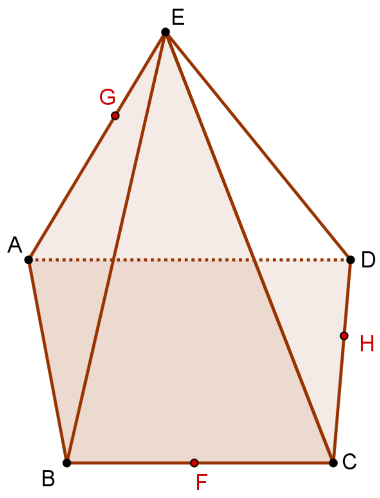
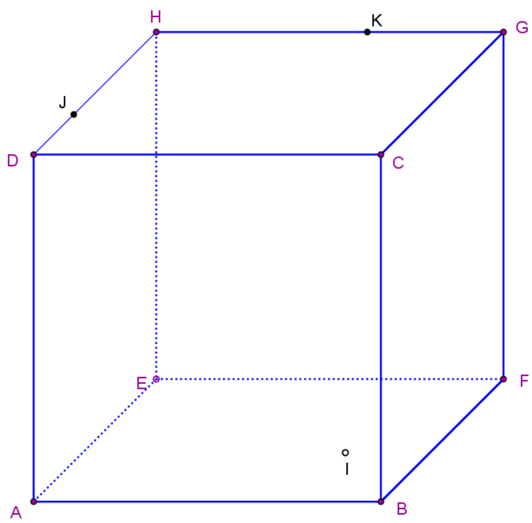
Vous allez dire qu'il était plus facile que le vôtre cette année...et pourtant Barème : 8 pts-6 pts-6 pts

I] Droites et plans de l'espace



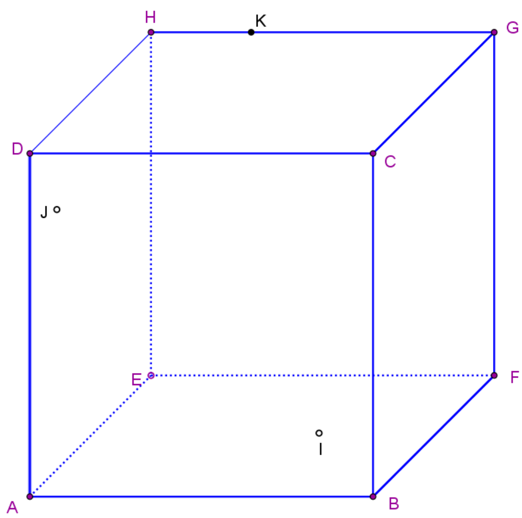
a) La pyramide $ABCDE$ ci-contre est coupée par le plan (FGH), F étant sur l'arête $[BC]$, H étant sur $[CD]$ et G sur $[AE]$.
Tracer, au crayon, l'intersection des plans (FGH) et (ABC). Tracer alors, toujours au crayon, l'intersection de (FGH) avec la face ABE, puis de (FGH) avec la face ADE. Tracer enfin, en couleur, les intersections du plan (FGH) avec les faces de la pyramide (segments invisibles en pointillés).

b) Sur la face ABE du cube ci-dessous, on a placé le point I ; J et K sont, quant à eux, sur les arêtes $[DH]$ et $[HG]$.
On veut tracer les intersections du plan (IJK) avec les faces du cube. En utilisant une propriété du cours que vous écrirez sur votre copie, tracer l'intersection de (IJK) et (ABE). En déduire la trace du plan cherchée sur le cube (les traits de construction au crayon, la trace sur les faces du cube en couleur).

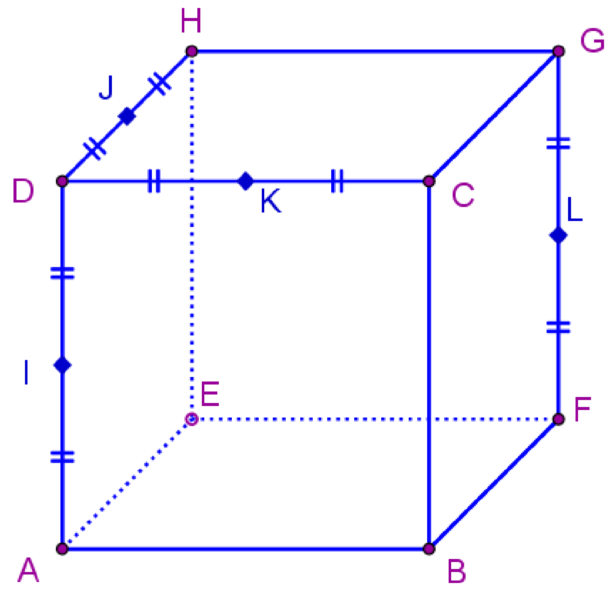


c) Sur la face ABE du cube ci-dessous, on a placé le point I ; J est, cette fois, sur la face ADE ; K est sur l'arête $[HG]$.
On veut tracer, comme précédemment, les intersections du plan (IJK) avec les faces du cube. Pour cela, tracer au crayon, les intersections du plan (BIC) avec les faces du cube ; en déduire la projection L de I sur DCG parallèlement à (BC), puis l'intersection M de (IJ) et du plan (DCG). Finir la construction (traits de construction au crayon, trace sur les faces du cube en couleur).

d) Une petite question : avec les notations précédentes des sommets d'un cube $ABCDEFGH$, est-il possible de trouver un point X sur l'arête $[BC]$, de manière à ce que la droite (DX) soit orthogonale à la droite (BG) ?
Réponse et justification sur la copie



II] Découpe d'un cube et patron



Les côtés d'un cube *ABCDEFGH* mesurent 1 *m*. Les points *I, J, K* et *L* sont les milieux des arêtes [*DA*], [*DH*], [*DC*] et [*GF*].

