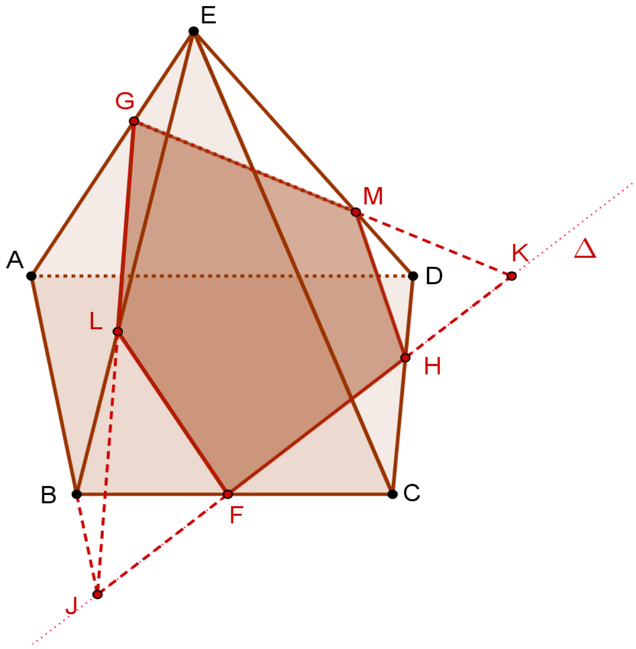
DS n°6 Espace 21/02/17

CORRECTION

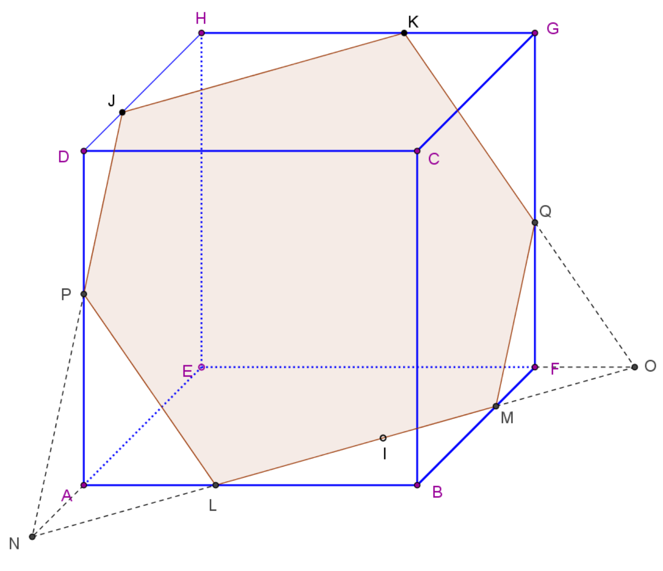
Barème : 8 pts-6 pts-6 pts

I] Droites et plans de l'espace



a) La pyramide *ABCDE* ci-contre est coupée par le plan (*FGH*), *F* étant sur l'arête [*BC*], *H* étant sur [*CD*] et *G* sur [*AE*].
Tracer, au crayon, l'intersection des plans (*FGH*) et (*ABC*). Tracer alors, toujours au crayon, l'intersection de (*FGH*) avec la face *ABE*, puis de (*FGH*) avec la face *ADE*. Tracer enfin, en couleur, les intersections du plan (*FGH*) avec les faces de la pyramide (segments invisibles en pointillés).
L'intersection des plans (*FGH*) et (*ABC*) est notée Δ. L'intersection de (*FGH*) et (*ABE*) est la droite (*GJ*), d'où le point *L* sur [*BE*] et le segment [*GL*] demandé. Même chose sur *ADE* : on trace ([*KG*], puis on place *M* et on trace [*GM*]. La fin de la construction ne pose pas de problème (en principe).

b) Sur la face *ABE* du cube ci-dessous, on a placé le point *I* ; *J* et *K* sont, quant à eux, sur les arêtes [*DH*] et [*HG*]. On veut tracer les intersections du plan (*IJK*) avec les faces du cube. En utilisant une propriété du cours que vous écrirez sur votre copie, tracer l'intersection de (*IJK*) et (*ABE*). En déduire la trace du plan cherchée sur le cube (les traits de construction au crayon, la trace sur les faces du cube en couleur).

