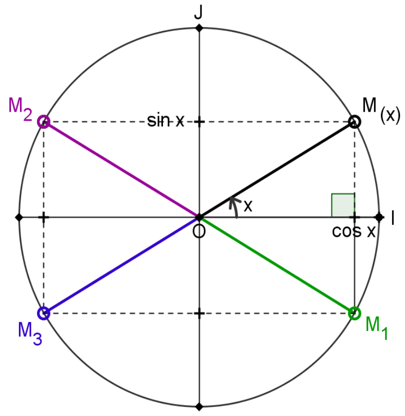
TD n°3 de trigonométrie : angles associés

1) Les angles associés



a) À tout réel x de l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on peut associer le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle $\widehat{IOM}$ de mesure x *rad*.

- En supposant que $x=\frac{\pi}{5}$, citer d'autres angles réels correspondant au même point M.

Il y a $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}+2\pi=\frac{11\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}-2\pi=\frac{-9\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}+4\pi=\frac{21\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des mesures d'angles réels correspondants au même point M ?

$\frac{\pi}{5}+2k\pi$, k étant un entier relatif.

b) M_1 est le symétrique de M par rapport à (OI).

- Donner la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}_1$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$.

$\widehat{IOM}_1=-\widehat{IOM}=-x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_1=\frac{-\pi}{5}$.

- Citer d'autres angles réels correspondant au même point M_1.

Il y a $\frac{-\pi}{5}$, $\frac{-\pi}{5}+2\pi=\frac{9\pi}{5}$, $\frac{-\pi}{5}-2\pi=\frac{-11\pi}{5}$, $\frac{-\pi}{5}+4\pi=\frac{19\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des angles réels correspondants au même point M_1 ?

$\frac{-\pi}{5}+2k\pi$, k étant un entier relatif.

c) M_2 est le symétrique de M par rapport à (OJ).

- Donner la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}_2$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$

$\widehat{IOM}_2=\pi-\widehat{IOM}=\pi-x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_2=\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{4\pi}{5}$.

- Citer d'autres angles correspondant au même point M_2.

Il y a $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}+2\pi=\frac{14\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}-2\pi=\frac{-6\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}+4\pi=\frac{24\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des angles correspondants au même point M_2 ?

$\frac{4\pi}{5}+2k\pi$, k étant un entier relatif.

d) M_3 est le symétrique de M par rapport à O.

- Donner la mesure principale de l'angle $\widehat{IOM}_3$ dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$

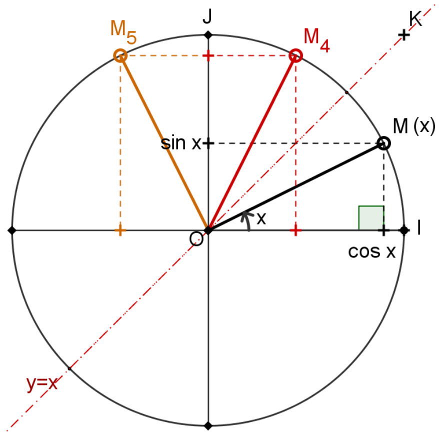
$\widehat{IOM}_3=\pi+\widehat{IOM}=\pi+x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_3=\pi+\frac{\pi}{5}=\frac{6\pi}{5}$.

- Citer d'autres angles réels correspondant au même point M_3.

Il y a $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}+2\pi=\frac{16\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}-2\pi=\frac{-4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}+4\pi=\frac{26\pi}{5}$, etc.

- Quelle est la forme générale des angles réels correspondants au même point M_3 ?

$\frac{6\pi}{5}+2k\pi$, k étant un entier relatif.



e) Autres angles associés importants : K étant le point de coordonnées (1;1), M_4 est le symétrique de M par rapport à (OK), la droite d'équation $y=x$ et M_5 est le symétrique de M_4 par rapport à (OJ).

- Donner d'autres mesures de l'angle $\widehat{IOM}_4$.

$\widehat{IOM}_4=\frac{\pi}{2}-\widehat{IOM}=\frac{\pi}{2}-x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$:

$\widehat{IOM}_4=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$.

Il y a $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+2\pi=\frac{23\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}-2\pi=\frac{-17\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+4\pi=\frac{43\pi}{10}$, etc.

La forme générale est $\frac{3\pi}{10}+2k\pi$, k étant un entier relatif.

