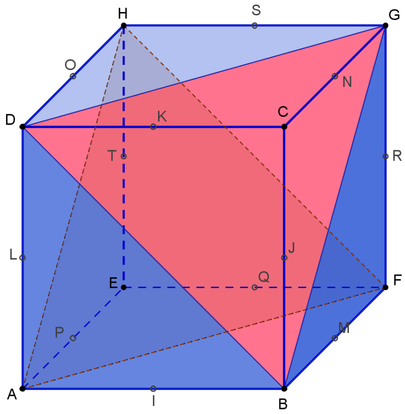
CORRECTION

1) Saucissonage

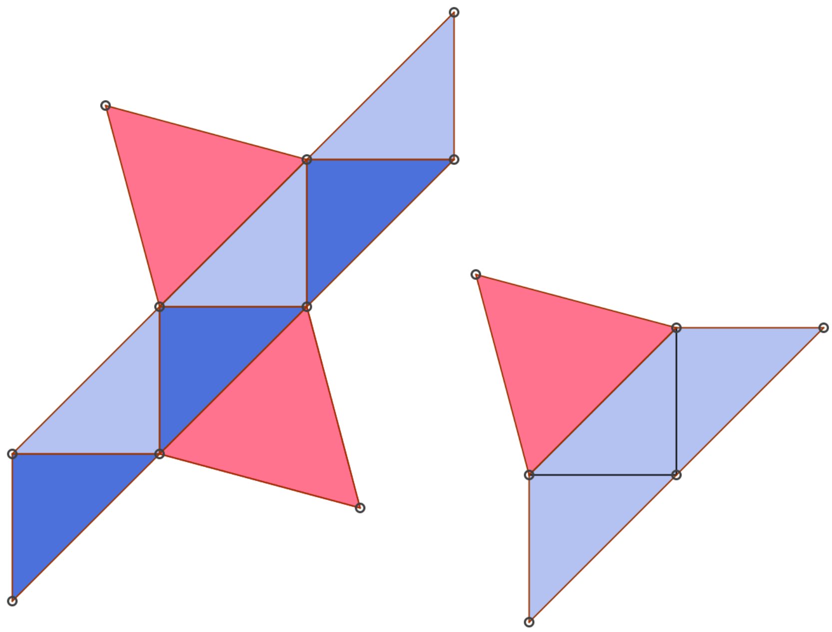
Sur un cube *ABCDEFGH*, nous avons placé les milieux *I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S* et *T* des arêtes comme le montre la figure. Dans cette 1ère partie, nous allons couper ce cube par les deux plans parallèles : (*DBG*) et (*HFA*).



a) Si l'on isole les trois solides résultants de ce saucissonnage, on s'aperçoit que deux sont des tétraèdres, l'autre étant un octaèdre (huit faces) assez particulier. Tracer le patron (faces en vraie grandeur, attachées par une arête) d'un de ces tétraèdres et celui de l'octaèdre.

Nous avons tracé et colorié sur notre figure les faces visibles de l'octaèdre dont parle la question : le solide *BGDHFA*. Il y a 4 faces visibles dont 3 sont des triangles isocèle-rectangles (colorié en bleu) et une est un triangle équilatéral (colorié en rose), la même chose de l'autre côté, mais disposé alternativement.

Pour tracer les patrons de ces solides, on a le choix entre plusieurs dispositions : pour l'octaèdre, nous avons placé les 6 triangles isocèle-rectangles (celles que nous avons coloriées en bleu) dans le prolongement les unes des autres afin de dégager mieux la logique de l'octaèdre ; nous avons gardé la même disposition pour le tétraèdre (on aurait pu disposer les triangles bleus autour des triangles rouges).



b) En considérant que l'arête du cube initial mesure 6 *cm*, calculer l'aire exacte de la surface $\mathcal{A}_o$ de l'octaèdre ainsi que son volume $\mathcal{V}_o$. Comparer $\mathcal{A}_o$ avec l'aire totale des deux tétraèdres et $\mathcal{V}_o$ avec leur volume total.

Il y a deux triangles équilatéraux de côté $6\sqrt{2}$ *cm* (le côté des faces carrées du cube étant 6, sa diagonale mesure $6\sqrt{2}$). L'aire de chacun de ces triangles équilatéraux est : $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{2})=18\sqrt{3}$ *cm²*

Il y a six triangles isocèle-rectangles de côtés $6\sqrt{2}$ *cm*-6 *cm*-6 *cm*.

