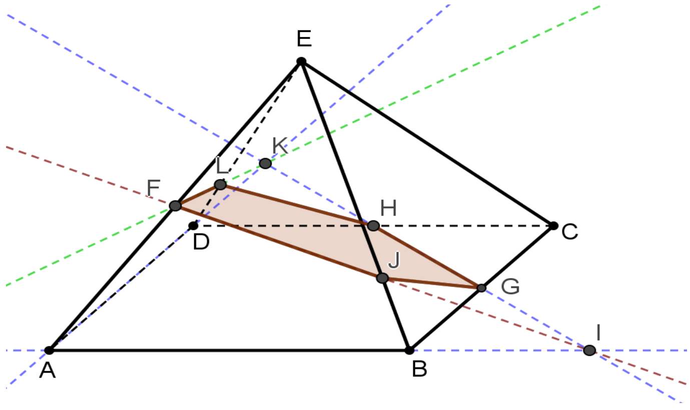
2de4	DS n°6 Espace	16/02/2017

CORRECTION

I] Droites et plans de l'espace

svp : segments invisibles en pointillés !



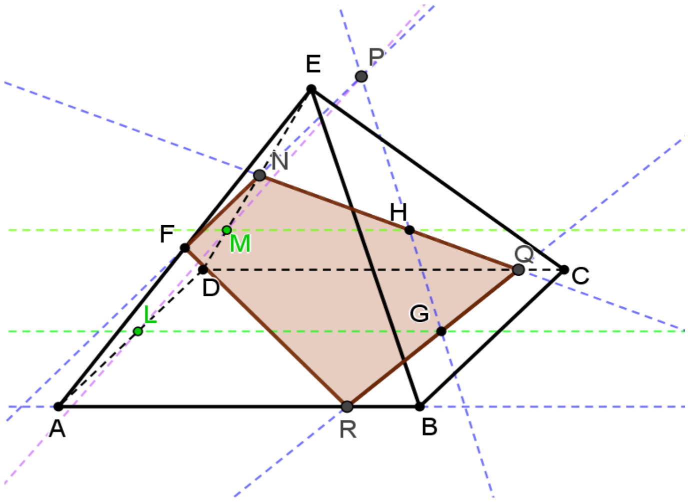
a) La pyramide *ABCDE* ci-contre est coupée par le plan (*FGH*), *F* étant sur l'arête [*AE*], *H* étant sur [*CD*] et *G* sur [*BC*].

Tracer l'intersection du plan (*FGH*) avec la face *ABE*.

J'ai tracé *I*=(*HG*)∩(*AB*), puis (*FI*) qui donne *J*=(*FI*)∩(*EB*).

Tracer ensuite l'intersection de (*FGH*) avec la face *ADE*, puis, en couleur, les intersections de (*FGH*) avec les faces de la pyramide.

J'ai tracé *K*=(*HG*)∩(*AD*), puis (*FK*) qui donne *L*=(*FK*)∩(*ED*). Il ne reste plus qu'à tracer le pentagone *FJGHL*.



