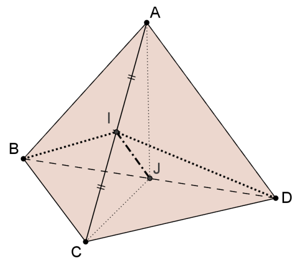
TD n°3 sur l'orthogonalité dans l'espace

1) Angles dièdres

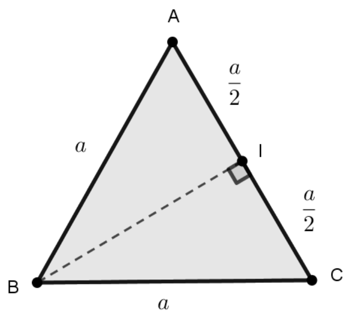
Un angle dièdre est l'angle formé par deux faces d'un polyèdre ou par deux plans. Pour mesurer un angle dièdre, il faut se placer dans un *plan orthogonal à la droite d'intersection* de ces deux plans.

a) Tétraèdre régulier



Le tétraèdre $ABCD$ est régulier ($AB=AC=AD=BC=CD=DB$).
I et J sont les milieux des arêtes opposées $[AC]$ et $[BD]$.
(AC) est-il orthogonal à (BID) ? Oui. Pourquoi $ABCD$ étant un tétraèdre régulier, ses faces sont des triangles équilatéraux. L'arête (AC) est orthogonale aux deux hauteurs (BI) et (ID) des faces ABC et ACD. Comme (BI) et (ID) sont sécantes en I (B étant distinct de D, ces droites sont distinctes aussi), l'arête (AC) est orthogonale au plan (BID) qu'elles définissent.

Montrer que si $AB=a$ alors $BI=a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer alors $BI=ID$ lorsque $AB=5$ *cm*.
Tracer, en vraie grandeur (sans la déformation due à la perspective), le triangle BID.
Montrer que l'angle $\widehat{BID}$, qui mesure l'angle dièdre entre les faces (ABC) et (ACD), vaut à peu près 70°.



Pour déterminer la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a, on retiendra cette formule $h=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui vient du théorème de Pythagore : dans le triangle BIC rectangle en I, on connaît $BC=a$ et $CI=\frac{a}{2}$ (car I est le milieu de $[CA]$).

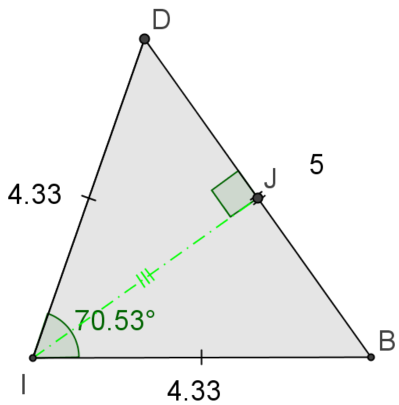
On peut donc écrire $BI^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{(4-1)a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$.

Par conséquent, comme une longueur est positive, $h=BI=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2}$.

Avec $AB=5$ *cm*, on trouve $BI=ID=\frac{5\sqrt{3}}{2}\approx 4{,}33$ *cm.*

On trace alors la figure ci-contre : le triangle BID en vraie grandeur.

L'angle dièdre entre les faces (ABC) et (ACD) se mesure sur le plan (BID) qui est orthogonal à l'intersection (AC) de ces plans.



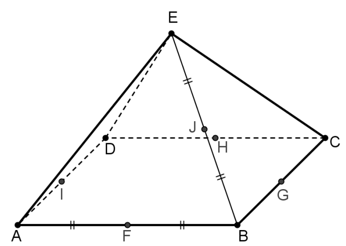
Pour calculer $\widehat{BID}$, calculons $\sin\widehat{BIJ}=\frac{BJ}{BI}=\frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

On a donc $\widehat{BIJ}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx 35{,}26438968°$, et on en déduit que l'angle dièdre entre deux faces quelconques d'un tétraèdre régulier vaut : $\widehat{BID}=2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx 70{,}52877937°$

Remarque : l'angle $\widehat{BDI}$, qui est complémentaire de $\widehat{BIJ}$, n'est pas un angle dièdre du tétraèdre car ce n'est pas un angle entre deux faces (c'est l'angle entre une arête et une face du tétraèdre).