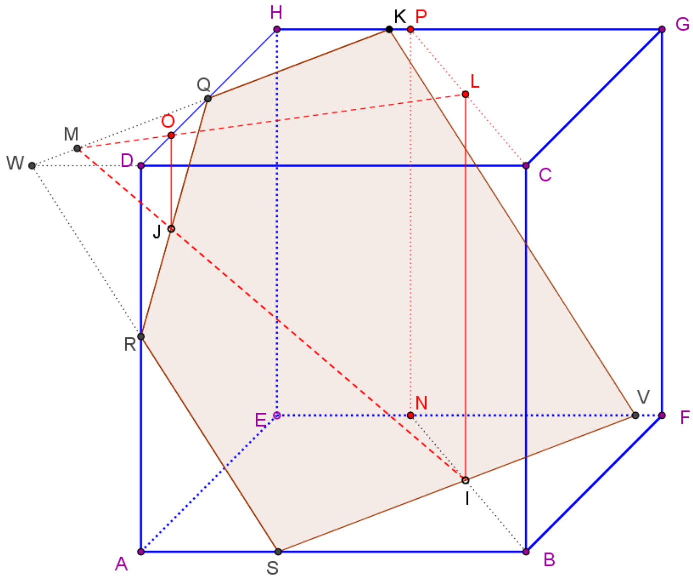


On utilise ici (ce n'est pas la seule méthode possible), la propriété qui dit qu'un plan coupant deux plans parallèles détermine deux droites d'intersection parallèles.
Comme les plans des faces opposées d'un cube sont parallèles, les intersections du plan (*IJK*) avec les faces *DCG* et *ABE* sont des droites parallèles. On connaît (*JK*) sur *DCG*, donc on trace la parallèle à (*JK*) passant par *I* sur *ABE*. La fin de la construction ne pose pas de problème (en principe).

c) Sur la face *ABE* du cube ci-dessous, on a placé le point *I* ; *J* est, cette fois, sur la face *ADE* ; *K* est sur l'arête [*HG*]. On veut tracer, comme précédemment, les intersections du plan (*IJK*) avec les faces du cube. Pour cela, tracer au crayon, les intersections du plan (*BIC*) avec les faces du cube ; en déduire la projection *L* de *I* sur *DCG* parallèlement à (*BC*), puis l'intersection *M* de (*IJ*) et du plan (*DCG*). Finir la construction (traits de construction au crayon, trace sur les faces du cube en couleur).
Les intersections du plan (*BIC*) avec les faces du cube sont [*BN*] sur la face *ABE*, [*NP*] sur la face *EFG*, [*PC*] sur la face *DCG* et [*BC*] qui est une arête, donc une intersection de deux faces. On trouve ainsi L, sur [*PC*], en traçant la parallèle à (*BC*). On fait de même avec *J* qui se projette en *O* parallèlement à (*BC*). La droite (*IJ*) perce le plan (*DCG*) en *M* qui est l'intersection de (*IJ*) avec (*OL*). Il ne reste plus qu'à tracer (*KM*) qui donne *Q* sur [*DH*]. La fin de la construction ne pose pas

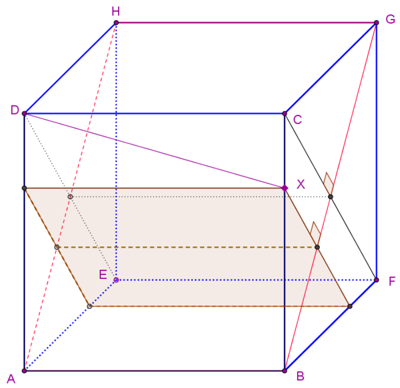
de problème, on peut faire comme précédemment (tracer la parallèle à (KM) qui passe par I, etc.)

d) Une petite question : avec les notations précédentes des sommets d'un cube $ABCDEFGH$, est-il possible de trouver un point X sur l'arête $[BC]$, de manière à ce que la droite (DX) soit orthogonale à la droite (BG) ?

