}{12}$.
En déduire l'encadrement $12\sin\frac{\pi}{12}<\pi<12\tan\frac{\pi}{12}$ et sa généralisation $6\times2^n\times\sin\frac{\pi}{6\times2^n}<\pi<6\times2^n\times\tan\frac{\pi}{6\times2^n}$.

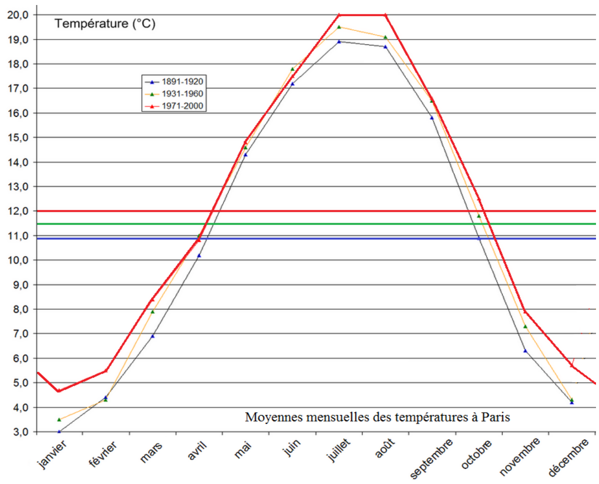
b) Les formules de duplication vont nous permettre de mettre au point un algorithme pour déterminer successivement des encadrements de plus en plus précis.
En notant $u=\sin\frac{\pi}{n}$ et $v=\cos\frac{\pi}{n}$, déterminer $x=\sin\frac{\pi}{2n}$, $y=\cos\frac{\pi}{2n}$ $z=\tan\frac{\pi}{2n}$ en fonction de *u* et *v*.
À partir des valeurs connues de $u=\sin\frac{\pi}{6}$ et $v=\cos\frac{\pi}{6}$, déduire, à la manière d'Archimède, les valeurs approchées de *x, y* et *z* de l'étape *n*=1 ainsi que l'encadrement correspondant de π et son amplitude.
Ensuite, *x* et *y* sont affectés aux variables *u* et *v* pour une nouvelle étape, et on recommence jusqu'à la précision voulue. Confier les calculs au tableur (noter des valeurs arrondies au millionième près, mais conserver des valeurs plus précises pour les calculs) en complétant ce tableau jusqu'à *n*=5.

n	*Nombre côtés*	*u*	*v*	*x*	*y*	*z*	*encadrement*	*amplitude*
1	6	0,500000	0,866025	0,258819	...	...	...<π<...	...
2	12	0,258819	...	...	...	...	...<π<...	...

c) Conclure en commentant l'encadrement obtenu par Archimède avec ses polygones à quatre-vingt-seize côtés. On trouve à ce sujet, deux encadrements rationnels différents : $\frac{220}{71}<\pi<\frac{22}{7}$ (site bibmath.net) et $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$ (Malice Kangourou 2004). Qu'en pensez-vous ?

2) Modélisation d'un phénomène périodique

a) On a modélisé la durée en heures du jour à Paris avec la fonction D : $t\mapsto$ $12+3{,}1\sin(0{,}0172(t-80))$ où t est le nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier. Tracer la courbe de cette fonction D pour $t\in[0\,;\,365]$. Indiquer sur ce graphique, les *solstices* et *équinoxes* (revoir si nécessaire la définition de ces mots). Quels sont le maximum et le minimum de *D(t)* et quels jours se produisent-ils selon ce modèle ? Préciser le rôle du nombre 80 dans l'expression de *D(t)*. Expliquer, de même, le rôle du nombre 0,0172. Expliquer aussi le rôle du nombre 12 et celui de 3,1.



b) On veut, de même, modéliser la température moyenne de l'air en degrés Celsius à Paris avec une fonction T telle que $T(t)=a+b\sin(\omega(t-\varphi))$ où t est le nombre de jours écoulés depuis le 1er janvier. Utiliser la courbe supérieure ci-contre qui correspond à l'époque la plus récente (1971-2000) pour déterminer les coefficients *a*, *b*, *ω* et *φ*.

c) La température de l'air subit également, en plus du cycle annuel (lié à la rotation de la Terre autour du Soleil), un cycle diurne (lié à la rotation de la Terre sur elle-même).

Température au parc Paris-Montsouris

Période	Mois	jan.	fév.	mars	avril	mai	juin	jui.	août	sep.	oct.	nov.	déc.	année
1971-2000	Température minimale moyenne (°C)	2,5	2,8	5,1	6,8	10,5	13,3	15,5	15,4	12,5	9,2	5,3	3,6	**8,6**
	Température moyenne (°C)	4,7	5,5	8,4	10,8	14,8	17,6	20	20	16,7	12,6	7,9	5,7	**12,1**
	Température maximale moyenne (°C)	6,9	8,2	11,8	14,7	19	21,8	24,4	24,6	20,8	15,8	10,4	7,8	**15,5**

Source : « données climatiques » sur Météo climat bzh dvndns.org (consulté en avril 2014)

Les variations de température sur une journée sont données dans le tableau ci-contre. Construire un terme correctif à ajouter à $T(t)$ qui traduise ces variations diurnes : la courbe obtenue doit osciller entre les courbes T_{max} et T_{min} avec les températures maximales vers 16*h* et les minimales vers 4*h*.
Vérifier que la formule obtenue donne, approximativement, des résultats conformes.