2de4	DS n°6 Espace	16/02/2017

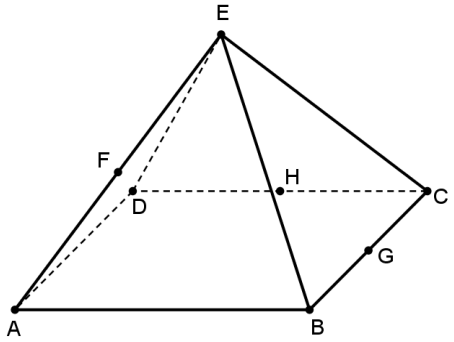
NOM Prénom ….....

Bon courage ! N'oubliez pas de rendre cette feuille avec la copie... Barème : 10 pts-4 pts-3 pts-3 pts

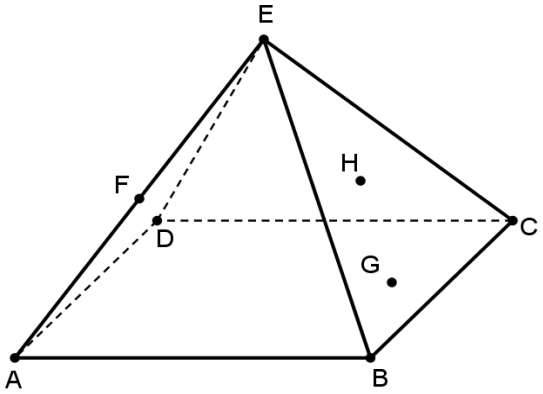
I] Droites et plans de l'espace

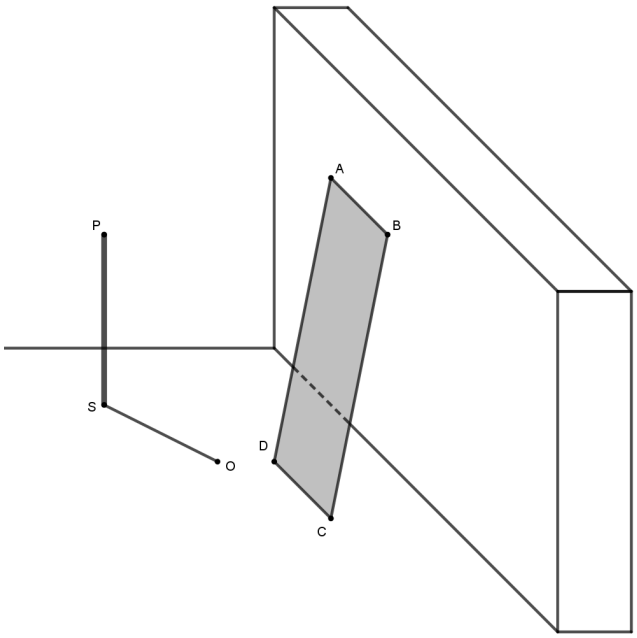
svp : segments invisibles en pointillés !

a) La pyramide *ABCDE* ci-contre est coupée par le plan (*FGH*), *F* étant sur l'arête [*AE*], *H* étant sur [*CD*] et *G* sur [*BC*].
Tracer l'intersection du plan (*FGH*) avec la face *ABE*. Tracer ensuite l'intersection de (*FGH*) avec la face *ADE*, puis, en couleur, les intersections de (*FGH*) avec les faces de la pyramide.



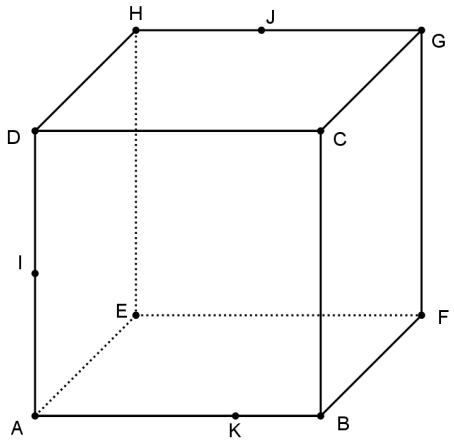
b) La pyramide *ABCDE* est, ici aussi, coupée par le plan (*FGH*), *F* étant sur l'arête [*AE*], mais *H* est sur la face *EDC* et *G* sur la face *ABCD*.
Projeter *G* et *H* sur le plan (*ADE*) parallèlement à la droite (*DC*). Placer alors le point *P* où la droite (*GH*) coupe le plan (*ADE*). Tracer ensuite l'intersection de (*FGH*) avec la face *ADE*, puis, en couleur, les intersections de (*FGH*) avec les faces de la pyramide.