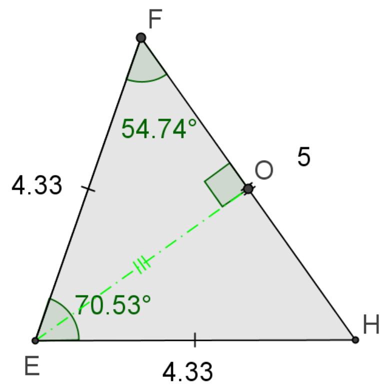
b) Pyramide régulière à base carrée

La pyramide $ABCDE$ est régulière : la base $ABCD$ est carrée et les faces triangulaires sont équilatérales. On a donc $AB=BC=CD=DA=EA=EB=EC=ED$. On nomme F, G, H et I les milieux des côtés de la base et J, K, L et M ceux des arêtes convergeant vers le sommet E (voir la figure).



b-1) On veut déterminer l'angle dièdre entre les faces (EAB) et (ABC).

- Justifier qu'on doit se placer dans (EFH).
- Tracer à main levée le triangle EFH en vraie grandeur.
- Déterminer $\widehat{EFH}$.



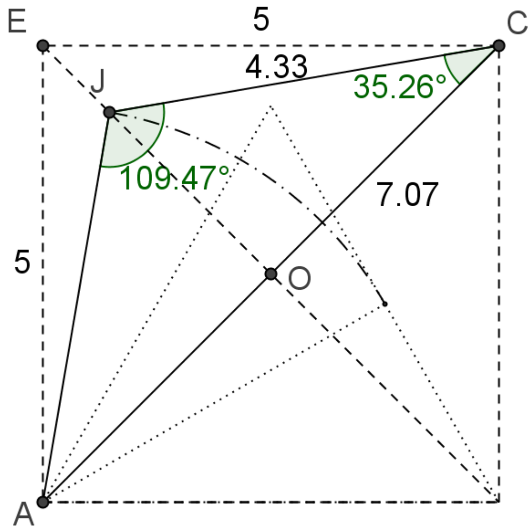
(AB) est orthogonale à (EF) car ce sont la base et la hauteur d'un triangle équilatéral ; de plus, (AB) est orthogonale à (FH), car (FH) est la médiatrice du côté [AB] de la base carrée $ABCD$. Comme (AB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EFH) qu'elles définissent, cette droite est orthogonale à ce plan. L'angle $\widehat{EFH}$ est donc un des angles dièdres de la pyramide, celui qui sépare la base et une de ses quatre faces latérales triangulaires.
EF est la hauteur du triangle équilatéral ABE de côté a. Nous avons déjà vu que cette longueur vaut $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (le raisonnement et la formule qui en découle sont valables pour tous les triangles équilatéraux d'hier et de demain).
Pour l'angle $\widehat{EFH}$, la figure est la même que dans le cas précédent. Il suffit de changer le nom des points. Cette fois, on s'intéresse à l'angle complémentaire de l'angle $\widehat{OEF}$ calculé précédemment. La mesure du côté de la pyramide n'a aucune importance : on pourrait la noter a ou bien prendre une valeur particulière comme 1 ou 5 (c'est ce que nous avons choisi pour les mesures affichées sur notre illustration).
Dans le triangle FOE, rectangle en O (O est le milieu de [FH]), on a :

$$\cos\widehat{EFH}=\cos\widehat{EFO}=\frac{\frac{FH}{2}}{FE}=\frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et donc } \widehat{EFH}=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx 54{,}73561032°.$$

L'angle dièdre entre la base carrée et une des faces latérales de la pyramide mesure donc environ $54{,}7°$. Bien sûr, comme nous l'avons remarqué, la complémentarité des angles $\widehat{EFH}$ et $\widehat{OEF}$ nous permettrait de donner le résultat directement : $\widehat{EFH}=90°-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx(90-35{,}26438968)°$.

b-2) On veut déterminer l'angle dièdre entre les faces (EAB) et (EBC).

- Dans quel plan doit-on se placer ?
- Tracer à main levée, en vraie grandeur, la section de la pyramide par ce plan.
- Déterminer l'angle dièdre entre (EAB) et (EBC).