L'aire de chacun de ces triangles isocèle-rectangles est : $\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$ *cm²*

L'octaèdre a donc une aire totale $\mathcal{A}_o= 2\times(18\sqrt{3})+6\times 18=108+36\sqrt{3}\approx 170{,}35$ *cm²*.

Cette aire représente environ 79% (170,35/216=3407/4320≈0,79) de l'aire des faces du cube initial.

Le tétraèdre a une aire totale de $18\sqrt{3}+3\times 18=18(3+\sqrt{3})=54+18\sqrt{3}\approx 85{,}18$ *cm²*. Les deux tétraèdres ont donc une aire totale égale à celle de l'octaèdre car $2(54+18\sqrt{3})=108+36\sqrt{3}\approx 170{,}35$ *cm²*, ce qui est logique puisque cet ensemble est constitué d'un même nombre de faces de chaque nature que l'octaèdre.

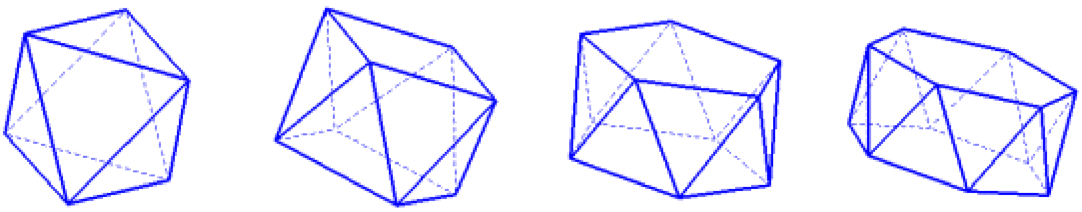
Pour calculer le volume de l'octaèdre, nous allons enlever le volume cumulé des deux tétraèdres à celui du cube. Les tétraèdres ont pour base un triangle isocèle-rectangle d'aire 18, par exemple *DCG*, et pour hauteur correspondante le côté du cube [*BC*], qui est bien orthogonal à la base choisie car il s'agit d'une arête et d'une face du cube. Le volume d'un tétraèdre est donc $\frac{1}{3}\times 18\times 6=36$ *cm*³.

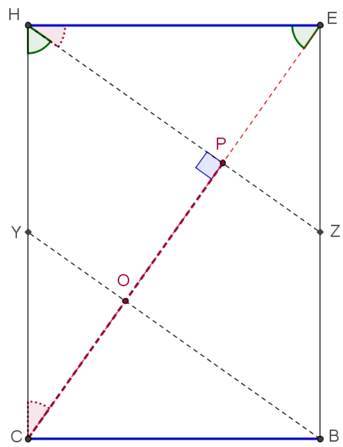
Noter que si on considère que la base des tétraèdres est le triangle équilatéral, les calculs sont plus compliqués... Par contre, on peut en déduire la hauteur correspondant à cette base équilatérale :

$\frac{3\times 36}{18\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\approx 3{,}46\ cm$. Nous verrons plus tard que la grande diagonale du cube mesurant $6\sqrt{3}\approx 10{,}39\ cm$, cette hauteur représente un tiers de la grande diagonale du cube.
Le volume du cube étant $6^3=216\ cm^3$, il reste donc pour l'octaèdre un volume $\mathcal{V}_o=216-2\times 36=144\ cm^3$. Ce volume représente environ 67% (144/216=2/3≈0,67) du volume du cube initial. Les deux tétraèdres ont un volume cumulé de $2\times 36=72\ cm^3$, soit la moitié du volume de l'octaèdre.

Noter aussi cette coïncidence amusante obtenue en prenant 6 *cm* pour arête du cube : l'aire et le volume du cube sont égaux (aux unités près) car il y a 6 faces carrées de 6 *cm* de côté, le volume est $6^3=216\ cm^3$ alors que l'aire latérale totale est $6^3=216\ cm^2$.

c) L'octaèdre obtenu est un *antiprisme.* Chercher la définition de ce mot. Calculer la hauteur de cet antiprisme (la distance entre ses bases).
Un antiprisme est un solide qui a deux bases polygonales parallèles mais disposées en quinconce, dont les sommets sont reliés par des triangles. Si les bases sont des triangles, cela fait 6 triangles latéraux, mais d'une façon générale, avec une base à n côtés, il y a $2n$ triangles latéraux.
Voici, représentés en perspective, des antiprismes réguliers (leurs faces sont des polygones réguliers) dont les bases ont 3, 4, 5 et 6 côtés. L'antiprisme régulier à base triangulaire (à gauche) s'appelle l'octaèdre régulier.