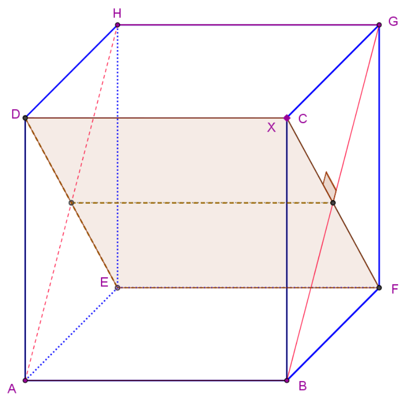


Réponse et justification sur la copie

Pour répondre, faisons un schéma.



Si le point X est n'importe où sur le segment $[BC]$, comme sur notre schéma, les droites (DX) et (BG) ne sont pas coplanaire. Il n'y a qu'un seul plan orthogonal à (BG) qui passe par X, nous l'avons tracé en marron. Ce plan coupe $[DA]$ en dessous de D tant que X n'est pas en C, et donc (DX) est une droite qui n'est pas incluse dans le plan orthogonal qui convient : cette droite perce ce plan en X. Si X est sur C, alors (DX) est orthogonale à (BG) et c'est la seule solution (illustration de droite).

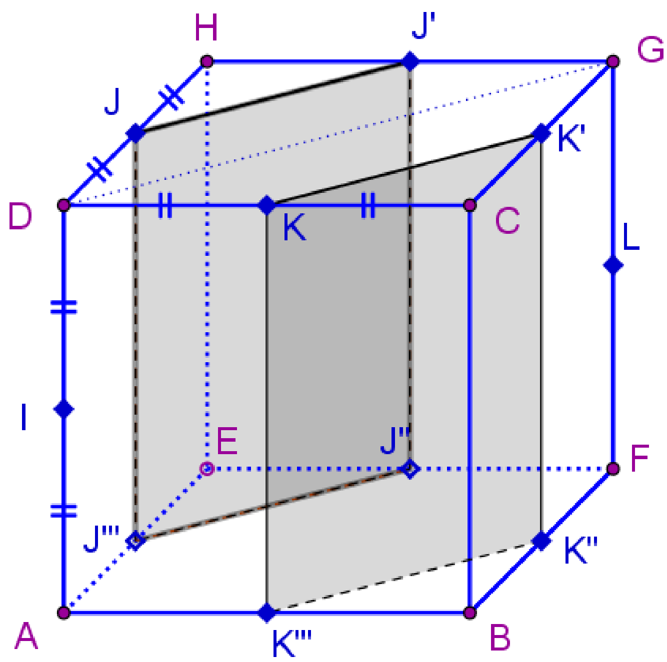


II] <u>Découpe d'un cube et patron</u>

Les côtés d'un cube $ABCDEFGH$ mesurent 1 m. Les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes $[DA]$, $[DH]$, $[DC]$ et $[GF]$.

a) Dans un premier temps, on coupe le cube selon deux plans parallèles au plan diagonal (AFG) passant, respectivement, par J et K. Après avoir enlevé les deux morceaux contenant les sommets B, C, H et E du cube, on se retrouve avec un prisme hexagonal.

Tracer au crayon sur la figure en perspective ci-contre, les intersections des deux plans de coupe avec les faces du cube. Nommer J', J'' et J''' les intersections du plan passant par J avec les arêtes du cube ; de même, nommer K', K'' et K''' les intersections du plan passant par K avec les arêtes du cube.

