TD n°2 de trigonométrie : les angles réels

CORRECTION

1) Position sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les vingt points M_1 à M_{20}, correspondants aux angles exprimés en radians suivants :

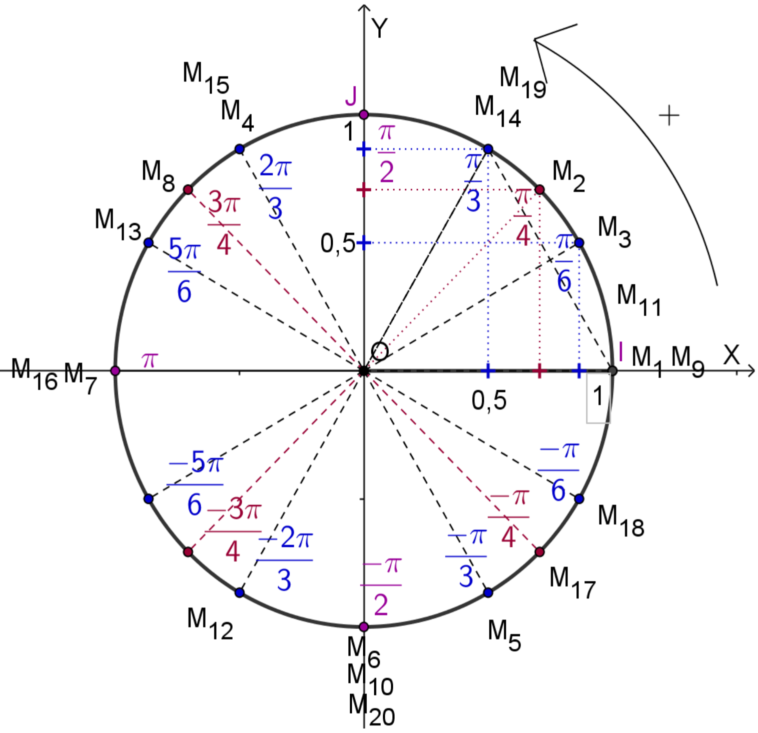
$M_1(0)$; $M_2(\frac{\pi}{4})$; $M_3(\frac{\pi}{6})$; $M_4(\frac{2\pi}{3})$;

$M_5(\frac{-\pi}{3})$; $M_6(\frac{-\pi}{2})$; $M_7(-\pi)$; $M_8(\frac{3\pi}{4})$;

$M_9(12\pi)$; $M_{10}(\frac{7\pi}{2})$; $M_{11}(\frac{\pi}{12})$; $M_{12}(\frac{4\pi}{3})$;

$M_{13}(\frac{-7\pi}{6})$; $M_{14}(\frac{13\pi}{3})$; $M_{15}(\frac{-4\pi}{3})$; $M_{16}(-21\pi)$;

$M_{17}(\frac{-9\pi}{4})$; $M_{18}(\frac{23\pi}{6})$; $M_{19}(\frac{-17\pi}{3})$; $M_{20}(\frac{-121\pi}{2})$.



Certains points sont superposés, tels M_6, M_{10} et M_{20} puisque, modulo 2π, on a $\frac{-\pi}{2}=\frac{7\pi}{2}=\frac{-121\pi}{2}$.

Une égalité entre deux angles modulo 2π signifie que l'on peut ajouter un multiple de 2π à un des angles pour trouver l'autre. Par exemple, $\frac{-\pi}{2}+2\times2\pi=\frac{-\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}=\frac{7\pi}{2}$. Il faut ajouter deux tours, soit 4π, à $\frac{-\pi}{2}$ pour trouver $\frac{7\pi}{2}$. Les angles égaux modulo 2π correspondent au même emplacement sur le cercle trigonométrique.

2) Mesure principale

La *mesure principale* d'un angle est celle de l'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi\ ;\pi]$ qui correspond à la même position sur le cercle trigonométrique.