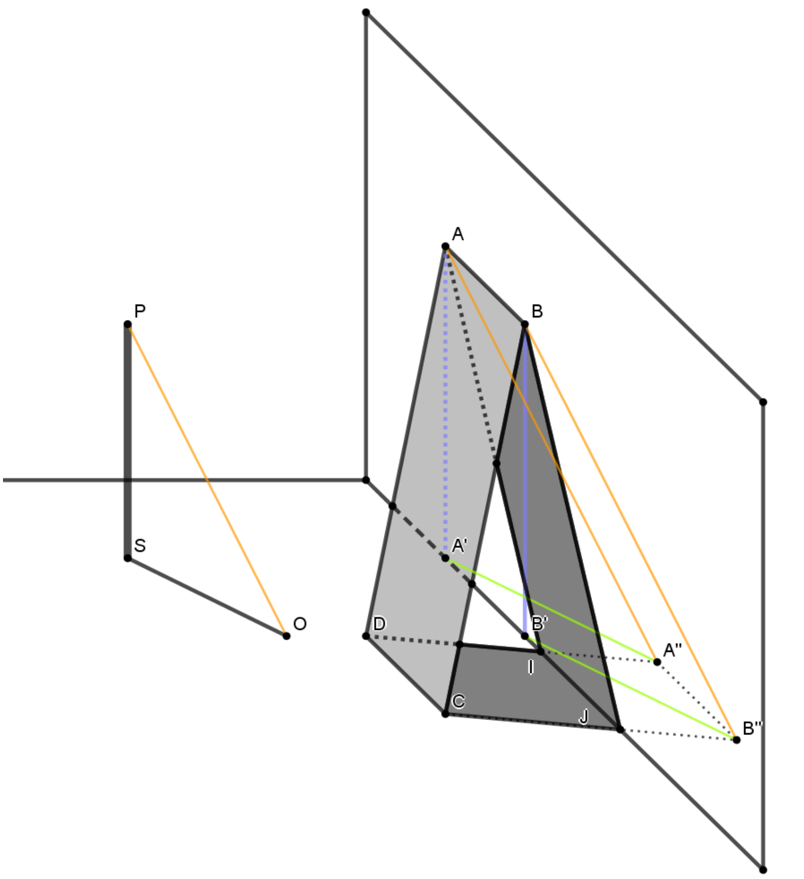
b) La pyramide *ABCDE* est, ici aussi, coupée par le plan (*FGH*), *F* étant sur l'arête [*AE*], mais *H* est sur la face *EDC* et *G* sur la face *ABCD*.

Projeter *G* et *H* sur le plan (*ADE*) parallèlement à la droite (*DC*). Placer alors le point *P* où la droite (*GH*) coupe le plan (*ADE*).

En vert, *G* et *H* sont projetés en *L* et *M*. (*LM*) coupe (*HG*) en *P*.

Tracer ensuite l'intersection de (*FGH*) avec la face *ADE*, puis, en couleur, les intersections de (*FGH*) avec les faces de la pyramide.

J'ai placé ensuite *N*=(*FP*)∩(*ED*), puis (*NH*) qui donne *Q*=(*NH*)∩(*DC*), puis (*QG*) qui donne *R*=(*QG*)∩(*AB*). Il ne reste plus qu'à tracer le quadrilatère *FNQR*.



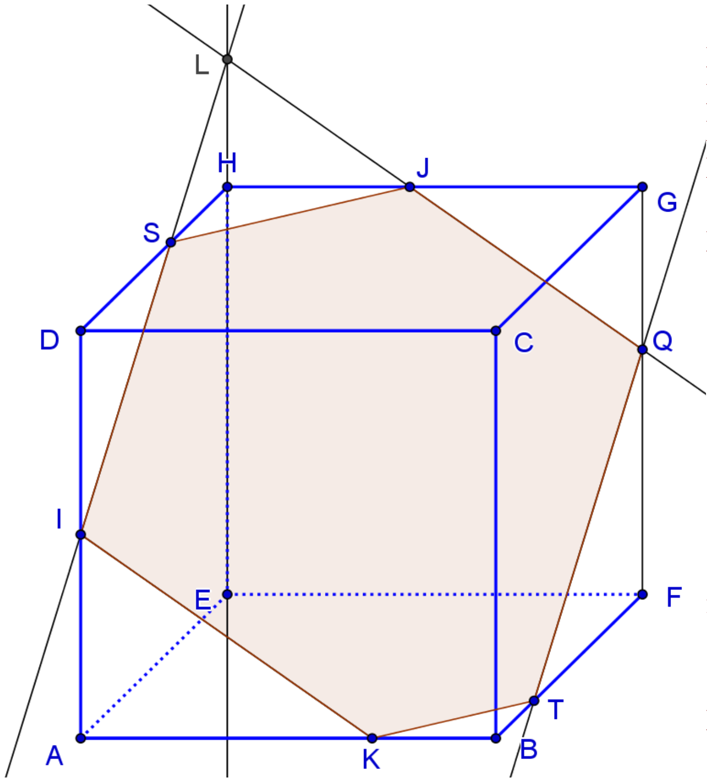
c) *ABCD* est une planche appuyée à un mur selon son côté [*AB*], le côté opposé reposant au sol. La scène est éclairée par le soleil, ce qui projette des ombres : le sommet *P* d'un piquet vertical [*SP*] est ainsi projeté en un point *O* du sol. On demande de construire l'ombre de la planche sur le sol et le mur.