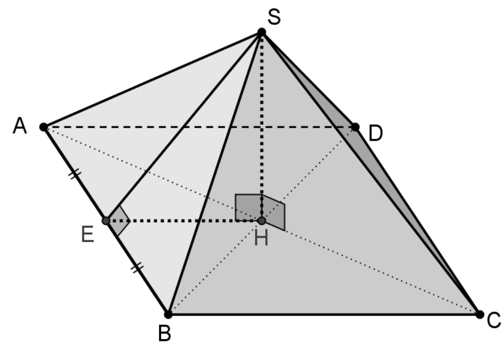
a) Dans un premier temps, on coupe le cube selon deux plans parallèles au plan diagonal (*AFG*) passant, respectivement, par *J* et *K*. Après avoir enlevé les deux morceaux contenant les sommets *B, C, H* et *E* du cube, on se retrouve avec un prisme hexagonal.
Tracer au crayon sur la figure en perspective ci-contre, les intersections des deux plans de coupe avec les faces du cube. Nommer *J', J''* et *J'''* les intersections du plan passant par *J* avec les arêtes du cube ; de même, nommer *K', K''* et *K'''* les intersections du plan passant par *K* avec les arêtes du cube.

b) Dans un second temps, on élimine du prisme hexagonal quatre pyramides identiques contenant les sommets *D, A, G* et *F* : pour le sommet *D*, on coupe le prisme selon le plan (*IJK*), puis on enlève la pyramide *IJKD*. On fait de même pour les autres sommets, en passant par *I* pour enlever la pyramide de sommet *A* et par *L* pour enlever les pyramides de sommets *G* et *F*.
Sur la figure en perspective, tracer en couleur (bleu par exemple ; en pointillés pour les arêtes invisibles) les arêtes du polyèdre obtenu après cette élimination.

c) Compter les faces, les arêtes et les sommets de ce polyèdre, puis tracer un exemplaire de chacun des types de face à l'échelle 1/20 (5 *cm* représentent 1 *m*).

d) Déterminer le volume $\mathcal{V}$ de ce polyèdre en arrondissant le résultat au cm^3 le plus proche.

III] Angle dièdre de la pyramide de Khéops



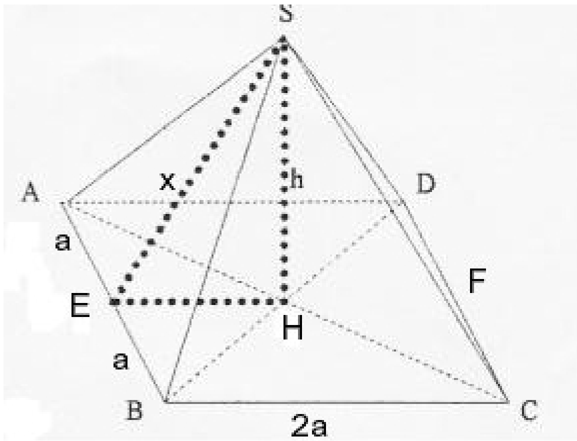
La grande pyramide de Khéops, sur le plateau de Gizeh en Égypte, avait, au moment de sa construction (il y a 4500 ans environ), une base carrée de 230,35 *m* de côté et une hauteur 146,58 *m*.
La figure ci-contre schématise la situation : *ABCD* est un carré de centre *H* tel que *AB*=230,35 *m* ; les faces triangulaires sont isocèles en *S* et *SH*=146,58 *m*.

a) Faire une figure en vraie grandeur, à main levée, du triangle *SAC*. Calculer les longueurs *AC* et *AS*.

b) Faire une figure en vraie grandeur, à main levée, du triangle *SAB*. Calculer la longueur *ES*, puis l'aire de la face *SAB*. Est-il vrai, comme l'a affirmé Hérodote il y a 2500 ans, que « les surfaces latérales triangulaires ont une aire égale à celle du carré construit sur la hauteur de la pyramide » ?
indication : Hérodote parle de SH^2.

c) En déduire la longueur de la hauteur issue de *A* dans le triangle *SAB,* notée [*AG*]. Placer le point *G* sur la figure, puis expliquer pourquoi l'angle $\widehat{AGC}$ est une mesure de l'angle dièdre entre les faces *ABS* et *BCS*.
Déterminer cet angle dièdre.
indication : Pour un triangle quelconque *ABC*, les points H_A, H_B et H_C étant les pieds des hauteurs issues de *A*, *B* et *C*, l'aire peut se calculer de trois façons différentes. $\frac{AB\times CH_C}{2}=\frac{BC\times AH_A}{2}=\frac{CA\times BH_B}{2}$.

Notes (non donné au DS) :



D'après l'historien grec Hérodote, la pyramide de Khéops de base carrée, dont les surfaces latérales sont des triangles isocèles, possède la propriété suivante :

On note $2a$ la longueur du côté AB, h la longueur de la hauteur SH de la pyramide, x la longueur de la hauteur du triangle isocèle ASB.

1/ Exprimer h en fonction de a et de x.

2/ Exprimer, en fonction de a et de x, l'aire de la face SAB et celle du carré de côté SH.

3/ en déduire, en utilisant la remarque de Hérodote, la relation liant a et x.

4/ on note Q le quotient ES/EH . Montrer que Q vérifie

$Q^2 - Q - 1 = 0$

En écrivant $Q^2 - Q - 1 = (Q - 1/2)^2 - 5/4$, calculer la valeur de Q.