Par exemple, un angle mesurant $\frac{5\pi}{2}$ *rad*, a une mesure principale de $\frac{5\pi}{2}-2\pi=\frac{5\pi}{2}-\frac{4\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$; on vérifie que $\frac{\pi}{2}$ *rad*, appartient bien à $]-\pi\ ;\pi]$.

a) Déterminer la mesure principale des douze angles orientés exprimés en radians suivants, ainsi que le nombre de tours à ajouter à la mesure principale pour obtenir la mesure réelle :

Sur le cercle trigonométrique ci-dessus, nous avons indiqué les mesures principales des différents emplacements. Pour remplir la 1ère ligne du tableau et pour le nombre de tours, il faut (re)faire le calcul. Par exemple, pour $\frac{9\pi}{2}$ on écrit $\frac{9\pi}{2}-\frac{8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$. La mesure principale est donc $\frac{\pi}{2}$ et le nombre de tours est -2 car on a enlevé $\frac{8\pi}{2}=4\pi=2\times2\pi$

Mesure réelle	$-\pi$	12π	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-7\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{-4\pi}{3}$	-21π	$\frac{-9\pi}{4}$	$\frac{23\pi}{6}$	$\frac{-17\pi}{3}$	$\frac{-121\pi}{2}$
Mesure principale	π	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$
Nombre de tours à ajouter	-1	6	2	1	-1	2	-1	-11	-1	2	-3	-30

b) Déterminer l'angle appartenant à $]100\pi\ ;102\pi]$ qui a pour mesure principale $\frac{-\pi}{2}$ *rad.*

Déterminer l'angle appartenant à $]100\pi\ ;102\pi]$ qui a pour mesure principale $\frac{2\pi}{3}$ *rad.*

Pour trouver ces angles, il faut ajouter à 100π un angle positif ou retrancher à 102π un angle négatif.

Pour le 1er de mesure principale négative $\frac{-\pi}{2}$ *rad,* on retranche $\frac{\pi}{2}$ à 102π, cela donne

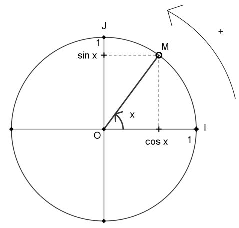
$$102\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{204\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{203\pi}{2}=101{,}5\pi\ .$$

Si on avait ajouté 100π à $\frac{-\pi}{2}$, on aurait trouver une mesure inférieure à 100π. Il aurait alors fallu ajouter encore 2π pour se retrouver dans l'intervalle voulu.

Pour le 2d de mesure principale positive $\frac{2\pi}{3}$ *rad,* on ajoute $\frac{2\pi}{3}$ à 100π, cela donne

$$100\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{300\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{302\pi}{2}\approx100{,}667\pi\ .$$

3) Lignes trigonométriques

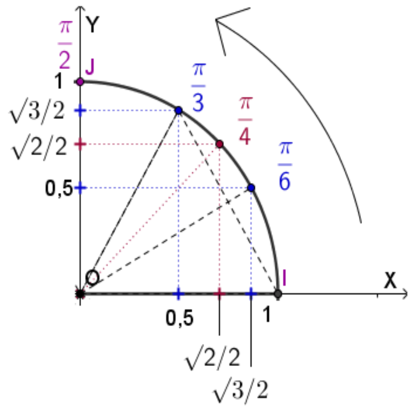


M étant le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle réel *x*, on note (cos *x* ; sin *x*) les coordonnées de *M*. Ceci définit les fonctions cos et sin sur ℝ.

cos x et sin x sont aussi appelés *lignes trigonométriques* de l'angle réel x.

a) Retrouver les lignes trigonométriques exactes des angles suivants
(à partir de maintenant, sauf précision contraire, les angles sont exprimés en radians) :

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



b) Déterminer les lignes trigonométriques exactes des angles suivants

angle	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
cos	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$
sin	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

c) Déterminer l'angle α de $]100\pi\ ;102\pi]$ qui a pour lignes trigonométriques *cos* $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et *sin* $\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