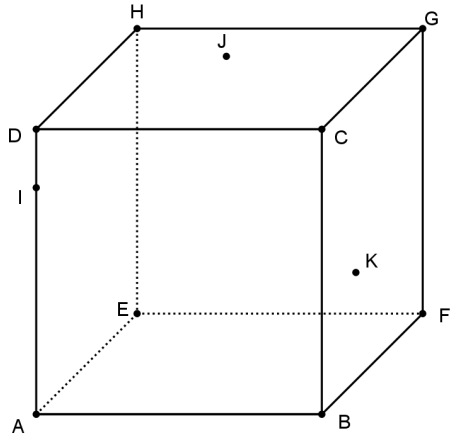




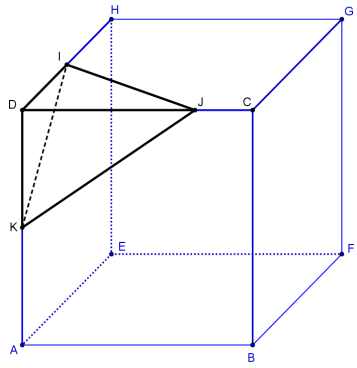
c) *ABCD* est une planche appuyée à un mur selon son côté [*AB*], le côté opposé reposant au sol. La scène est éclairée par le soleil, ce qui projette des ombres : le sommet *P* d'un piquet vertical [*SP*] est ainsi projeté en un point *O* du sol. On demande de construire l'ombre de la planche sur le sol et le mur.
Indication : Faire comme si le mur était transparent, chercher la projection de *A*, puis celle de *B*...

d) *ABCDEFGH* est un cube coupé par un plan (*IJK*). Dans les cas ci-dessous, construire l'intersection de (*IJK*) et des faces du cube.
1er cas : *I*, *J* et *K* sont sur les arêtes [*AD*], [*HG*] et [*AB*].
2ème cas : *I* est sur l'arête [*AD*], *J* et *K* sont sur les faces *DCGH* et *BCGF*. *Suggestion :* projeter *K* sur (*DCG*) parallèlement à (*BC*), en déduire le point *P* où (*IK*) perce le plan (*DCG*), la suite est facile.



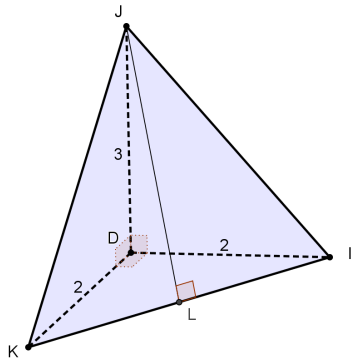


II] Tétraèdre trirectangle



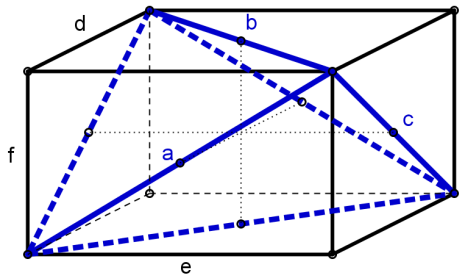
Un tétraèdre *DIJK* est enlevé du cube *ABCDEFGH* de côté 4 *cm*, *I* et *K* étant les milieux de [*DH*] et [*DA*], *J* étant le point de [*DC*] tel que $DJ = \frac{3}{4} DC$.
On veut déterminer l'angle dièdre entre les faces *DIK* et *IJK*.
La vue ci-dessous montre le tétraèdre posé sur la face *DIK*.

- Prouver que $(DJ) \perp (IK)$.
- On appelle *L* le pied de la hauteur issue de *J* dans le triangle *IJK*. Prouver que $(DJL) \perp (IK)$ et en déduire qu'on doit se placer dans le plan (*DJL*) pour déterminer l'angle dièdre entre *DIK* et *IJK*.
- Prouver que *L* est également le pied de la hauteur issue de *D* dans le triangle *DIK*.
- Déterminer *DL*.
- Tracer en vraie grandeur le triangle *DJL*.
- Calculer l'angle $\widehat{DLJ}$ et enfin conclure.



