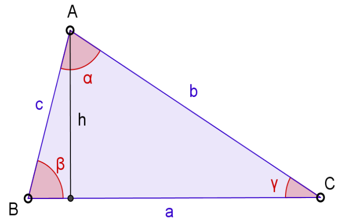
TD n°1 de trigonométrie

1) Loi des sinus



Le triangle ABC est acutangle : l'angle $\widehat{CAB}$ a une mesure α comprise entre 0° et 90°. De même, pour les deux autres angles $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$.

a) Montrer que l'aire S du triangle ABC se calcule à l'aide de la formule $S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin\beta$, notée aussi, avec les notations de la figure, $\frac{ac\sin\beta}{2}$.

La formule donnant l'aire d'un triangle est $S = \frac{Base \times hauteur}{2}$.

La base est ici $BC=a$; la hauteur correspondante h se calcule avec le sinus de $\beta = \widehat{ABC}$: $\sin\beta = \frac{h}{c}$

On a donc $h = c\sin\beta$ et $S = \frac{a \times c\sin\beta}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}$.

b) Montrer que l'on a aussi, avec les notations de la figure, $S = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

On peut refaire la même chose en remplaçant h par $b\sin\gamma$; cela donne $S = \frac{a \times b\sin\gamma}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

Au passage, remarquons que ces deux façons de calculer h nous donne déjà une partie de la loi des sinus : comme on a $h = c\sin\beta = b\sin\gamma$, on obtient $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

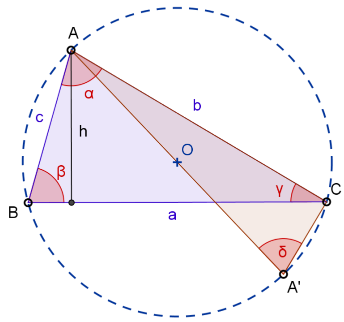
Pour l'autre expression, on peut toujours dire qu'il suffit d'intervertir les points A et B (puisqu'il ne s'agit que des noms donnés aux points), et en même temps a et b et aussi α et β. Sinon, on peut raisonner sur une autre hauteur, celle qui est issue de B sera notée h'. La base est alors $AC=b$; la hauteur correspondante h' se calcule avec le sinus de α : $\sin\alpha = \frac{h'}{c}$ d'où, en remplaçant h' par $c\sin\alpha$, $S = \frac{b \times c\sin\alpha}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$.

c) En déduire la relation suivante, dite loi des sinus : $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{2S}{abc}$.

On a $S = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$.

Il suffit de multiplier ces trois égalités par $\frac{2}{abc}$, on obtient : $\frac{2S}{abc} = \frac{2ac\sin\beta}{2abc} = \frac{2ab\sin\gamma}{2abc} = \frac{2bc\sin\alpha}{2abc}$.

Simplifions, on a finalement : $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}$. Notons que cette loi des sinus peut aussi s'écrire à l'envers, en inversant les rapports : $\frac{abc}{2S} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$.



d) Si on note A' le symétrique de A par rapport à O, le centre du cercle circonscrit à ABC, rappeler la valeur des angles $\widehat{A'CA}$ et $\widehat{CA'A}$.

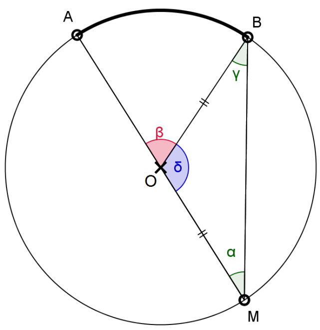
Comme le triangle $AA'C$ est inscrit dans un cercle et que $[AA']$ est un diamètre de ce cercle, l'angle $\widehat{A'CA}$ est droit.

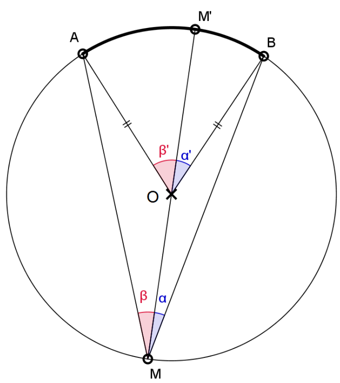
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AA'C}$ sont inscrits dans un même cercle et interceptent le même arc de cercle AC. Ces angles ont donc une même mesure (égale à la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOC}$ qui intercepte le même arc). On en conclut que β=δ.

En déduire la valeur de $\frac{\sin\beta}{b}$ en fonction de R, le rayon du cercle circonscrit.