Indication : Faire comme si le mur était transparent, chercher la projection de *A*, puis celle de *B*...

Suivant l'indication, je projette *A* et *B* en *A′* et *B′* sur le sol, parallèlement à (*PS*). Les points *A″* et *B″* sont obtenus par intersection des parallèles à (*SO*) passant par *A′* et *B′* (les ombres à travers le mur transparent), et des parallèles à (*PO*) passant par *A* et *B* (les rayons du soleil). Il ne reste plus qu'à placer *I*=(*DA″*)∩(*A′B′*) et *J*=(*CB″*)∩(*A′B′*), et à tracer les ombres sur le sol [*DI*] et [*CJ*] et sur le mur [*IA*] et [*JB*].

d) *ABCDEFGH* est un cube coupé par un plan (*IJK*). Dans les cas ci-dessous, construire l'intersection de (*IJK*) et des faces du cube.

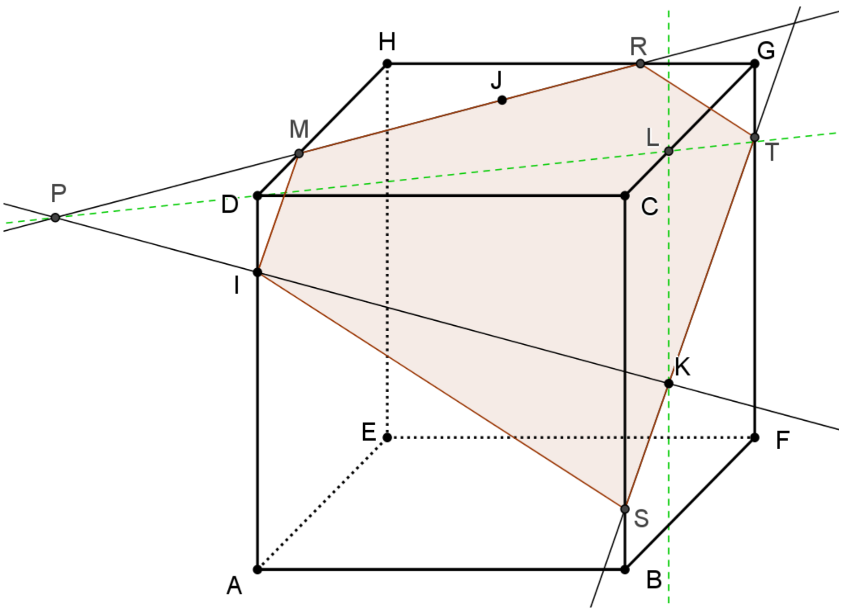
1[er] cas : *I*, *J* et *K* sont sur les arêtes [*AD*], [*HG*] et [*AB*].



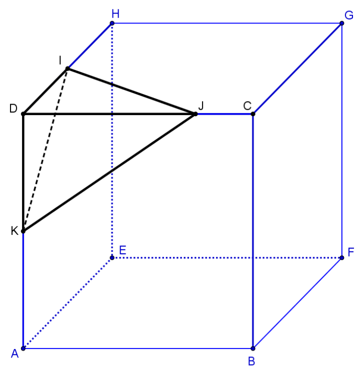
Je commence par tracer la parallèle à (*IK*) passant par *J* car le plan *IJK* coupe les deux plans parallèles (*ABC*) et (*EFG*) selon des droites parallèles. Cela me donne *Q* sur [*GF*]. Cette parallèle (*JQ*) coupe (*HE*) en *L*, ce qui me permet de tracer (*IL*) et *S* sur [*DH*]. La parallèle à (*IS*) passant par *Q* coupe [*BF*] en *T*. Il ne reste plus qu'à tracer l'hexagone *ISJQTK*.

