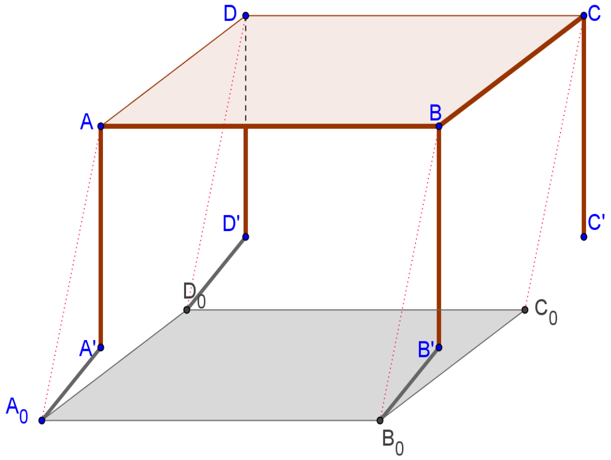
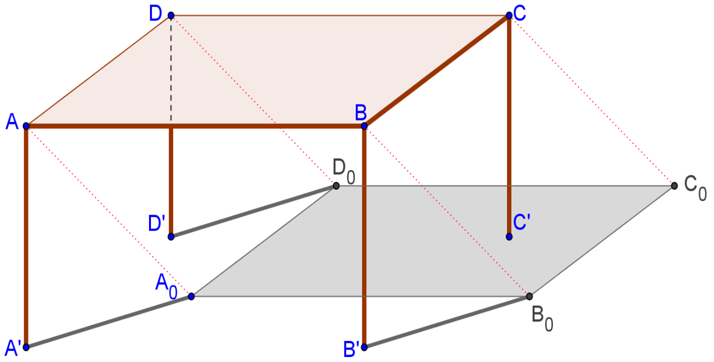
2de Chapitre 6 : TD n°4 sur l'espace (révision+entraînement)

CORRECTION

1) Ombres

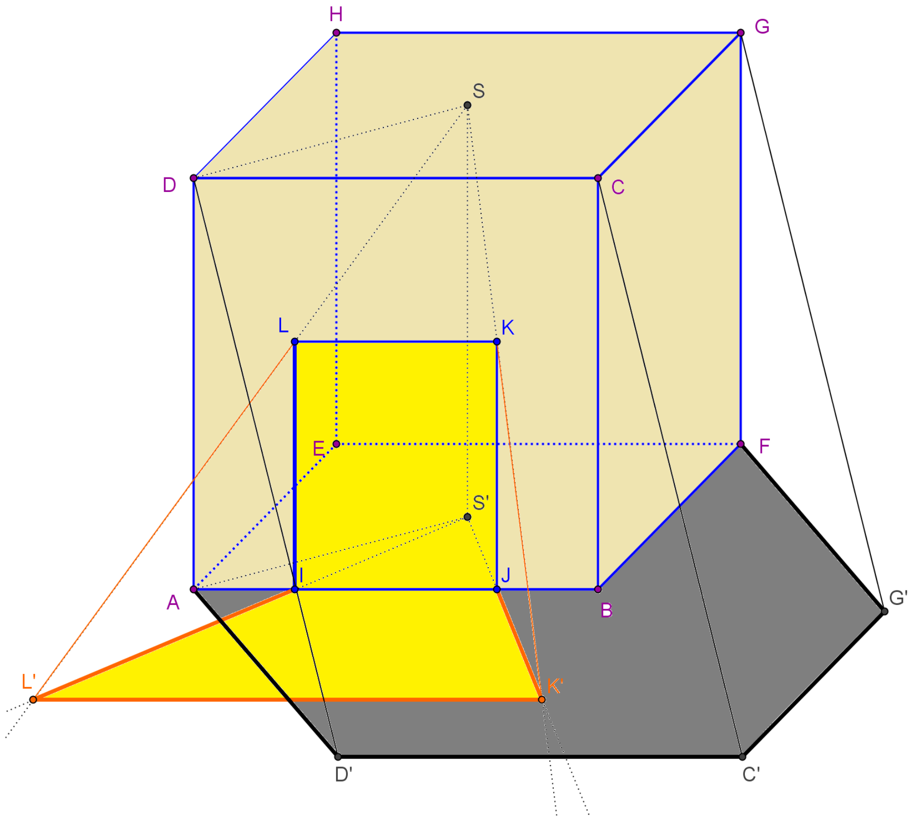
a) *ABCDEFGH* est un parallélépipède rectangle. Le point *A* est projeté en *A′* sur le plan (*DCG*). On demande de construire les projections *B′*, *F′* et *E′* de *B*, *F* et *E* sur ce plan parallèlement à la droite (*AA′*).
Dans le cas où *ABFE* serait le plateau d'une table et [*AD*], [*BC*], [*FG*] et [*EH*] seraient les pieds de cette table, colorier en noir l'ombre de cette table lorsqu'elle est éclairée par le soleil et que le coin *A* se projette en *A′* sur le sol.