Le sinus de δ se calcule en fonction de R, le rayon du cercle circonscrit : $\sin\delta = \frac{AC}{AA'} = \frac{b}{2R}$, et comme β=δ, on a $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, d'où $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{1}{2R}$. On peut donc compléter la loi des sinus avec ce dernier rapport :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{2S}{abc} = \frac{1}{2R} \text{, ou dans l'autre sens } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$





Un petit rappel sur ce théorème de l'angle inscrit (qui est normalement étudié en classe de 3ème).

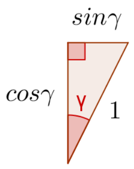
Examinons la 1ère figure à droite : M est diamétralement opposés à A ; les angles α et γ sont égaux car le triangle OMB est isocèle en O. L'angle $\delta = \widehat{MOB}$ vaut donc $180 - 2\alpha$. L'angle au centre $\beta = \widehat{AOB}$, qui est le supplémentaire de δ, vaut donc 2α.

Examinons maintenant la 2ème figure de droite : M est diamétralement opposés à un point qu'on nomme M' ; l'angle $\widehat{AMB}$ se décompose en deux angles adjacents de mesures α et β. En appliquant la propriété que l'on vient de voir, on en déduit que les angles au centre sont tels que α'=2α et β'=2β. Donc, on a finalement α'+β'=2(α+β).

D'autres cas de figure peuvent se présenter, mais dans tous les cas, on retiendra que l'angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit mesure le double de celui-ci. La version de ce théorème qui nous intéresse ici, pour la loi des sinus, énonce que *deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont des mesures égales* (à la moitié de l'angle au centre mais cet angle ne nous intéresse pas directement).

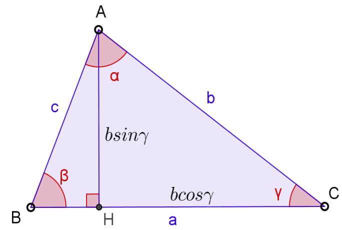
2) Loi des cosinus

On raisonne ici aussi sur un triangle acutangle *ABC*.
Les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.
a) Si on note *H* le pied de la hauteur issue de *A*, montrer que $AH = b\sin\gamma$ et que $CH = b\cos\gamma$.



Comme $\sin\gamma = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{b}$, on a $AH = b\sin\gamma$;
de même, on a $\cos\gamma = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}$, et donc $CH = b\cos\gamma$.

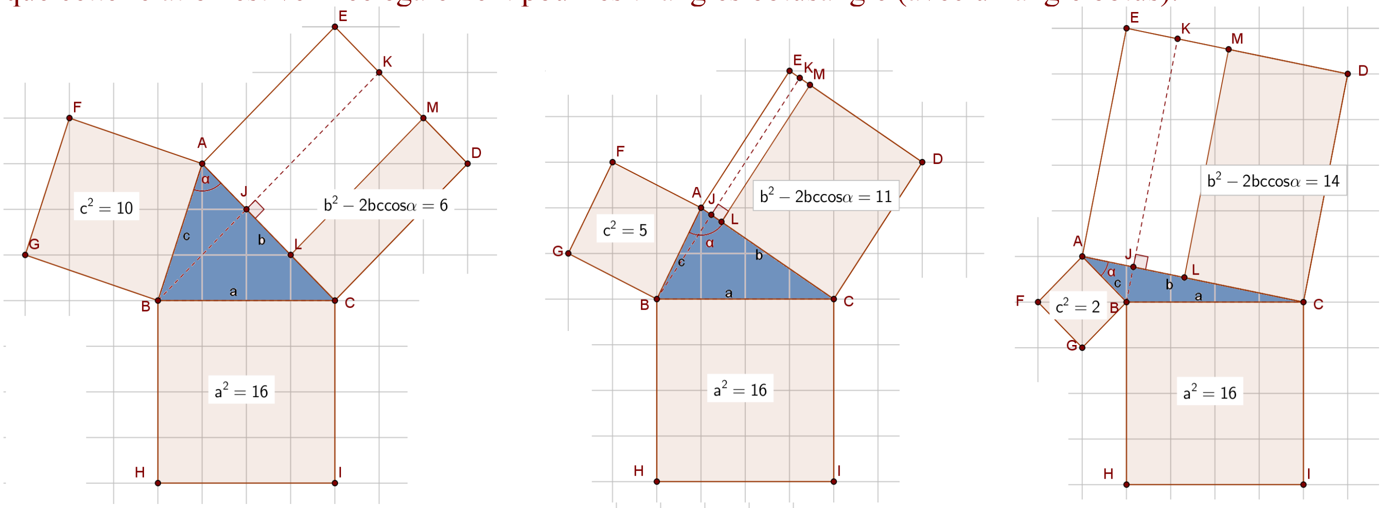
En déduire *BH* en fonction de *a*, *b* et γ, puis montrer* que l'on a $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Cette relation est appelée loi des cosinus ou bien théorème d'Al-Kashi ou encore théorème de Pythagore généralisé.