Notre antiprisme n'est pas régulier car les faces latérales ne sont pas des triangles équilatéraux. Pour évaluer sa hauteur, la distance entre les deux bases, nous allons d'abord montrer que cette hauteur se mesure sur la diagonale [*CE*] du cube. Autrement dit, nous allons montrer que la diagonale est orthogonale aux plans de base : [*DG*] et [*HC*] sont perpendiculaires (ce sont les diagonales d'un carré), d'autre part [*DG*] est orthogonal à [*BC*] (car [*DG*] est inclus dans le plan (*DCG*) qui est orthogonal à [*BC*]). Donc [*DG*] est orthogonal à deux droites sécantes [*BC*] et [*HC*] du plan médian *BCH* ; [*DG*] est donc orthogonal au plan (*BCH*) et par conséquent à [*CE*] qui est inclus dans (*BCH*). De même, [*CE*] est orthogonal à [*DG*], [*DB*] et [*BG*] les trois côtés du triangle *BDG*, il est donc orthogonal à ce plan ainsi qu'à l'autre base de l'octaèdre *HAF.*
Dessinons en vraie grandeur le rectangle médian *HEBC*. Nommons *Y* et *Z* les milieux des segments [*HC*] et [*BE*] et nommons *O* et *P* les intersections de [*HZ*] et [*BY*]. Les intersections des deux plans de base de l'octaèdre avec le plan médian sont les segments [*HZ*] et [*BY*]. Le triangle rectangle *HEC* a des angles $\widehat{HEC}$ et $\widehat{ECH}$ qui sont complémentaires. Dans les différents triangles de la figure, on retrouve ces angles complémentaires : $\widehat{CHP}=\widehat{HEC}=\widehat{CYO}$ (en vert sur notre illustration) et $\widehat{OCY}=\widehat{PCH}=\widehat{PHE}$ (en rouge).
Ce que l'on doit calculer est la distance *OP.*
On sait que *EZ* est la moitié de *CH.* Dans la configuration de Thalès où les triangles *HCP* et *ZPE* sont opposés par le sommet commun, on a l'égalité $\frac{CH}{EZ}=\frac{PC}{PE}=\frac{PH}{PZ}$ et donc $\frac{2}{1}=\frac{PC}{PE}$, soit $PC=2PE$. De même, par symétrie, on a $OE=2OC$. Donc $PC+OE=2PE+2OC=2(PE+OC)$. Or, $PC+OE=CO+2OP+PE$. Donc $2(PE+OC)=CO+2OP+PE$ et, en simplifiant, $PE+OC=2OP$. Autrement dit, comme *PE*=*OC* (par symétrie), *PE*=*OP.* La diagonale du cube est coupée en 3 parties égales.
On sait que $CH=6\sqrt{2}\ cm$ et *CH*=6 *cm*, donc, d'après Pythagore, la diagonale *CE* mesure : $\sqrt{(6\sqrt{2})^2+6^2}=\sqrt{72+36}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}\approx 10{,}39\ cm$.
La distance *OP,* la hauteur de l'antiprisme est le tiers de cette diagonale, donc $OP=2\sqrt{3}\approx 3{,}46\ cm$.

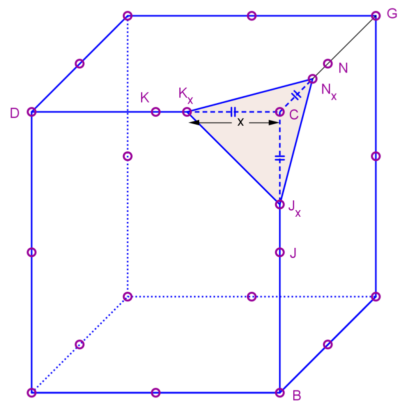
Comme nous l'avion noté un peu plus haut (question b) Nous aurions pu obtenir ce résultat bien plus facilement : en calculant le volume du tétraèdre, à la question précédente, nous avons trouvé $\frac{1}{3}\times 18\times 6=36$

cm^3. Nous savons que le triangle équilatéral de base mesure $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\sqrt{2})=18\sqrt{3}$ cm^2. On en déduit que la hauteur h de la pyramide correspondant à cette base est donnée par la 2ème façon de calculer le volume : $\frac{1}{3}\times(18\sqrt{3})\times h=6\sqrt{3}\times h=36$ cm^3. On en tire donc $h=\frac{36}{6\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ cm.