Il suffit de tracer les parallèles au rayon (AA_0) passant par *B, C* et *D*. Les plans tels que (DAA_0) coupent les plans parallèles du sol (A'B'C') et de la table (ABC) selon des droites parallèles. Donc (D_0A_0) est parallèle à (*DA*). Le reste de la construction se fait de la même façon que pour D_0.

b) On a tracé ci-contre un cube *ABCDEFGH* représentant une maison, le rectangle *IJKL* sur la face (*ABC*) représentant sa porte.
Le soleil* éclaire cette maison, projetant l'ombre du point *C* en *C′* sur le sol horizontal. Tracer au crayon les contours de l'ombre de la maison sur le sol.
Le point *S*, au centre du plafond, est le lieu d'une source de lumière* qui éclaire l'intérieur de la pièce, projetant à l'extérieur, à travers la porte *IJKL*, une tâche de lumière. Tracer en bleu les contours de cette tâche lumineuse.
Colorier au crayon la partie de l'ombre qui n'est pas éclairée par la source de lumière.



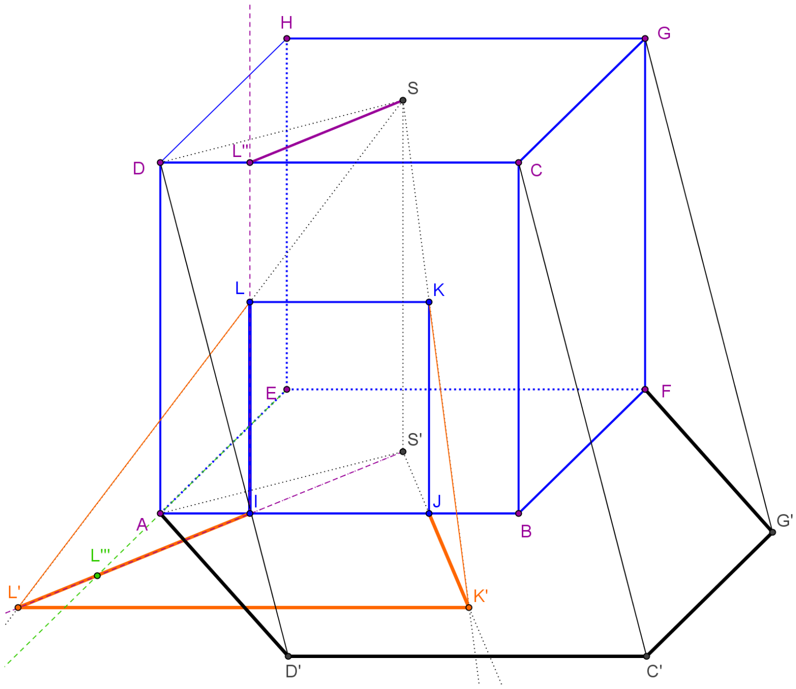
**on rappelle que les rayons du soleil sont parallèles alors que les rayons issus d'une source de lumière proche sont concourants*

En gris foncé, l'ombre (sauf la partie éclairée de l'intérieur de la maison qu'on a laissé en jaune). Il n'y a que quatre segments à tracer (on peut laisser aussi les traits de construction que sont les rayons parallèles), la maison est opaque : même les murs projettent une ombre ! Il n'y a pas que le plafond qui projette son ombre, il ne s'agit pas d'une table comme précédemment...