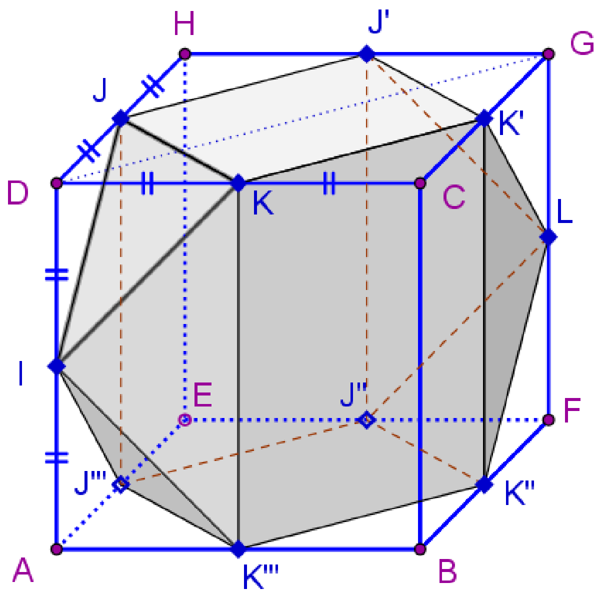


Voici la représentation en perspective demandée, à ce stade qui n'est pas le stade final. Les noms des points ajoutés peuvent être disposés autrement que nous l'avons fait, les instructions étant floues sur ce point.

b) Dans un second temps, on élimine du prisme hexagonal quatre pyramides identiques contenant les sommets *D, A, G* et *F* : pour le sommet *D*, on coupe le prisme selon le plan (*IJK*), puis on enlève la pyramide *IJKD*. On fait de même pour les autres sommets, en passant par *I* pour enlever la pyramide de sommet *A* et par *L* pour enlever les pyramides de sommets *G* et *F*.

Sur la figure en perspective, tracer en couleur (bleu par exemple ; en pointillés pour les arêtes invisibles) les arêtes du polyèdre obtenu après cette élimination.

Voici la représentation en perspective finale, avec des effets d'ombre (non demandés et sans doute perfectibles) pour mieux mettre le polyèdre en évidence. Nous avons mis les arêtes cachées du polyèdre en tiretés marron, en supposant que le cube est transparent (ça évite de presque tout mettre en pointillés).