2[ème] cas : *I* est sur l'arête [*AD*], *J* et *K* sont sur les faces *DCGH* et *BCGF*. *Suggestion :* projeter *K* sur (*DCG*) parallèlement à (*BC*), en déduire le point *P* où (*IK*) perce le plan (*DCG*), la suite est facile.

En suivant la suggestion, *K* est projeté en *L* sur (*DCG*) parallèlement à (*BC*). I se projette en D évidemment. La droite (KI) coupe (LD) en P. Il reste à tracer (PJ) qui coupe [DH] en M et [HG] en R, puis la parallèle à (MI) passant par K. Cette droite coupe [GF] en T et [BC] en S. Il ne reste plus qu'à tracer le pentagone *IMRTS*.



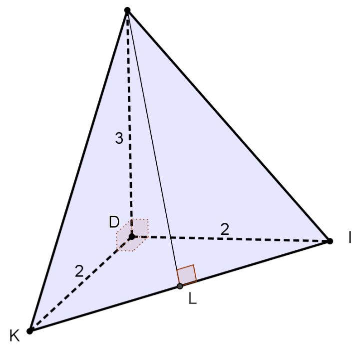
II] Tétraèdre trirectangle



Un tétraèdre *DIJK* est enlevé du cube *ABCDEFGH* de côté 4 *cm*, *I* et *K* étant les milieux de [*DH*] et [*DA*], *J* étant le point de [*DC*] tel que $DJ=\frac{3}{4}DC$.

On veut déterminer l'angle dièdre entre les faces *DIK* et *IJK*.

La vue ci-dessous montre le tétraèdre posé sur la face *DIK*.



- Prouver que $(DJ)\perp(IK)$.

$(DJ)\perp(DI)$ car c'est l'angle d'une face carrée, de même $(DJ)\perp(DK)$ donc $(DJ)\perp(DIK)$, or $(IK)\subset(DIK)$, donc $(DJ)\perp(IK)$ car une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

- On appelle *L* le pied de la hauteur issue de *J* dans le triangle *IJK*. Prouver que $(DJL)\perp(IK)$ et en déduire qu'on doit se placer dans le plan (*DJL*) pour déterminer l'angle dièdre entre *DIK* et *IJK*.

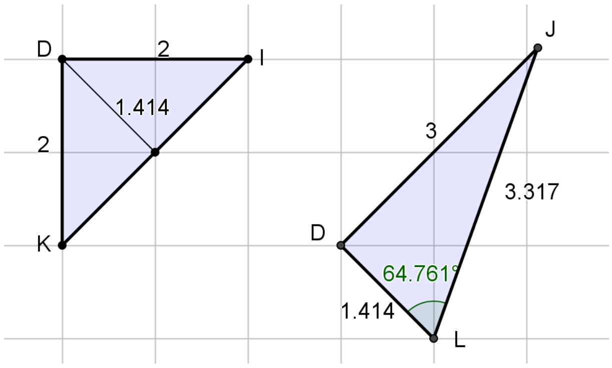
On a vu que $(DJ)\perp(IK)$ et on a aussi, par définition, $(JL)\perp(IK)$. Comme (*JL*) et (*JD*) sont sécantes, le plan (*DJL*) est donc orthogonal à (*IK*). C'est dans ce plan, orthogonal à leur droite d'intersection qu'il faut mesurer l'angle dièdre entre *DIK* et *IJK*.

- Prouver que L est également le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DIK.

Toutes les droites du plan (DJL) sont orthogonales à (IK), donc $(DL) \perp (IK)$. L est donc le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DIK

- Déterminer DL.

DIK est un triangle isocèle rectangle. La médiane/médiatrice/hauteur $[DL]$ a une longueur égale à la moitié de KI. Comme $KI = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, on a $DL = \sqrt{2}$.



- Tracer en vraie grandeur le triangle DJL.

$DJ=3$, $DL = \sqrt{2} \approx 1{,}141$ et $(DL) \perp (DJ)$.