Pour la tâche de lumière venant de la source intérieure (du point S) : la couleur bleue n'étant pas très réaliste, j'ai tracé le contour demandé en orange, et la tâche lumineuse en jaune. Ma construction utilise la projection S' du point S sur le sol. Pour connaître l'intersection de (SL) avec le sol, il suffit de chercher où cette droite coupe $(S'I)$ car comme $(SS')//(LI)$, les quatre points sont coplanaires et donc (SL) coupe bien $(S'I)$, ce n'est pas une illusion d'optique...

Certains ont utilisé l'intersection L'' de la droite (LI) et du plan (CDG) contenant S. C'est une bonne idée, on trouve alors L' à l'intersection de $[SL)$ et de la parallèle à (SL'') passant par I.

Une dernière précision : $[SL)$ et (AE) ne se coupent pas comme certains le pensent. Ou bien alors, il s'agirait d'une coïncidence : cela dépend de la position de I sur $[AB]$. J'ai mis en vert le point L''' où le plan (SIL) est percé par (AE).



2) Orthogonalité dans un cube

a) Voici un cube $ABCDEFGH$ dont les côtés mesurent 3 cm. Sur l'arête $[EF]$ nous plaçons U tel que $FU=1$ cm et sur l'arête $[DH]$ nous plaçons V tel que $DV=1$ cm.

On veut prouver que (VU) est orthogonale à (BE). Pour cela on projette le point V sur le plan (ABF) parallèlement à la droite (DA), cela donne un point W.

Prouver que $(WU)\perp(BE)$.

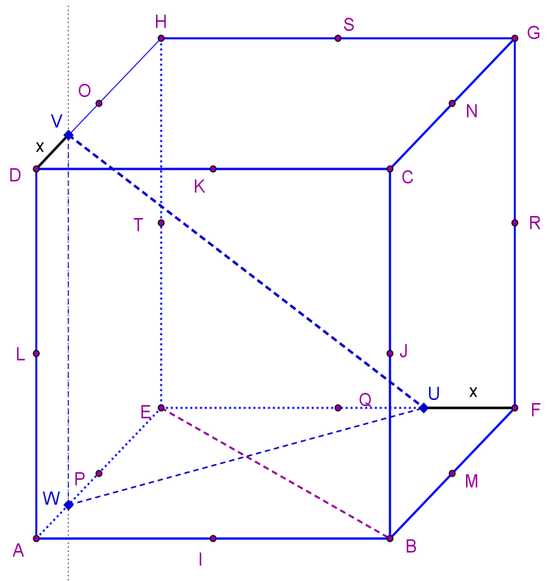
$AW=DV=1$ cm car $DVWA$ est un rectangle.

Pour prouver que $(WU)\perp(BE)$, plaçons nous dans la face ABF. Il n'est pas difficile de montrer que $(WU)//(AF)$, avec la réciproque du théorème de Thalès. Et comme $(AF)\perp(BE)$ parce que ce sont les diagonales d'un carré, $(WU)\perp(BE)$.

Expliquer pourquoi on a aussi $(WV)\perp(BE)$.

$(WV)//(DA)$ car $DVWA$ est un rectangle. Or $(DA)\perp(BE)$, car (DA) étant orthogonale aux 2 droites (AE) et (AB) sécantes du plan (EAB), est orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc à (BE).

Conclure. Comme $(WU)\perp(BE)$ et $(WV)\perp(BE)$, et que (WU) et (WV) sont 2 droites sécantes d'un même plan (WUV), (BE) est orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc à (VU).



b) Dans le cas général, si au lieu de prendre $FU=DV=1$ cm, on avait pris $FU=DV=x$ cm avec $0\leq x\leq 3$, la situation serait-elle différente?