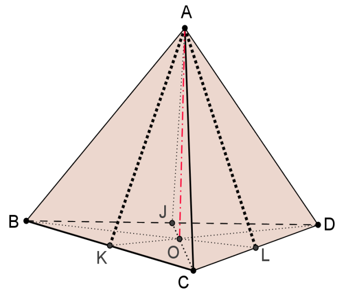
(EB) est orthogonale à (AJ) car ce sont la base et la hauteur d'un triangle équilatéral ; de même, (EB) est orthogonale à (JC). Comme (EB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AJC) qu'elles définissent, cette droite est orthogonale à ce plan. L'angle $\widehat{AJC}$ est donc un autre des angles dièdres de la pyramide : celui qui sépare deux faces latérales adjacentes.
Nous avons représenté sur un même graphique :

- le triangle AEC (noter la présence de l'angle droit en E)
- le triangle AJC dans lequel nous allons calculer la 2$^{\text{ème}}$ sorte d'angle dièdre de la pyramide. AJC est isocèle par construction et $AJ=JC=AB\frac{\sqrt{3}}{2}$ (hauteur d'un triangle équilatéral).

On a $\sin\widehat{AJO}=\frac{\frac{AC}{2}}{AJ}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ et donc $\widehat{AJC}=2\times\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\approx 109{,}4712206°$.

L'angle dièdre entre les faces latérales de la pyramide est environ de $109{,}5°$.
Vous remarquerez que cette valeur est le double de l'autre angle dièdre. Car, si l'on dispose deux pyramides régulières à base carrée telles que $ABCDE$, on obtient un polyèdre régulier à huit faces triangulaires interchangeables, appelé octaèdre régulier (un des cinq « solides de Platon » avec le tétraèdre régulier, le cube, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier) qui est étudié plus particulièrement dans le DM n°6.

2) Hauteurs de pyramides



a) Pour déterminer le volume d'une pyramide on a besoin de déterminer sa hauteur qui est la distance entre le sommet de la pyramide et la projection orthogonale de ce sommet sur le plan de la base (*le pied de la hauteur*).

Le tétraèdre $ABCD$ est régulier ; O est le centre de BCD. K, L et J sont les milieux des arêtes $[BC]$, $[CD]$ et $[DB]$.

- Montrer que (AKD) est orthogonal à (BC).
- En déduire que (AO) est orthogonale à (BC).

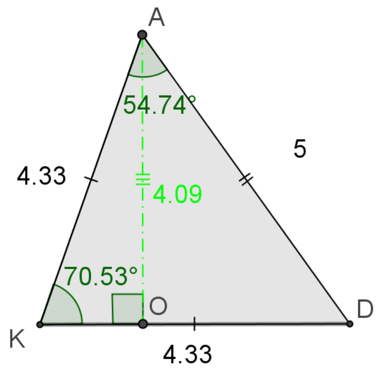
(BC) est orthogonale à (AK) car ce sont la base et la hauteur d'un triangle équilatéral ; de même, (BC) est orthogonale à (KD). Comme (BC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AKD) qu'elles définissent, cette droite est orthogonale à ce plan. Elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (AO).

On montre, de même, que (AO) est orthogonale à (CD).

En intervertissant B et D, (AO) est orthogonale à (CD).

En déduire que (AO) est orthogonale à la base (BCD) de la pyramide.

Comme (AO) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD) qu'elles définissent, cette droite est orthogonale à ce plan.



Déterminer alors la hauteur AO de la pyramide lorsque $AB=5\ cm$ (représenter à main levée, en vraie grandeur, le triangle AKD).

On peut envisager deux méthodes, selon que l'on utilise l'angle-dièdre $\widehat{AKD}$ (il a été calculé à la question précédente) ou qu'on ne l'utilise pas.