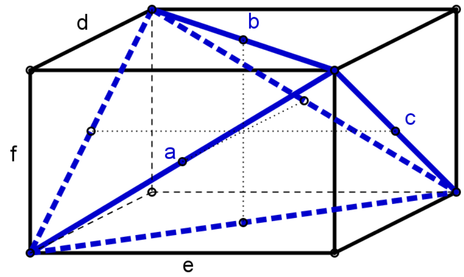
Je trace le triangle rectangle DLJ.

- Calculer l'angle $\widehat{DLJ}$ et enfin conclure.

$\tan \widehat{DLJ} = \frac{DJ}{DL} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2{,}12$ et

donc $\widehat{DLJ} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 64{,}7606\,°$ qui est l'angle dièdre entre DIK et IJK que l'on cherchait.

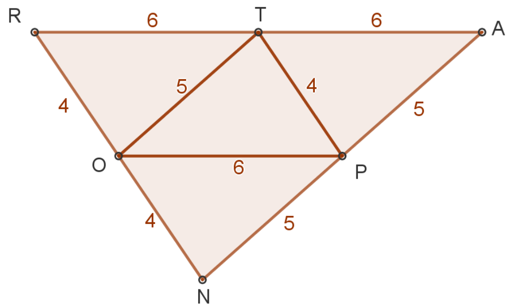
III] <u>Tétraèdre équifacial</u>



Le tétraèdre ci-contre a ses arêtes opposées deux à deux de même longueur. Les faces de ce tétraèdre sont des triangles superposables : les côtés de chacun de ces triangles mesurent a, b et c .

a) Tracer le patron d'un tel tétraèdre équifacial dont les faces triangulaires mesurent a=4, b=5 et c=6 cm.

Voilà PATRON, un tel patron : il s'agit d'un triangle RAN de côtés 8, 10 et 12 cm sur lequel on a tracé le triangle médian POT.



b) Considérons le parallélépipède rectangle de côtés d, e et f dont les diagonales mesurent a, b et c (voir figure).

Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre équifacial est $\mathcal{V} = \frac{d\,e\,f}{3}$.

Indication : procéder par soustraction, en déterminant le volume des tétraèdres qu'on enlève du parallélépipède rectangle.

Le tétraèdre équifacial s'inscrit naturellement dans ce parallélépipède rectangle. Les arêtes opposées sont de même longueur, comme les diagonales des faces opposées d'un parallélépipède rectangle. Pour calculer son volume, il suffit d'enlever au volume def du parallélépipède, ceux des quatre tétraèdres trirectangles d'arêtes a, b, c, d, e et f.

Le volume d'un tel tétraèdre trirectangles est $\dfrac{\frac{d\,e}{2} \times f}{3}$ (on considère la base formée par les côtés d, e et b et la hauteur f. On a donc : $\mathcal{V} = d\,e\,f - \dfrac{4 \times \frac{d\,e}{2} \times f}{3} = d\,e\,f - 2 \times \frac{d\,e}{3} \times f = \frac{d\,e\,f}{3}$.

c) Écrire un système de trois équations en d^2, e^2 et f^2 que doit vérifier les longueurs d, e et f (dans ces équations a^2, b^2 et c^2 sont des constantes).

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle de côtés e, f et a (il est rectangle car on est dans un rectangle) s'écrit $e^2 + f^2 = a^2$. De même, on a $d^2 + e^2 = b^2$ et $d^2 + f^2 = c^2$.

d^2, e^2 et f^2 sont donc les solutions du système suivant : $\begin{cases} e^2 + f^2 = a^2 \\ d^2 + f^2 = c^2 \\ d^2 + e^2 = b^2 \end{cases}$

<u>Bonus</u> (1,5 pt) : Résoudre ce système et vérifier que $\mathcal{V}$ peut être déterminé par la formule :

$\mathcal{V}^2 = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{72}$.

Le système est équivalent à $\begin{cases} e^2 + f^2 = a^2 \\ d^2 - e^2 = c^2 - a^2 \\ d^2 + e^2 = b^2 \end{cases}$ (on a remplacé L_2 par L_2-L_1), qui est équivalent à $\begin{cases} \quad\; e^2 + f^2 = a^2 \\ d^2 + e^2 \quad\; = b^2 \\ 2d^2 \quad\quad\;\; = b^2+c^2-a^2 \end{cases}$ (on a remplacé L_2 par L_3 et aussi L_3 par L_2+L_3).