En enlevant deux fois cette hauteur à la diagonale du cube ($CE=6\sqrt{3}$ cm), on obtient la hauteur de l'octaèdre ($OP=2\sqrt{3}$). Ce raisonnement repose tout de même sur le fait que la diagonale est bien orthogonale aux deux bases. Il fallait donc bien en donner la preuve.

2) Troncatures des sommets d'un cube

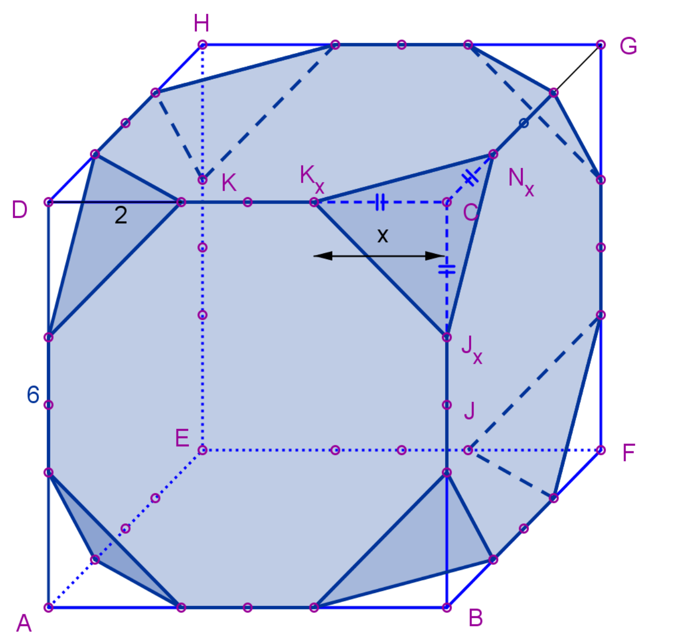
Avec les mêmes conventions de noms pour les sommets et les milieux des arêtes d'un cube, nous avons placé les points K_x, J_x et N_x sur les arêtes $[CD]$, $[CB]$ et $[CG]$ à une même distance x du sommet C, comme le montre la figure, puis nous avons enlevé la partie contenant le sommet, réalisant ainsi une *troncature régulière du sommet C*.



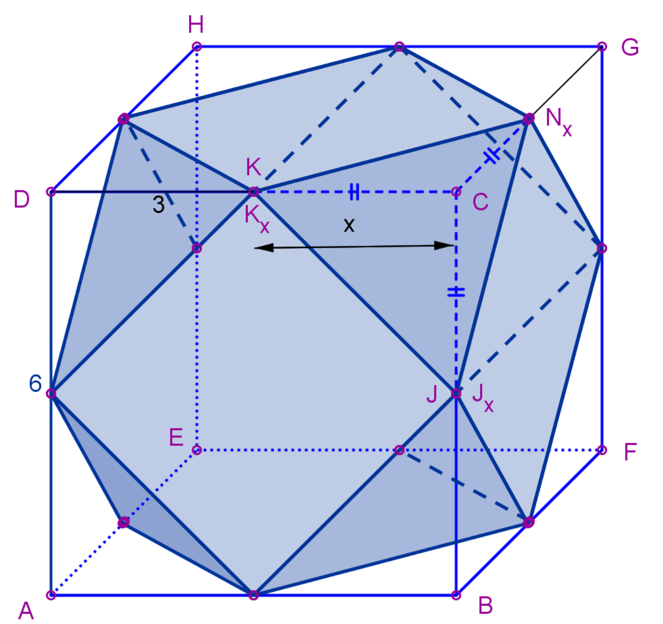
a) En considérant toujours que l'arête du cube initial mesure 6 *cm,* tracer la perspective du solide obtenu en réalisant des troncatures* sur chacun de ses sommets dans les deux cas suivants :

Le premier solide a des faces qui sont des triangles équilatéraux (il y en a 8) de côté $2\sqrt{2}\approx 2{,}828$ cm et des octogones qui sont irréguliers puisque leurs côtés mesurent alternativement 2 et $2\sqrt{2}\approx 2{,}828$ cm (il y en a 6).