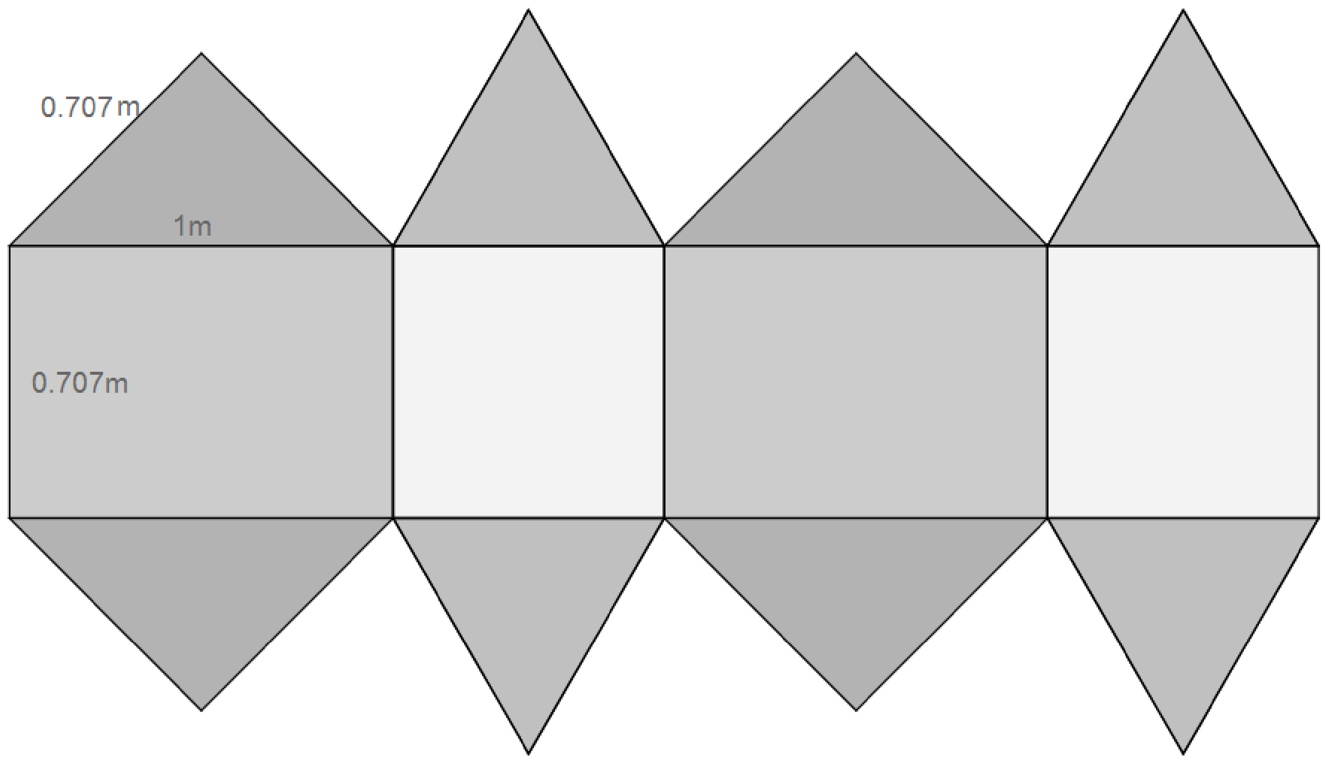


c) Compter les faces, les arêtes et les sommets de ce polyèdre, puis tracer un exemplaire de chacun des types de face à l'échelle 1/20 (5 *cm* représentent 1 *m*).

Le polyèdre a quatre faces rectangulaires, de deux types différents (rectangles de 1 *m* sur $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ *m* et carrés de $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ *m* de côté) et huit faces triangulaires, de deux types différents aussi (triangles isocèles de base 1 *m* avec des côtés de $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ *m* et triangles équilatéraux de $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ *m* de côté). Cela fait donc douze faces, notre polyèdre est un dodécaèdre.

Il y a vingt arêtes : quatre de 1 *m* de long et seize de $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ *m* de long et dix sommets. Vérifions notre compte avec la relation d'Euler (valable pour tout polyèdre sans trou) : F+S=A+2. En effet, 12+10=22 et 20+2=22.

Traçons maintenant les différents type de face (il y en a quatre : 2 triangulaires répétées 4 fois et 2 rectangulaires répétées 2 fois), et le patron (ce qui n'était pas demandé).



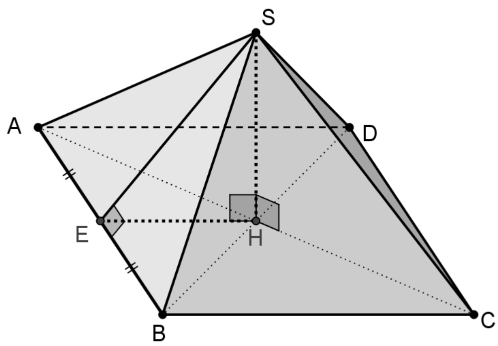
d) Déterminer le volume $\mathcal{V}$ de ce polyèdre en arrondissant le résultat au cm^3 le plus proche.

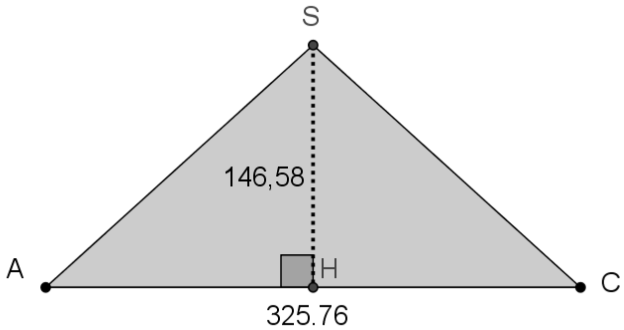
Dans un premier temps, on a enlevé les deux prismes de hauteur 1 m et de base les triangles isocèle-rectangles d'hypoténuse $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ m et de petit côté 0,5 m, donc d'aire $\frac{0{,}5^2}{2} = 0{,}125$ m^2. C'est à dire un volume de $2 \times 0{,}125 \times 1 = 0{,}25$ m^3. Ensuite on a enlevé les quatre pyramides dont les bases ont une aire de $\frac{0{,}5^2}{2} = 0{,}125$ m^2 et de hauteur 0,5 m. Chaque pyramide a un volume de $\frac{0{,}125 \times 0{,}5}{3} = \frac{0{,}0625}{3} \approx 0{,}0208333...$ m^3. On trouve, finalement un volume de 0,666667 m^3 environ, les deux tiers du volume du cube : $\mathcal{V} = 1^3 - 0{,}25 - 4 \times 0{,}0625 \div 3 = \frac{3 \times 0{,}75 - 0{,}25}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}666667$ m^3.