De L_3 on déduit $\boxed{d^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

En reportant dans L_2 on a $\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+e^2=b^2$ et donc $b^2+c^2-a^2+2e^2=2b^2$ ce qui amène $2e^2=2b^2-(b^2+c^2-a^2)=b^2-c^2+a^2$ et finalement $\boxed{e^2=\frac{b^2-c^2+a^2}{2}}$.

En reportant dans L_1 on a $\frac{b^2-c^2+a^2}{2}+f^2=a^2$ et donc $b^2-c^2+a^2+2f^2=2a^2$ ce qui amène $2f^2=2a^2-(b^2-c^2+a^2)=a^2-b^2+c^2$ et finalement $\boxed{f^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}$.

NB : on aurait pu éviter de refaire deux fois le travail, puisque *d* est à *a*, *b* et *c* (*d* opposé à *a*), ce que *e* est à *c*, *b* et *a* (*e* opposé à *c*) ou *f* est à *b*, *a* et *c* (*f* opposé à *b*).

On déduit de ces expressions de d^2, e^2 et f^2 que le volume au carré $\mathcal{V}^2$ du tétraèdre équifacial est

$$\mathcal{V}^2=\frac{d^2e^2f^2}{3^2}=\frac{1}{9}\times\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\times\frac{a^2-b^2+c^2}{2}=\frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{72}.$$

Calculer le volume du tétraèdre équifacial de côtés 4, 5 et 6 *cm*.

$d^2=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{-4^2+5^2+6^2}{2}=\frac{-16+25+36}{2}=\frac{45}{2}$ d'où $d=\sqrt{\frac{45}{2}}=3\sqrt{\frac{5}{2}}=1{,}5\sqrt{10}\approx 4{,}74$ *cm*.

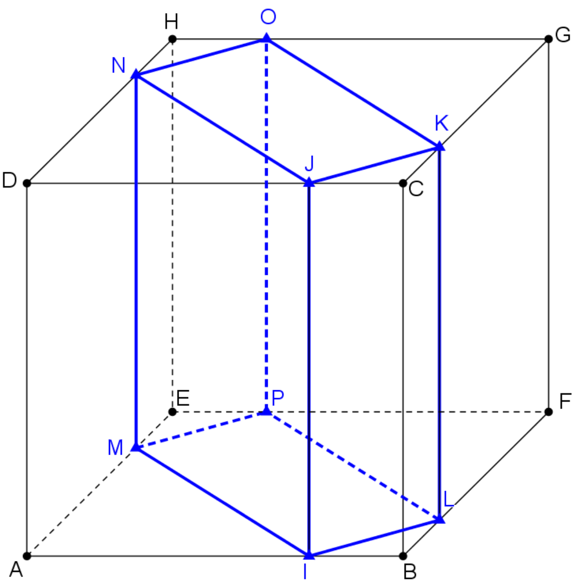
$e^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2}=\frac{16+25-36}{2}=\frac{5}{2}$ d'où $e=\sqrt{\frac{5}{2}}=0{,}5\sqrt{10}\approx 1{,}58$ *cm*.

$f^2=\frac{a^2-b^2+c^2}{2}=\frac{4^2-5^2+6^2}{2}=\frac{16-25+36}{2}=\frac{27}{2}$ d'où $f=\sqrt{\frac{27}{2}}=3\sqrt{\frac{3}{2}}=1{,}5\sqrt{6}\approx 3{,}67$ *cm*.

Le volume $\mathcal{V}$ est donc égal à $\frac{\sqrt{d^2e^2f^2}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{45}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{27}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6075}{8}}=\frac{15\sqrt{6}}{4}\approx 9{,}185587$ cm^3.