III] Tétraèdre équifacial

Le tétraèdre ci-contre a ses arêtes opposées deux à deux de même longueur. Les faces de ce tétraèdre sont des triangles superposables : les côtés de chacun de ces triangles mesurent *a*, *b* et *c* .



a) Tracer le patron d'un tel tétraèdre équifacial dont les faces triangulaires mesurent *a*=4, *b*=5 et *c*=6 *cm*.
b) Considérons le parallélépipède rectangle de côtés *d*, *e* et *f* dont les diagonales mesurent *a*, *b* et *c* (voir figure).

Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre équifacial est $\mathcal{V} = \frac{def}{3}$.

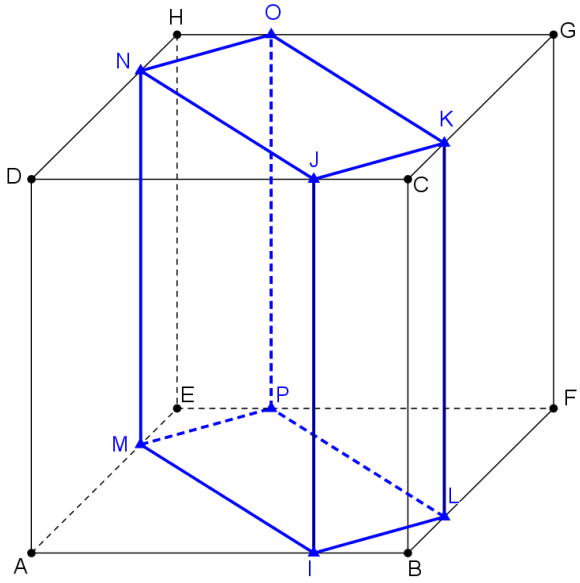
Indication : procéder par soustraction, en déterminant le volume des tétraèdres qu'on enlève du parallélépipède rectangle.

c) Écrire un système de trois équations en d^2, e^2 et f^2 que doit vérifier les longueurs *d*, *e* et *f* (dans ces équations a^2, b^2 et c^2 sont des constantes).

Bonus (2 pts) : Résoudre ce système et vérifier que $\mathcal{V}$ peut être déterminé par la formule :
$\mathcal{V}^2 = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{72}$. Calculer le volume du tétraèdre équifacial de côtés 4, 5 et 6 *cm*.

IV] Le cube du prince Rupert

Les côtés d'un cube *ABCDEFGH* mesurent 4 *cm*. Les points *I*, *J*, *K*, *L* sont sur les arêtes [*AB*], [*DC*], [*CG*], [*BF*] tels que *AI*=*DJ*=*GK*=*FL*=3 *cm*. De même, les points *M*, *N*, *O*, *P* sont sur les arêtes [*AE*], [*DH*], [*GH*], [*FE*] tels que *AM*=*DN*=*GO*=*FP*=3 *cm*. On admettra que *JKON*, *ILPM*, *JKLI* et les trois autres faces du polyèdre *IJKLMNOP* sont des rectangles.



a) Quelle est la nature du quadrilatère *OKIM* ?
Justifier votre réponse
b) Calculer *OK* et *IK*. En déduire que *OKIM* est un carré et que celui-ci est plus grand que la face du cube.
c) Tracer sur la copie, en vraies grandeurs, le polygone *ADGF* et placer, sur les côtés de ce polygone, les milieux *S* et *T* des segments [*IM*] et [*OK*], puis les points *Q* et *R* sur les arêtes [*AD*] et [*FG*] tels que $(QS) \perp (ST)$ et $(RT) \perp (ST)$.

NB : On peut ainsi creuser un cube, en ne gardant que les prismes MNOPEH et IJKLBC et les tétraèdres AIMQ et GOKR, de manière à laisser passer un autre cube, plus grand que le cube initial (c'est ce cube que l'on appelle le cube du prince Rupert, car le Prince Rupert du Rhin (1619-1682) avait parié qu'un tel cube existait).

Bonus (1 pt) : Déterminer la longueur *AQ* par le calcul.

C'est tout... Je vous souhaite de bonnes vacances !