III] Angle dièdre de la pyramide de Khéops

La grande pyramide de Khéops, sur le plateau de Gizeh en Égypte, avait, au moment de sa construction (il y a 4500 ans environ), une base carrée de 230,35 m de côté et une hauteur 146,58 m.

La figure ci-contre schématise la situation : $ABCD$ est un carré de centre H tel que AB=230,35 m ; les faces triangulaires sont isocèles en S et SH=146,58 m.



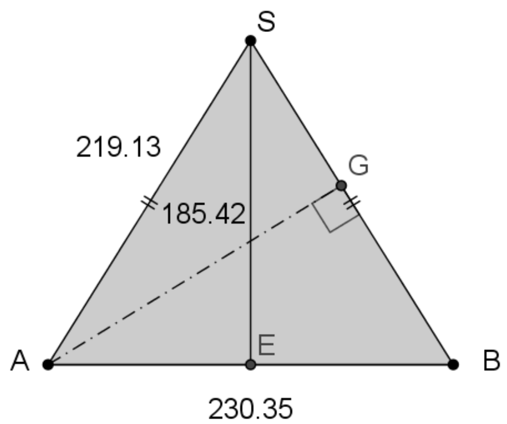


a) Faire une figure en vraie grandeur, à main levée, du triangle SAC. Calculer les longueurs AC et AS.

[AC] est la diagonale de la base carrée, donc mesure $230{,}35 \times \sqrt{2} \approx 325{,}764$ m.

[AS] est l'hypoténuse du triangle SAH rectangle en H et donc mesure

$$\sqrt{146{,}58^2 + \left(\frac{230{,}35 \times \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{146{,}58^2 + \frac{230{,}35^2}{2}} \approx 219{,}126 \ m.$$



b) Faire une figure en vraie grandeur, à main levée, du triangle SAB. Calculer la longueur ES, puis l'aire de la face SAB. Est-il vrai, comme l'a affirmé Hérodote il y a 2500 ans, que « les surfaces latérales triangulaires ont une aire égale à celle du carré construit sur la hauteur de la pyramide » ?

indication : Hérodote parle de SH^2.

[ES] est un côté du triangle SAE rectangle en E dont les autres côtés sont connus.

On peut calculer sa mesure avec le théorème de Pythagore :

$$ES = \sqrt{AS^2 - AE^2} = \sqrt{\left(146{,}58^2 + \frac{230{,}35^2}{2}\right) - \left(\frac{230{,}35}{2}\right)^2} = \sqrt{146{,}58^2 + \frac{230{,}35^2}{4}} \approx 186{,}416 \ m.$$

La figure en vraie grandeur des faces de la pyramide est tracée ci-dessus. On peut remarquer qu'on n'est pas loin d'un triangle équilatéral.

L'aire de cette face est $ES \times AB \div 2$, soit $\frac{ES \times AB}{2} \approx \frac{186{,}416 \times 230{,}35}{2} = 21470{,}4628$ m^2.

Le carré de la hauteur est $146{,}58^2 = 21485{,}6964$ m^2.