- Donner d'autres mesures de l'angle $\widehat{IOM}_5$.

$\widehat{IOM}_5=\frac{\pi}{2}+\widehat{IOM}=\frac{\pi}{2}+x$ donc, dans le cas où $x=\frac{\pi}{5}$, $\widehat{IOM}_5=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}=\frac{7\pi}{10}$. Il y a $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}+2\pi=\frac{27\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}-2\pi=\frac{-13\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}+4\pi=\frac{47\pi}{10}$, etc. La forme générale est $\frac{7\pi}{10}+2k\pi$, k étant un entier relatif.

2) Lignes trigonométriques des angles associés

a) À l'aide du cercle trigonométrique, exprimer les lignes trigonométriques des angles $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$, $\frac{\pi}{2}-x$ et $\frac{\pi}{2}+x$ en fonction de celles de x.

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$

b) Deux applications

- En utilisant les lignes trigonométriques exactes des angles remarquables et les propriétés ci-dessus, déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.
$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.
$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}$.
$\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.
$\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.
$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (angle d'un triangle équilatéral) et donc que $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.
L'équation n°1 s'écrit donc $\sin x=\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$.
On en déduit que $k\in\mathbb{Z}, x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(\frac{-\pi}{3}\right)+2k\pi=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.

On sait que $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et donc, l'équation n°2 s'écrit $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$.
On en déduit que $k\in\mathbb{Z}, x=\frac{3\pi}{10}+2k\pi$ ou $x=\frac{-3\pi}{10}+2k\pi$.

3) Questions diverses

a) Les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ ne font pas partie des valeurs remarquables ; déterminer leur valeur avec les formules de duplication : $\sin 2x=2\sin x\cos x$ et $\cos 2x=2(\cos x)^2-1=1-(2\sin x)^2$.
Calculons d'abord $\sin\frac{\pi}{12}$. Il vérifie, d'après la formule de duplication du cosinus, $\cos\frac{\pi}{6}=1-2(\sin\frac{\pi}{12})^2$.
Donc $(\sin\frac{\pi}{12})^2=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ et comme, d'après la position du point sur le cercle trigonométrique, on doit avoir $\sin\frac{\pi}{12}>0$, on a $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.
Vérifions avec la calculatrice : $\sin\frac{\pi}{12}\approx 0{,}2588190451$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\approx 0{,}2588190451$.
Les calculatrices donnent souvent une autre valeur exacte : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Pourquoi a-t-on $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$?
Parce que $\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}=\frac{6+2-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{16}=\frac{8-2\sqrt{12}}{16}=\frac{8-4\sqrt{3}}{16}=\frac{4(2-\sqrt{3})}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$, ce qui est bien le résultat attendu.
Pour $\cos\frac{\pi}{12}$ qui, ceci dit en passant doit être également positif, utilisons la propriété $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$.
Cela nous donne $(\cos\frac{\pi}{12})^2=1-(\sin\frac{\pi}{12})^2=1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$, et donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\approx 0{,}9659$.
La calculatrice donne, ici encore, une expression plus simple mais égale à la notre : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

b) Sachant que $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ et que $\sin x=\frac{-1}{4}$, en vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer la valeur exacte de $\cos x$, puis déterminer une valeur approchée de x.
$(\cos x)^2=1-(\sin x)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.
Comme $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$, d'après le cercle trigonométrique, on devrait avoir $\cos x\leq 0$, et donc $\cos x=-\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{-\sqrt{15}}{4}$. Si on voulait que $\frac{-\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, on aurait $\cos x\geq 0$, et donc on aurait $\cos x=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.
La calculatrice donne, pour la fonction $\sin^{-1}$, un angle de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Donc ici, comme on veut que $x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, on doit déjà ajouter π et enlever la valeur donnée (pour prendre celle qui a même sinus). Si $\frac{-\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, alors $\frac{-\pi}{2}\leq -x\leq\frac{\pi}{2}$ et, en ajoutant π, on obtient $\pi-\frac{\pi}{2}\leq\pi-x\leq\pi+\frac{\pi}{2}$, et on a bien $\frac{\pi}{2}\leq\pi-x\leq\frac{3\pi}{2}$. On a donc ici $x=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)\approx\pi+0{,}2526802551$ *rad*, soit $x\approx 3{,}394272909$ *rad*.