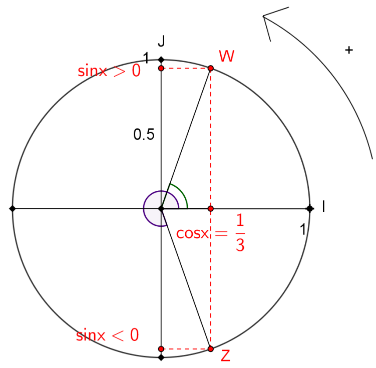
Il s'agit, sans tenir compte des signes, d'un des quatre angles $\frac{-\pi}{4}$ *rad*, $\frac{\pi}{4}$ *rad*, $\frac{-3\pi}{4}$ *rad*, $\frac{3\pi}{4}$ *rad*,
mais en tenant compte que le sinus est négatif et le cosinus positif, il ne reste plus que $\frac{-\pi}{4}$ *rad*.
Maintenant, il faut prendre la valeur de cet angle dans l'intervalle considéré, donc enlever $\frac{\pi}{4}$ *rad* à 102π.
Cela donne $102\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{408\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{407\pi}{4}$.

Déterminer l'angle β de $]100\pi\ ;102\pi]$ qui a pour lignes trigonométriques *cos* $\beta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ *et sin* $\beta=\frac{1}{2}$.

Il s'agit, sans tenir compte des signes, d'un des quatre angles $\frac{-\pi}{6}$ *rad*, $\frac{5\pi}{6}$ *rad*, $\frac{-5\pi}{6}$ *rad*, $\frac{\pi}{6}$ *rad*,
mais en tenant compte que le sinus est positif et le cosinus négatif, il ne reste plus que $\frac{5\pi}{6}$ *rad*.
Maintenant, il faut prendre la valeur de cet angle dans l'intervalle considéré, donc ajouter $\frac{5\pi}{6}$ *rad* à 100π.
Cela donne $100\pi+\frac{5\pi}{6}=\frac{600\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\frac{605\pi}{6}$.

d) Sachant que $\pi\leq x\leq 2\pi$ et que $\cos x=\frac{1}{3}$, en vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer la valeur exacte de $\sin x$ (utiliser la relation $\cos^2 x+\sin^2 x=1$), puis déterminer une valeur approchée de x .

$(\sin x)^2=1-(\cos x)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. Si on voulait que $0\leq x\leq\pi$, on aurait $\sin x\geq 0$, et donc on aurait $\sin x=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mais comme on doit avoir $\pi\leq x\leq 2\pi$, d'après le cercle trigonométrique, on aura $\sin x\leq 0$, et donc $\sin x=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$.



La calculatrice donne, pour la fonction $\cos^{-1}$, un angle de l'intervalle $[0\,;\pi]$ (il faut le savoir, et on en reparlera, mais pour la fonction $\sin^{-1}$ c'est différent : la calculatrice donne un angle dans l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, réfléchissez un peu et vous comprendrez pourquoi).
Donc ici, comme on veut que $x\in[\pi\,;2\pi]$, on doit prendre l'opposé de la valeur donnée (elle a même cosinus et son sinus est opposé) et ajouter un multiple de 2π pour revenir dans l'intervalle qui nous concerne.
La calculatrice (en mode radian !) donne : $\cos^{-1}(\frac{1}{3})\approx 1{,}230959417$ *rad.*
C'est l'angle correspondant à l'angle $\widehat{IOW}$, en vert sur notre illustration.
Nous voulons la valeur de l'angle $\widehat{IOZ}$, en violet sur notre illustration.
Pour cela, on prend l'opposé de $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$, ce qui donne $-\cos^{-1}(\frac{1}{3})\approx -1{,}230959417$.
Cet angle est la mesure principale de l'angle que l'on cherche : il a bien un sinus négatif, mais il n'appartient pas à l'intervalle voulu. Il faut lui ajouter 2π :
On a donc ici $x=2\pi-\cos^{-1}(\frac{1}{3})\approx 2\pi-1{,}230959417$ *rad*, soit $x\approx 5{,}05222589$ *rad.*
On a bien $x\in[\pi\approx 3{,}14\,;2\pi\approx 6{,}28]$ car 3,14<5,05<6,28.