* il faut utiliser la propriété qui traduit le théorème de Pythagore en trigonométrie $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$

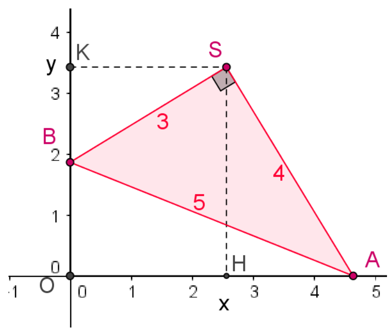
Comme *BH*=*BC*-*CH*, on a $BH = a - b\cos\gamma$.
Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle : *AB²*=*BH²*+*AH²*, donc $c^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + (b\sin\gamma)^2$.
Développons : $c^2 = a^2 - 2ab\cos\gamma + (b\cos\gamma)^2 + (b\sin\gamma)^2 = a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2[(\cos\gamma)^2 + (\sin\gamma)^2]$.
Comme c'était indiqué dans l'énoncé, on a $(\cos\gamma)^2 + (\sin\gamma)^2 = \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ (appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle d'hypoténuse 1, représenté à gauche).
La relation se simplifie donc en ce qui est indiqué : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

b) Écrire les deux autres égalités qui traduisent la loi des cosinus dans le triangle *ABC*.
Les deux autres égalités qui traduisent la loi des cosinus s'obtiennent en échangeant les lettres *A*, *B*, *C* de la même façon que *a*, *b*, *c* et aussi α, β, γ : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ et $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$. Remarquer que lorsqu'un angle est droit, mettons que l'on a α=90°, dans ce cas le cosinus de l'angle droit valant 0, le terme qui le contient, $2bc\cos\alpha$, disparaît de la somme qui devient $a^2 = b^2 + c^2$, c'est-à-dire la relation de Pythagore. La figure ci-dessous nous donne quelques cas de figure : nous avons représenté le rectangle d'aire $b^2 - 2bc\cos\alpha$ en enlevant au carré d'aire b^2, deux rectangles de côtés *b* et $c\cos\alpha$ (cette longueur est égale à celle du segment [*AJ*] où *J* est le pied de la hauteur issue de *B*). On voit, sur la figure de droite, que cette relation est vérifiée également pour les triangles obtusangle (avec un angle obtus).

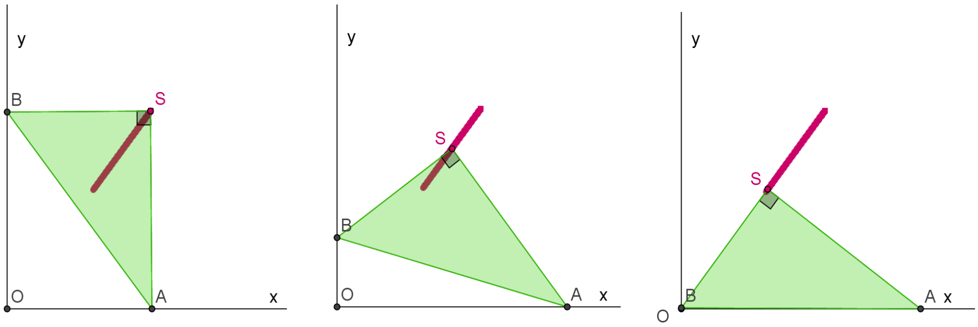


3) Glissement d'une équerre

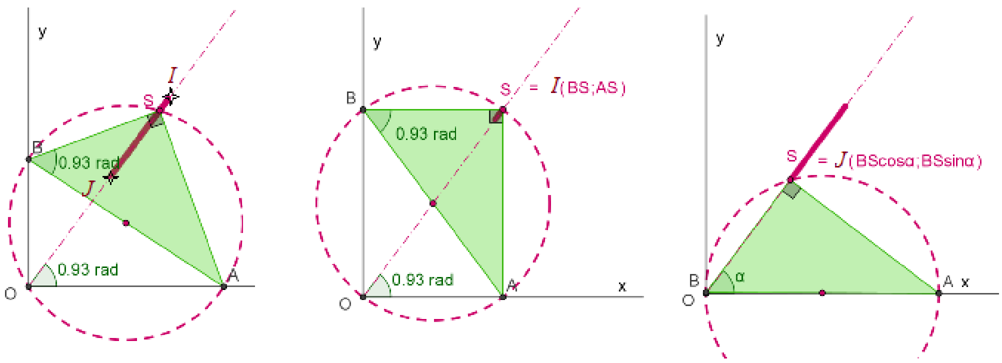
Les extrémités *A* et *B* d'une équerre *ABS* glissent le long de deux demi-droites perpendiculaires [*Ox*) et [*Oy*). Nous nous intéressons à la trajectoire du sommet *S* (le sommet de l'angle droit) lors du glissement.
a) Réaliser l'expérience avec une vraie équerre, dessiner plusieurs positions du sommet lors du glissement de l'équerre. Montrer qu'au cours de ce déplacement, l'angle $\widehat{AOS}$ reste constant et égal à l'un des angles aigus de l'équerre.