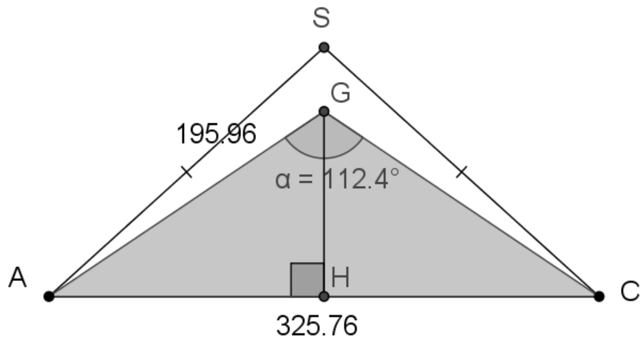
L'écart absolu entre ces deux valeurs est très petit : $21485{,}6964 - 21470{,}4628 = 15{,}2336$ m^2.

Cet écart représente 0,07% de la valeur de ces aires. Hérodote avait donc raison, un tel écart relatif est négligeable, voisin de zéro et cela peut difficilement être attribué à une simple coïncidence. On peut penser que les architecte ont voulu un tel rapport qui revient à introduire le nombre d'or dans les dimensions de la pyramide. Le nombre d'or vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180340$ et c'est approximativement le rapport que l'on trouve entre ES et EH ; en effet, $\frac{ES}{EH} = \frac{2 \times 186{,}416}{230{,}35} \approx 1{,}6185457$.

c) En déduire la longueur de la hauteur issue de A dans le triangle SAB, notée $[AG]$. Placer le point G sur la figure, puis expliquer pourquoi l'angle $\widehat{AGC}$ est une mesure de l'angle dièdre entre les faces ABS et BCS.
Déterminer cet angle dièdre.
indication : Pour un triangle quelconque ABC, les points H_A, H_B et H_C étant les pieds des hauteurs issues de A, B et C, l'aire peut se calculer de trois façons différentes. $\frac{AB\times CH_C}{2}=\frac{BC\times AH_A}{2}=\frac{CA\times BH_B}{2}$.

C'est facile de déterminer AG puisque l'on sait que l'aire du triangle est $ES\times AB\div 2\approx 21470{,}4628$. Cette aire peut être calculée avec la formule $SB\times AG\div 2$ et on connaît $SB=AS=219{,}126$ *m*.
On en tire $AG=2\times 21470{,}4628\div SB=\frac{2\times 21470{,}4628}{219{,}126}\approx 195{,}965$ *m*.

On se place dans le triangle AGC, isocèle en G car $[AG]$ étant une hauteur de SAB, (AG) est orthogonale à (SB) et de même, (CG) est orthogonale à (SB) dans le plan (SBC). (SB) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (AGC) et donc au plan lui-même. C'est dans ce plan orthogonal à leur arête commune que nous pouvons mesurer l'angle dièdre entre les faces ABS et BCS. Une figure en vraie grandeur peut nous aider à déterminer le bon rapport trigonométrique :



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\frac{325{,}76}{2}}{195{,}965}\approx 0{,}83117 \text{ d'où } \alpha=2\times\sin^{-1}(0{,}83117)\approx 112{,}44\,°.$$

Remarque : D'après l'historien grec Hérodote, la pyramide de Khéops de base carrée, dont les surfaces latérales sont des triangles isocèles, possède la propriété suivante : en notant $2a$ la longueur du côté $[AB]$, h la longueur de la hauteur $[SH]$ de la pyramide et x la longueur de la hauteur du triangle isocèle ASB, on a $x^2=a^2+h^2$.
L'aire de la face SAB vaut ax et le carré de côté SH vaut h^2.
La remarque d'Hérodote conduit à la relation suivante : $h^2=ax$ et donc $x^2-a^2=ax$, ce qui conduit à considérer que x est solution de l'équation $x^2-ax-a^2=0$ ou encore $a^2[(\frac{x}{a})^2-(\frac{x}{a})-1]=0$, et comme $a\neq 0$, cela s'écrit $(\frac{x}{a})^2-(\frac{x}{a})-1=0$. En posant $X=\frac{x}{a}$, cette équation est tout simplement $X^2-X-1=0$ et a pour solution $X=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ c'est-à-dire le *nombre d'or*. Ce que suggérait Hérodote est que les Égyptiens avaient donné cette proportion entre les distances respectives qui séparent le milieu du côté au sommet et le milieu du côté au centre de la pyramide.