$x=2$ cm

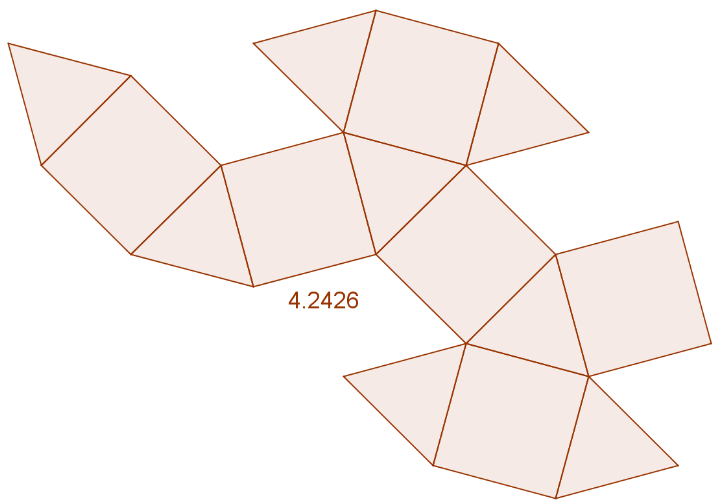


$x=3$ cm



Dans le dernier cas, le solide obtenu s'appelle un *cuboctaèdre*. Déterminer le volume du cuboctaèdre obtenu en partant d'un cube de côté 6 *cm*. Tracer le patron du cuboctaèdre obtenu en partant d'un cube de côté 6 *cm*.

Le cubocataèdre est obtenu en partant d'un cube de côté a, en lui enlevant 8 pyramides identiques (en volume) telles que *CKNJ*. Ces pyramides sont constituées d'une base équilatérale de côté $c=3\sqrt{2}cm$ et de 3 faces latérales qui sont des triangles isocèle-rectangles de petit côté 3 *cm*. On peut plus facilement calculer le volume d'une telle pyramide en considérant que la base est un de ces triangles isocèle-rectangles car la hauteur est



alors facile à déterminer : c'est 3 *cm*. Le volume de chacun de ces pyramides est donc $\dfrac{\frac{3^2}{2}\times 3\times 1}{3}=4{,}5\,cm^3$.

Comme on enlève 8 pyramides au cube initial, le volume du cuboctaèdre est $6^3-8\times 4{,}5=216-36=180\,cm^3$ soit 83% (180/216=5/6≈0833) du volume du cube initial.

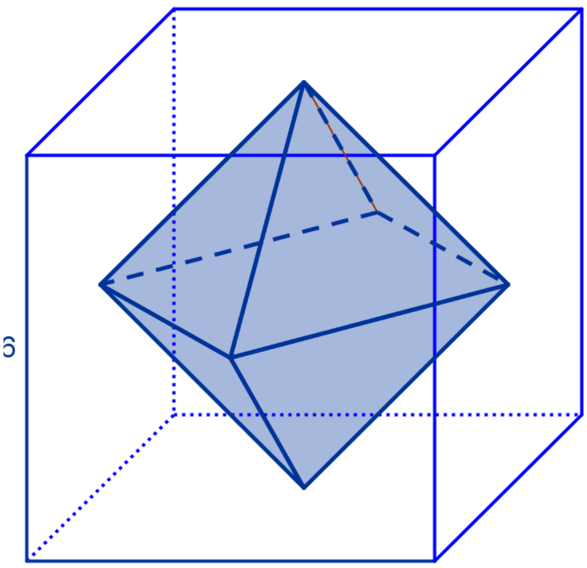
On ne demandait pas de calculer l'aire latérale de cet octaèdre (pour ne pas surcharger le travail), mais cependant elle est facile à obtenir puisqu'on doit seulement ajouter les aires de 8 triangles et 6 carrés de côtés $c=3\sqrt{2}\,cm$.