1ère méthode : AO est calculé par la trigonométrie sachant que l'angle dièdre $\widehat{AKD}$ mesure $2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})\approx 70{,}5°$. Comme $\sin\widehat{AKD}=\frac{AO}{AK}$, on a :

$$AO=AK\sin\widehat{AKD}=5\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\left(2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})\right)\approx 4{,}08248\ cm$$

2ème méthode : KO est calculé en remarquant que O est le centre de gravité du triangle équilatéral BCD. On rappelle que le centre de gravité d'un triangle (quelconque) est toujours situé au 1/3 de la médiane, en partant du milieu. En d'autres termes, comme $[KD]$ est une médiane du triangle BCD, joignant le sommet D au milieu opposé K, on a :

$KO=\frac{1}{3}KD=\frac{1}{3}\times 5\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2\sqrt{3}}$ et ensuite, on calcule AO avec le théorème de Pythagore :

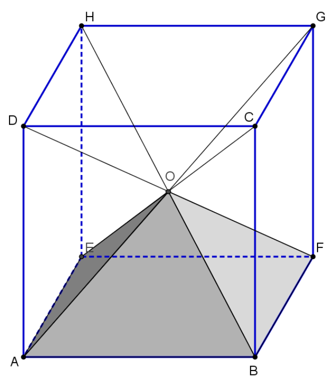
$AO=\sqrt{KA^2-KO^2}=\sqrt{(5\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{5}{2\sqrt{3}})^2}$ et donc $AO=\sqrt{\frac{75}{4}-\frac{25}{12}}=\sqrt{\frac{200}{12}}=\frac{10}{\sqrt{6}}\approx 4{,}08248\ cm$.

En déduire le volume du tétraèdre de côté 5 cm.

En utilisant la formule $Volume=\frac{1}{3}\times Base\times hauteur$, le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide est égal à :

$$\frac{1}{3}\times\frac{5\times\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2}\times\frac{10}{\sqrt{6}}=\frac{5^3}{6\sqrt{2}}\approx 14{,}73139\,cm^3$$

b) Les quatre grandes diagonales d'un cube $ABCDEFGH$ découpent celui-ci en six pyramides isométriques à bases carrées telles que $ABFEO$ (voir figure).

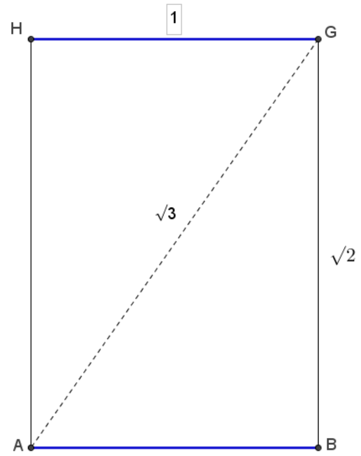


- $AB=1\ m$. Combien mesurent les arêtes de la pyramide convergeant vers O ?
- Montrer que l'angle $\widehat{AOB}$ mesure environ 70°.
- Où doit-on placer le point P sur l'arête $[OB]$ pour que le plan (APF) soit orthogonal à (OB) ? Déterminer alors la longueur $AP=PF$.
- Calculer l'angle dièdre entre les faces triangulaires des pyramides.

Les arêtes des pyramides qui partent du sommet O sont des moitiés de grandes diagonales du cube. Par exemple, $[OB]$ est la moitié de la diagonale $[HB]$. Ces grandes diagonales mesurent $a\sqrt{3}$ pour un cube de côté a. Pour justifier ce résultat, on doit se placer dans un plan diagonal du cube qui

contient ce segment, par exemple dans le plan (*ABG*) qui contient le rectangle *ABGH*.
Comment sait-on que c'est un rectangle ?
(*HG*) est orthogonal à (*CG*) et à (*GF*) donc au plan (*CGF*), d'où on tire que (*GB*) est orthogonal à (*HG*), car c'est une droite d'un plan orthogonal à cette droite.
Nous avons tracé ce plan diagonal en vraie grandeur dans le cas où $a=1$.
Pour déterminer $HB=AG$, la grande diagonale du cube, on applique le théorème de Pythagore :

$$HB=\sqrt{HA^2+AB^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}\approx 1{,}732\ m.$$

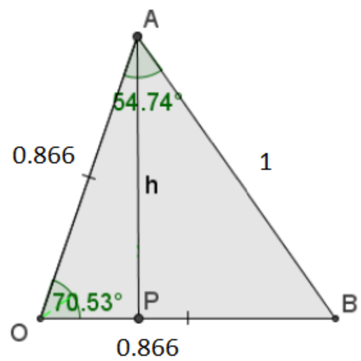


Pour conclure, les arêtes de la pyramide *ABFEO* sont de deux types : quatre sont les bords de la base et mesurent $a=1\ m$; les quatre autres partent du sommet *O* et mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}866\ m$.