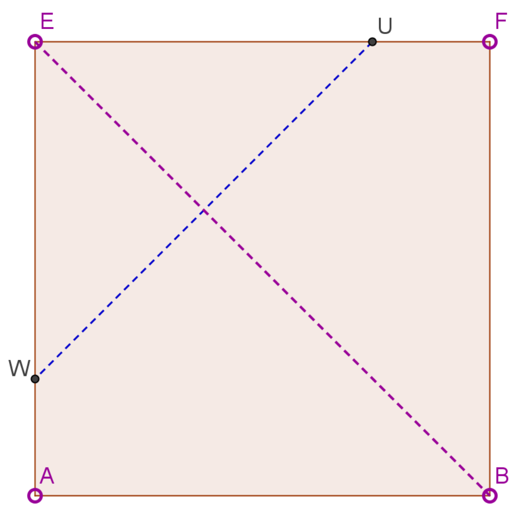
Non, ce serait exactement pareil (on ne s'est pas servi du fait que $x=1$, sauf pour faire la figure).

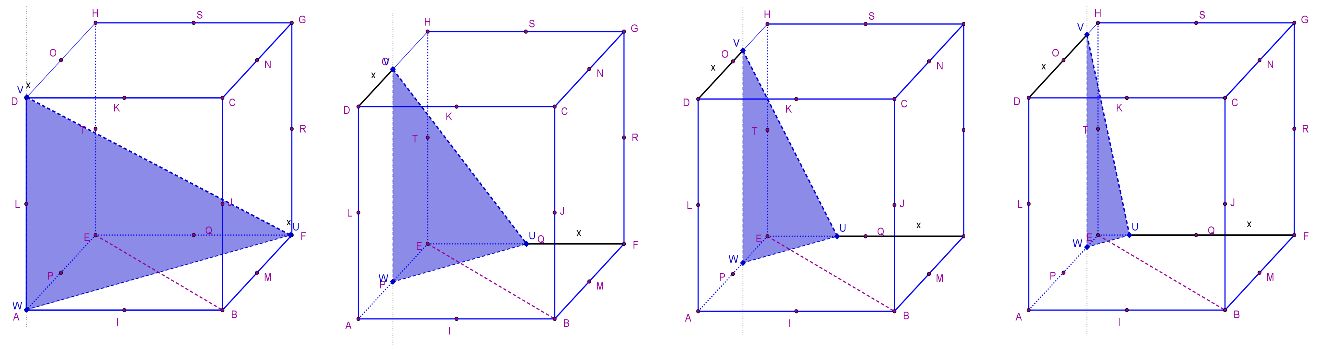
La droite (VU) est-elle orthogonale à (BE) quel que soit x?

Oui. De $x=0$ (W est en A, figure d'en bas à gauche) à $x=3$ (W est en E, le plan (WVU) est réduit à la droite (HE)).

Existe t-il une autre droite du plan (EBC), sécante avec (EB), qui soit orthogonale à (VU) ?

Non, car s'il en existait une, nommons là D. Comme D et (EB) seraient deux droites sécantes du plan (EBC) orthogonale à (VU), toutes les droites de ce plan seraient orthogonales à la droite (VU) ce qui n'est pas.





Pourquoi ?

Il existe au moins une droite dans (*EBC*) qui n'est pas orthogonale à (*VU*) : la parallèle à (*VW*) qui passe par le milieu de [*WU*]. Cette droite appartient au plan (*EBC*) car ce plan contient des droites parallèles à (*VW*) (les droites (*EH*) et (*BC*) par exemple) et qu'il contient le milieu de [*WU*]. Mais cette droite appartient aussi au plan (*UVW*) puisque c'est la parallèle à (*VW*) passant par un point de ce plan, le milieu de [*WU*]. Cette droite est donc l'intersection des plans (*UVW*) et (*EBC*). Cette droite n'est pas orthogonale (perpendiculaire) à (*VU*) par construction, puisqu'elle est parallèle à (*VW*), elle fait un angle égal à $\widehat{WVU}$ avec (*VU*), et ce n'est pas 90° puisque *WVU* est un triangle rectangle en *W*, pas en *V*.

Cette explication est bien longue pour une propriété presque évidente. On peut sans doute la simplifier..