IV] Le cube du prince Rupert

Les côtés d'un cube *ABCDEFGH* mesurent 4 *cm*. Les points *I, J, K, L* sont sur les arêtes [*AB*], [*DC*], [*CG*], [*BF*] tels que *AI=DJ=GK=FL*=3 *cm*. De même, les points *M, N, O, P* sont sur les arêtes [*AE*], [*DH*], [*GH*], [*FE*] tels que *AM=DN=GO=FP*=3 *cm*. On admettra que *JKON, ILPM, JKLI* et les trois autres faces du polyèdre *IJKLMNOP* sont des rectangles.



a) Quelle est la nature du quadrilatère *OKIM* ?
Justifier votre réponse

Le quadrilatère *OKIM* est un rectangle car $(OK)\perp(KJ)$ car c'est l'angle d'une face carrée, de même $(OK)\perp(KL)$, et comme (KJ) et (KL) sont sécantes, on a $(OK)\perp(JKL)$. Or, $(IK)\subset(JKL)$, donc $(KI)\perp(OK)$ car toute droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

De même pour les trois autres angles du quadrilatère.

b) Calculer *OK* et *IK*. En déduire que *OKIM* est un carré et que celui-ci est plus grand que la face du cube.

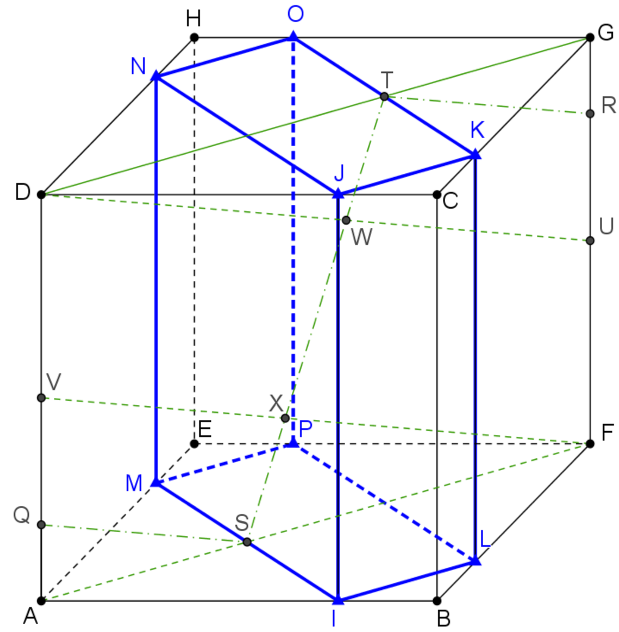
Comme *GO=GK*=3 *cm* et que *GOK* est un triangle rectangle en *G* (face carrée), $OK=3\sqrt{2}\approx 4{,}242641$ *cm*.

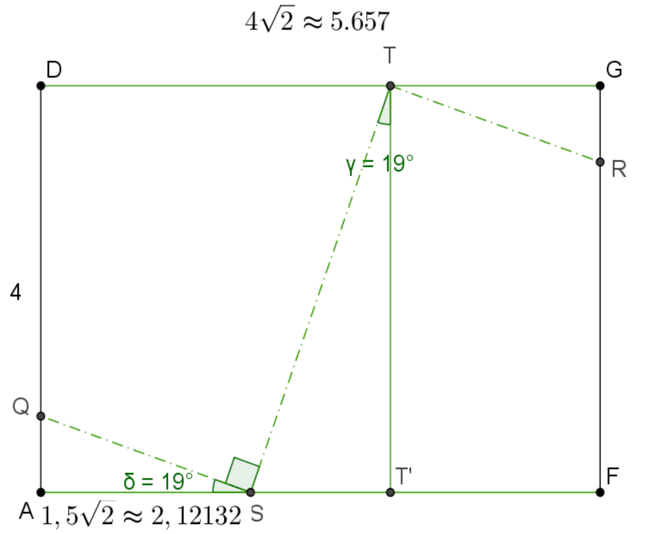
Comme *BL=BI*=1 et que *BIL* est un triangle rectangle en *B* (face carrée), $IL=\sqrt{2}\approx 1{,}414214$ *cm*.