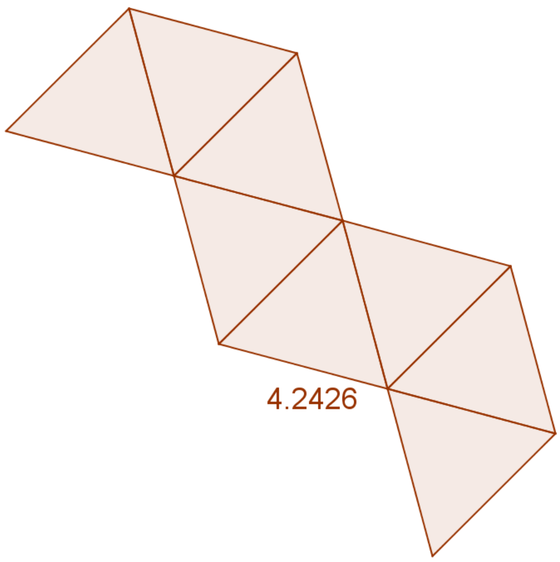
Cette aire latérale vaut donc : $8\times(3\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}+6\times(3\sqrt{2})^2=8\times 18\div 4\times\sqrt{3}+6\times 18=108+36\sqrt{3}\,cm^2$, soit environ 170,3538 cm^2 ou encore 79% environ de l'aire latérale du cube initial. Le développement (voir le patron ci-dessus) consiste en 8 triangles équilatéraux de côté $3\sqrt{2}\approx 4{,}2426\,cm$ et 6 carrés de même côté, disposés alternativement.

b) On peut continuer la troncature des sommets du cube d'arête 6 *cm* au-delà de la valeur *x*=3 *cm*. Lorsqu'on continue jusqu'à la valeur de l'arête du cube, donc ici jusqu'à *x*=6 *cm*, on obtient un solide à huit faces régulières appelé octaèdre régulier. Tracer ce solide en perspective (joindre les centres des faces adjacentes) puis en tracer le patron.

L'octaèdre régulier, obtenu en effectuant cette troncature des sommets jusqu'à faire disparaître tous les petits carrés, résidus des grandes faces carrées du cube initial, est constitué de 8 faces triangulaires. Chacun de ces triangles est un triangle équilatéral de côté $c=3\sqrt{2}\,cm$.

Le développement (voir le patron ci-dessous) consiste en 8 triangles équilatéraux de côté $3\sqrt{2}\approx 4{,}2426\,cm$ uniquement.





c) Calculer l'aire exacte de la surface latérale $\mathcal{A}_2$ d'un tel octaèdre régulier et puis son volume $\mathcal{V}_2$. Déterminer le rapport entre le volume du cube initial et $\mathcal{V}_2$. Par quel nombre faut-il multiplier les arêtes de l'octaèdre pour que son volume égale celui du cube initial ?

L'aire de la surface latérale de cet octaèdre régulier est 8 fois l'aire d'un triangle équilatéral de côté $c=3\sqrt{2}\,cm$, donc $\mathcal{A}_2=8\times(3\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=8\times 18\div 4\times\sqrt{3}=36\sqrt{3}\,cm^2$. Cette aire vaut environ 62,3538 cm^3, soit environ 29% de l'aire de la surface latérale du cube initial (qui était de 6^3=216 cm^3).

Pour calculer le volume de cet octaèdre, on remarque que l'octaèdre régulier est constitué de deux pyramides à bases carrées. Les bases sont des carrés de côtés $c=3\sqrt{2}\,cm$, leur aire vaut évidemment la moitié de l'aire des faces du cube initial car $c^2=3^2\times 2=18\,cm^2$ (les faces du cube initial ont une aire égale à 6^2=36 cm^2). Les hauteurs de ces pyramides sont égales à la moitié du côté du cube initial, soit 3 *cm*. Le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans le cube de volume 216 cm^3 est donc égal à $\mathcal{V}_2=2\times 18\times 3\div 3=36\,cm^3$, soit un sixième (environ 17%) de celui du cube. Pour que le volume de l'octaèdre régulier égale celui du cube initial il faut multiplier les arêtes de l'octaèdre par un coefficient *k* tel que k^3=6. Ce nombre, par définition, est $\sqrt[3]{6}\approx 1{,}817120593$.

Cette précision est celle de la calculatrice, si on veut 100 décimales, il faut un outil plus performant tel que le logiciel xcas (libre et gratuit) : la racine cubique y est notée $6^{\frac{1}{3}}$, il suffit donc de taper *evalf(6^(1/3),100)* pour les obtenir : $\sqrt[3]{6}$ ≈1,8171205928321396588912117563272605024282104631412196714813342979313097394593018656471417041264170720.

