

1) Angles dièdres

Un angle dièdre est l'angle formé par deux faces d'un polyèdre ou par deux plans. Pour mesurer un angle dièdre, il faut se placer dans un *plan orthogonal à la droite d'intersection* de ces deux plans.

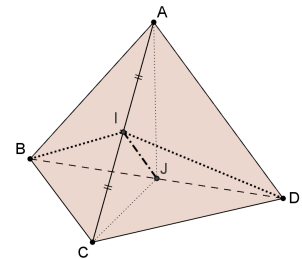
a) Tétraèdre régulier

Le tétraèdre $ABCD$ est régulier ($AB=AC=AD=BC=CD=DB$).

I et J sont les milieux des arêtes opposées $[AC]$ et $[BD]$.

(AC) est-il orthogonal à (BID) ? Pourquoi

.....



Montrer que si $AB=a$ alors $BI= a \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer alors $BI=ID$ lorsque $AB=5\text{ cm}$.

Tracer, en vraie grandeur (sans la déformation due à la perspective), le triangle BID .

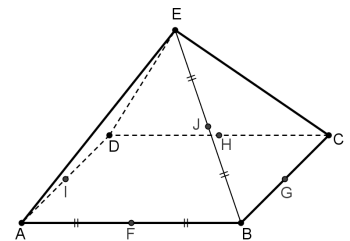
Montrer que l'angle \widehat{BID} , qui mesure l'angle dièdre entre les faces (ABC) et (ACD) , vaut à peu près 70° .

b) Pyramide régulière à base carrée

La pyramide $ABCDE$ est régulière : la base $ABCD$ est carrée et les faces triangulaires sont équilatérales. On a donc $AB=BC=CD=DA=EA=EB=EC=ED$. On nomme F, G, H et I les milieux des côtés de la base et J, K, L et M ceux des arêtes convergent vers le sommet E (voir la figure).

b-1) On veut déterminer l'angle dièdre entre les faces (EAB) et (ABC) .

- Justifier qu'on doit se placer dans (EFH) .
- Tracer à main levée le triangle EFH en vraie grandeur.
- Déterminer \widehat{EFH} .



b-2) On veut déterminer l'angle dièdre entre les faces (EAB) et (EBC) .

- Dans quel plan doit-on se placer ?
- Tracer à main levée, en vraie grandeur, la section de la pyramide par ce plan.
- Déterminer l'angle dièdre entre (EAB) et (EBC) .

2) Études de solides

a) Pour déterminer le volume d'une pyramide on a besoin de déterminer sa hauteur qui est la distance entre le sommet de la pyramide et la projection orthogonale de ce sommet sur le plan de la base (*le pied de la hauteur*).

Le tétraèdre $ABCD$ est régulier ; O est le centre de BCD . K, L et J sont les milieux des arêtes $[BC]$, $[CD]$ et $[DB]$.

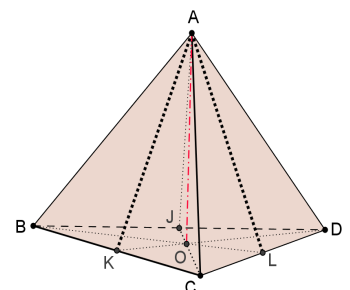
- Montrer que (AKD) est orthogonal à (BC) .
- En déduire que (AO) est orthogonale à (BC) .

On montre, de même, que (AO) est orthogonale à (CD) .

En déduire que (AO) est orthogonale à la base (BCD) de la pyramide.

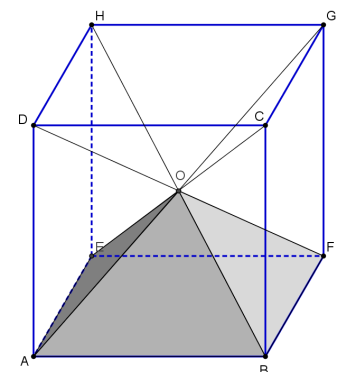
Déterminer alors la hauteur AO de la pyramide lorsque $AB=5\text{ cm}$ (représenter à main levée, en vraie grandeur, le triangle AKD).

En déduire le volume du tétraèdre de côté 5 cm .



b) Les quatre grandes diagonales d'un cube $ABCDEFGH$ découpent celui-ci en six pyramides isométriques à bases carrées telles que $ABFEO$ (voir figure).

- $AB=1\text{ m}$. Combien mesurent les arêtes de la pyramide convergent vers O ?
- Montrer que l'angle \widehat{AOB} mesure environ 70° .
- Où doit-on placer le point P sur l'arête $[OB]$ pour que le plan (APF) soit orthogonal à (OB) ? Déterminer alors la longueur $AP=PF$.
- Calculer l'angle dièdre entre les faces triangulaires des pyramides.



Si on place six pyramides telles que $ABFEO$ sur les faces d'un cube, extérieurement à celui-ci, on obtient un dodécaèdre (polyèdre à douze faces) dont les faces sont des losanges. Expliquer pourquoi il n'y a pas vingt-quatre faces comme on pourrait s'y attendre, puis tracer un tel solide en perspective.