LK=4 cm et donc, la longueur *IK* se calcule dans le triangle *ILK* rectangle en *L* par le théorème de Pythagore :

$IK=\sqrt{IL^2+LK^2}=\sqrt{2+16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\approx 4{,}242641$ *cm*. Comme *OK=IK*, le rectangle est un carré. Celui-ci est légèrement plus grand que le carré initial qui ne mesure que 4 *cm* de côté.

c) Tracer sur la copie, en vraies grandeurs, le polygone *ADGF* et placer, sur les côtés de ce polygone, les milieux *S* et *T* des segments [*IM*] et [*OK*], puis les points *Q* et *R* sur les arêtes [*AD*] et [*FG*] tels que $(QS)\perp(ST)$ et $(RT)\perp(ST)$.





ADGF est un rectangle mesurant 4 *cm* sur $4\sqrt{2}\approx 5{,}656854$ *cm*. Les points S et T se situent à $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}12132$ *cm* des extrémités *A* et *G* car *SA*=*SI*=*SM*, le triangle *MAI* étant isocèle rectangle en *A*.

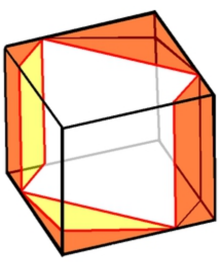
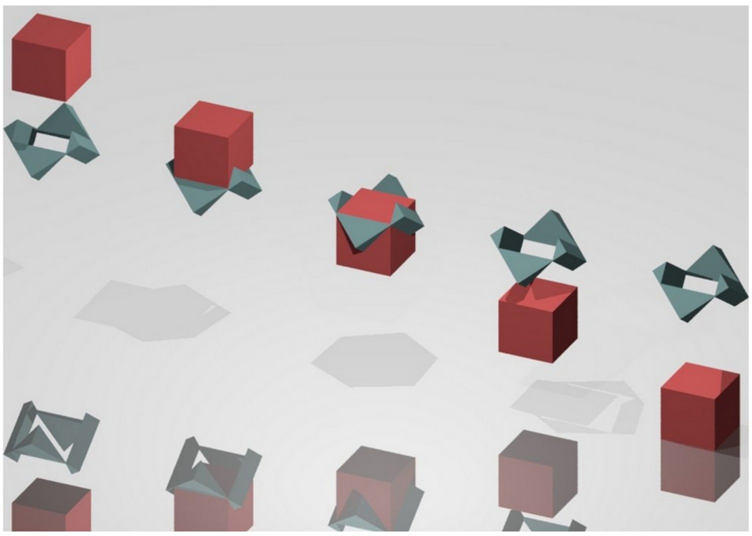
NB : On peut ainsi creuser un cube, en ne gardant que les prismes MNOPEH et IJKLBC et les tétraèdres AIMQ et GOKR, de manière à laisser passer un autre cube, plus grand que le cube initial (c'est ce cube que l'on appelle le cube du prince Rupert, car le Prince Rupert du Rhin (1619-1682) avait parié qu'un tel cube existait).

<u>Bonus</u> (1 pt) : Déterminer la longueur *AQ* par le calcul.

On peut déterminer l'angle $\widehat{ASQ}$ car il est égal à l'angle $\widehat{STT'}$ où *T'* est projeté orthogonal de *T* sur [*AF*] (c'est, en fait, le milieu de [*PL*]). On s'aperçoit de cela en considérant les trois angles adjacents de sommet S dont la somme fait 180°, l'angle $\widehat{T'ST}$ est en même temps complémentaire à $\widehat{ASQ}$ et à $\widehat{STT'}$. Ces angles sont donc égaux. $\widehat{STT'}=\cos^{-1}\dfrac{TT'}{ST}=\cos^{-1}\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ et comme $\tan\widehat{ASQ}=\dfrac{AQ}{AS}$, on a :

$$AQ=AS\tan\widehat{ASQ}=AS\tan\widehat{STT'}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\tan\left(\cos^{-1}\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)=0{,}75$$

Voilà des images associées à ce cube du prince Rupert. Celle de droite montre un essai approximatif : pour faire réellement passer un cube plus grand que le cube initial dans le trou, il faut réduire au maximum les points de jonction entre les prismes et les tétraèdres. Pas facile, même avec une imprimante 3D !


C'est tout... Je vous souhaite de bonnes vacances !