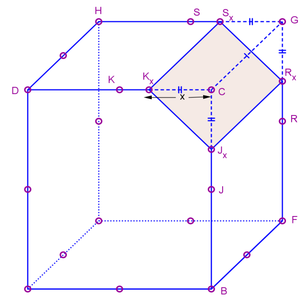
Pour que le volume de l'octaèdre régulier égale celui du cube initial il faut que ses arêtes mesurent $c=3\sqrt{2}\times\sqrt[3]{6}\approx 7{,}709389760551951774\,cm$.

Résumé des informations sur les aires et les volumes concernant les 4 solides identifiés :

	Le cuboctaèdre	Le cube	L'octaèdre *BGDHFA* issu du saucissonnage	L'octaèdre régulier issu de la troncature
% de l'aire latérale du cube	79%	100%	79%	29%
% du volume du cube	83%	100%	67%	17%
Rapport aire/volume	0,95	1,00	1,18	1,70

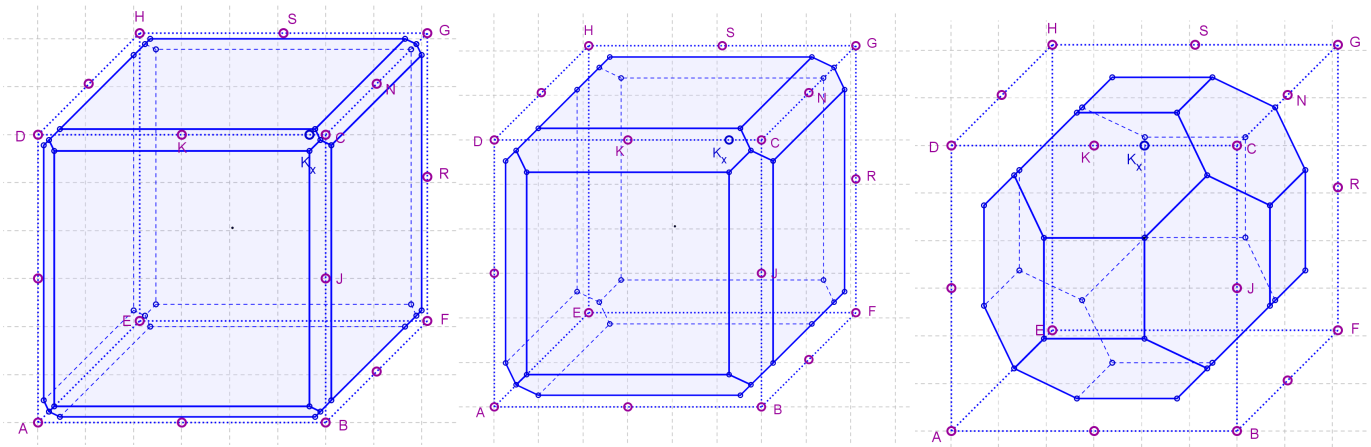
Si on doit qualifier ces quatre solides selon leurs rapports aire/volume, on peut parler de compacité : plus ce rapport est élevé moins la forme est compacte (ses arêtes et sommets saillent davantage lui donnant une grande aire pour un volume moindre). L'octaèdre régulier est le moins compact de ces solides tandis que le cuboctaèdre est le plus compact (celui qui se rapproche le mieux d'une sphère). Si on devait jouer au football avec un ballon taillé selon une de ces formes (éventuellement gonflée un peu tout de même), il faudrait choisir le ballon cuboctaédrique.