Ici, il faut repérer la cocyclicité des points *A, O, B* et *S*.
Les angles droits de la figure nous indiquent en effet que *AOB* est un triangle rectangle en *O*, donc que *O* est sur le cercle de diamètre [*AB*]. De même, l'équerre *ASB* est également un triangle rectangle en *S*, donc *S* est aussi sur le cercle de diamètre [*AB*].
Les angles $\widehat{SOA}$ et $\widehat{SBA}$ interceptent donc le même arc de ce cercle, et sont par conséquent égaux. Comme $\widehat{SBA}$ est constant, l'angle $\widehat{SOA}$ est constant aussi. Le point *S* se déplace donc sur une demi-droite d'origine *O* comme on le voit sur notre illustration.



b) *S* se déplace donc, en réalité, sur un segment [*IJ*]. En supposant que les côtés de l'équerre mesurent 3, 4 et 5 unités et qu'ils sont disposés comme la figure les montre, déterminer les coordonnées de *I* et de *J*.
En fait, le point *S* ne se déplace pas en dehors d'un segment [*IJ*] dont on demande de déterminer les coordonnées des extrémités. Pour cela, on examine les deux situations extrêmes de l'échelle (voir figure ci-dessous). Le sommet le plus haut est noté *I* : l'équerre est sur la pointe *A*, le côté le plus long [*AS*] vertical. Le sommet le plus bas est noté *J* : l'équerre est posée sur son hypoténuse [*AB*] horizontale.
On a : *I*(*BS* ; *AS*) et *J*($BS\cos\widehat{SBA}$; $BS\sin\widehat{SBA}$).
Avec une équerre de dimension 3, 4 et 5, comme sur notre illustration et comme il est dit dans l'énoncé, l'angle $\widehat{SBA}$ mesure environ 53° : $\widehat{SBA}=\cos^{-1}\left(\frac{BS}{BA}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53{,}13\,°\approx 0{,}9273\,rad$. Mais cette mesure n'est pas nécessaire pour déterminer les coordonnées des extrémités du segment sur lequel se déplace l'équerre. Ces coordonnées sont : *I*(3 ; 4) et *J*($\frac{3\times3}{5}=1{,}8$; $\frac{3\times4}{5}=2{,}4$). Les valeurs de $\cos\widehat{SBA}$ et $\sin\widehat{SBA}$ ne sont, en effet, pas difficile à obtenir : $\cos\widehat{SBA}=\frac{BS}{BA}=\frac{3}{5}=0{,}6$ et $\sin\widehat{SBA}=\frac{AS}{BA}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

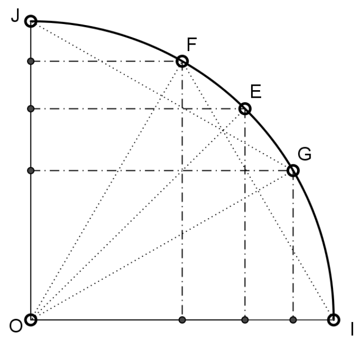


4) Valeurs trigonométriques remarquables

Un point *M* du quart de cercle *IJ* de rayon *OI*=1 ci-contre peut être repéré par des coordonnées qui ne dépendent que de $x=\widehat{IOM}$. On notera *M*(cos *x* ; sin *x*). Ce principe se prolonge sur ℝ pour y définir les fonctions *cos* et *sin* alors que *tan* reste défini par la relation $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

Retrouver les valeurs exactes des angles suivants :
(il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore)

angle	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞



Pour 30° et 60°, remarquer les triangles équilatéraux *OGJ* et *OFI* qui ont pour hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (car les côtés du triangle valent 1). Pour 45°, remarquer que le triangle est isocèle-rectangle ; il s'agit d'un demi-carré d'hypoténuse 1 : les deux autres côtés sont égaux.