Montrons que l'angle $\widehat{AOB}$ mesure environ 70°. Encore cette valeur de 70° ! Y aurait-il un rapport mystérieux avec l'angle dièdre du tétraèdre ou bien est-ce tout simplement une coïncidence ?
Le triangle *AOB* est isocèle en *O* et ses côtés sont égaux à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et *a*, exactement comme le triangle *BID* de la question I-a de ce TD n°3. La seule chose qui change c'est le nom des points et la valeur du côté a qui est ici de 1 *m* alors qu'il était de 5 *cm* dans la question I-a.
Le résultat est donc le même $\widehat{AOB}=2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})\approx 70{,}52877937°$.

Pour que le plan (*APF*) soit orthogonal à (*OB*), il faut que *P* soit le pied de la hauteur issue de *A* dans le triangle *AOB*. De cette manière on aura l'orthogonalité de (*AP*) avec (*OB*). On aura, par raison de symétrie (*A* et *F* sont interchangeables lorsqu'on considère le tétraèdre *ABFO*), l'orthogonalité de (*FP*) avec (*OB*). Le plan (*APF*) sera alors orthogonal à l'intersection (*OB*) des deux faces.
Si on n'est pas convaincu par cet argument de symétrie, on peut montrer l'orthogonalité de (*AF*) avec (*OB*) : celle-ci vient du fait que (*OB*) est confondue avec (*HB*) la grande diagonale du cube, incluse dans le plan diagonal (*HCB*). Ce plan diagonal étant orthogonal à (*AF*) − je vous laisse le soin de vérifier cela − on en déduit l'orthogonalité de (*AF*) avec (*OB*).
Pour résumer : $(AF)\perp(OB)$ et $(AP)\perp(OB)$, donc $(AFP)\perp(OB)$ et, comme $(FP)\subset(AFP)$, $(FP)\perp(OB)$.

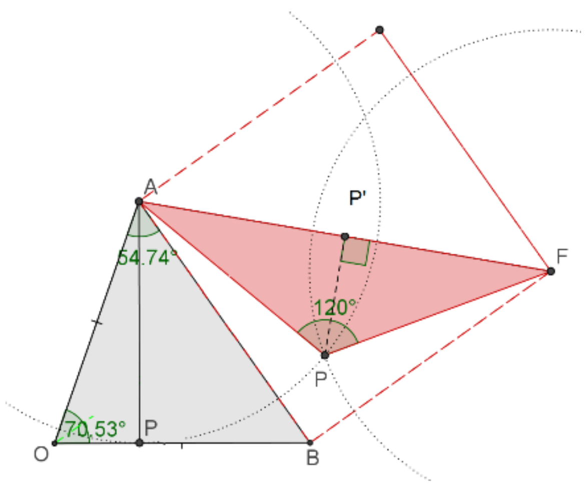
Déterminons la longueur $AP=PF$.
On doit se situer dans ce fameux triangle *AOB*, isocèle en *O*, de côtés égaux à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et *a* (fameux car on l'a déjà mentionné et tracé deux fois). On croyait tout connaître sur ce triangle mais non, il nous manque la hauteur *AP*. Nous l'avons tracé ci-contre. Le plus évident est d'utiliser la trigonométrie puisque l'on connaît $AO=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\widehat{AOP}=2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})\approx 70{,}5°$.



$\frac{AP}{AO}=\sin\widehat{AOP}=\sin(2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}))$, et donc :

$$AP=AO\sin(2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}))=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(2\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}))\approx 0{,}866\times 0{,}9428\approx 0{,}8165\ m.$$

Maintenant que l'on connaît *AP*, on peut tracer notre triangle isocèle *APF* en vraie grandeur et calculer l'angle dièdre (*AF* est facile à déterminer car c'est la diagonale de la face carrée, elle mesure $a\sqrt{2}$ soit ici $\sqrt{2}\approx 1{,}414\ m$). Je l'ai tracé avec GeoGebra en utilisant le tracé du triangle *AOB* pour pouvoir reporter les longueurs *AP* et *AB* sans connaître leur valeur (en traçant des cercles) : le carré tracé en rouge a pour côté *AB* et sa diagonale mesure donc *AF*. En traçant le cercle de centre *A* passant par *P*, on reporte *AP*.
Bref, on a tracé ce triangle *APF* et l'on peut maintenant mesurer l'angle $\widehat{APF}$: il mesure 120°, tout simplement !
On peut obtenir ce résultat par la trigonométrie, comme on

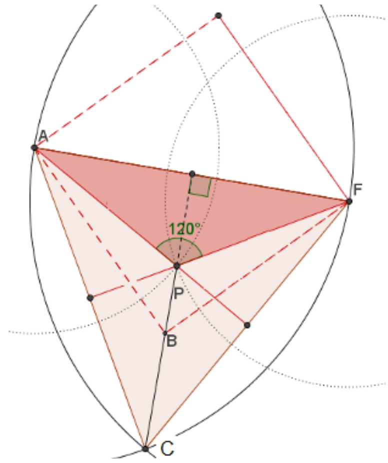


l'a fait jusqu'ici, en calculant $\frac{AP'}{AP}$ on a le sinus de la moitié de l'angle.

Un résultat aussi simple nous laisse penser qu'il y a une autre façon, nécessairement plus simple d'obtenir cette valeur. Et, en effet, il suffit de se placer dans le plan (*AFC*) qui est orthogonal à (*OB*). Le triangle équilatéral *AFC* est traversé en son centre par la grande diagonale (*OB*), et ce centre est *P*. D'après le théorème de l'angle au centre, le triangle *AFP* a donc pour angle principal le double de l'angle du triangle équilatéral, soit 2×60=120°.

Par la trigonométrie :

$$\widehat{APF}=2\sin^{-1}\left(\frac{AP'}{AP'}\right)=2\sin^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)}\right)$$

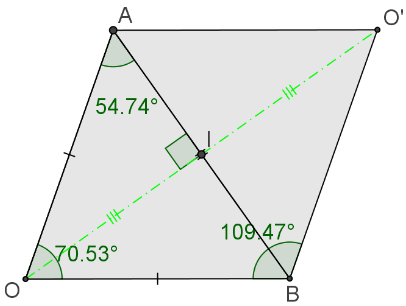


Cette expression doit être égale, sauf erreur, à 120°. Ci-contre le triangle équilatéral *AFC* en vraie grandeur, avec le point *P* en son centre.

Si on place six pyramides telles que *ABFEO* sur les faces d'un cube, extérieurement à celui-ci, on obtient un dodécaèdre (polyèdre à douze faces) dont les faces sont des losanges. Expliquer pourquoi il n'y a pas vingt-quatre faces comme on pourrait s'y attendre, puis tracer un tel solide en perspective.

L'autre angle dièdre, celui que fait la base carrée et une des faces latérales de la pyramide mesure exactement $45°$. La face *ABO* est en effet, une partie du plan diagonal (*ABG*). Ce plan coupe la face *BCG* selon sa diagonale [*BG*], on a donc $\widehat{BGF}=45°$. Mais (*BCG*) est un plan orthogonal à l'intersection des faces *ABO* et *ABFE* (la base carrée) – vous le montrerez facilement – et donc cet angle est l'angle dièdre entre ces faces.

En positionnant des pyramides identiques à la pyramide *ABFEO* sur les faces du cube, on obtient une coplanéité parfaite des faces adjacentes des pyramides, deux à deux : les deux angles dièdres de 45° s'additionnant à l'angle dièdre du cube (90°) pour faire un angle plat. Les faces du dodécaèdre ainsi constitué sont des losanges, obtenus en assemblant deux triangles isocèles tels que *AOB* par leur côté [*AB*] (voir la figure en vraie grandeur ci-dessous).



Le solide obtenu, appelé dodécaèdre rhombique, a un volume égal au double de celui du cube sur lequel on le construit (puisqu'on a décomposé le cube en six pyramides isométriques et que l'on a redisposé ces pyramides sur les faces d'un autre cube). C'est un solide qui pave l'espace puisqu'il s'insère parfaitement dans un pavage de l'espace avec des cubes. Notre illustration montre comment un tel pavage se réalise : en partant des cubes qui pavent l'espace (en bleu), un sur deux va être décomposé en six pyramides isométriques, pour les assembler aux six voisins qui eux, sont maintenus entiers. La figure de gauche donne une vue du côté carré *BCGF* avec les pyramides posées sur les faces du cube *ABCDEFGH*.