3) <u>Troncatures des arêtes d'un cube</u>

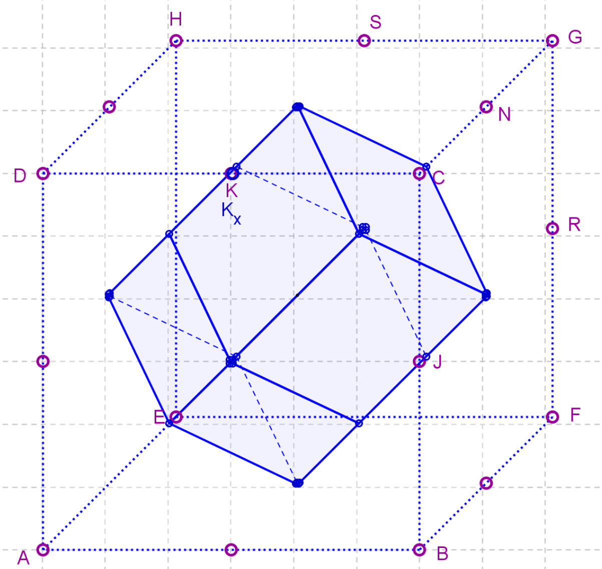


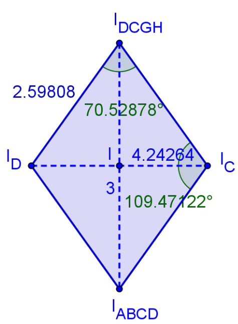
Pour réaliser une *troncature régulière de l'arête* $[CG]$ du cube, on coupe celui-ci selon un plan $(K_xJ_xR_x)$ parallèle au plan diagonal (DBF) qui est parallèle à l'arête $[CG]$, en passant par K_x défini comme précédemment.

a) En considérant que l'arête du cube initial mesure 6 *cm,* tracer la perspective du solide obtenu en réalisant des troncatures régulières* sur chacune des arêtes dans le cas où $x=3$ *cm*. Le solide obtenu s'appelle un *dodécaèdre rhombique*. Déterminer les dimensions d'une des faces du dodécaèdre rhombique obtenu en partant d'un cube de côté 6 *cm* (longueur des diagonales et des côtés, mesures des angles), puis tracer le patron du dodécaèdre rhombique.

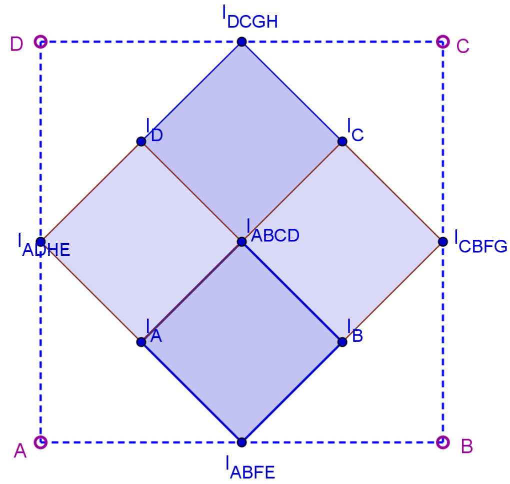


Différentes étapes de la troncature des arêtes d'un cube. Le dodécaèdre rhombique apparaît dans la dernière image. Les faces sont des losanges (c'est évident par raison de symétrie) dont la grande diagonale mesure exactement la distance entre 2 centres de faces, c'est-à-dire aussi la distance entre 2 milieux d'arêtes consécutives sur le cube, par exemple *NJ*. Donc la grande diagonale mesure la moitié de la diagonale d'une face du cube : $\frac{AB\times\sqrt{2}}{2}=\frac{6\times\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\,cm$.





La petite diagonale, quant-à elle, peut être évaluée en considérant le dodécaèdre rhombique inscrit dans le cube : la figure de droite le montre à travers la face *ABCD* du cube en vraie grandeur. Nous avons noté I_{ABCD}, I_{ABFE}, etc. les centres des faces qui sont des sommets du dodécaèdre rhombique où se joignent 4 faces, et I_D, I_C, etc. les sommets du dodécaèdre rhombique où se joignent 3 faces par leur grand angle. I_D, par exemple, est un tel sommet situé au plus proche du sommet D du cube. Les points I_D, I_C, I_B et I_A forment un carré qui est une réduction du carré de la face du cube de facteur ½. La petite diagonale I_DI_C, mesure donc la moitié de l'arête du cube, soit 3 *cm*.



Traçons en vraie grandeur (à gauche) un de ces losanges. Pour évaluer les angles internes de ce losange, que nous nommerons α (le petit angle) et β (le grand angle), calculons :

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{II_D}{II_{DCGH}}=\frac{I_DI_C}{I_{DCGH}I_{ABCD}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$, et donc

$$\frac{\alpha}{2}=\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 35{,}2644° \text{ et } \alpha=2\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 70{,}5288°.$$

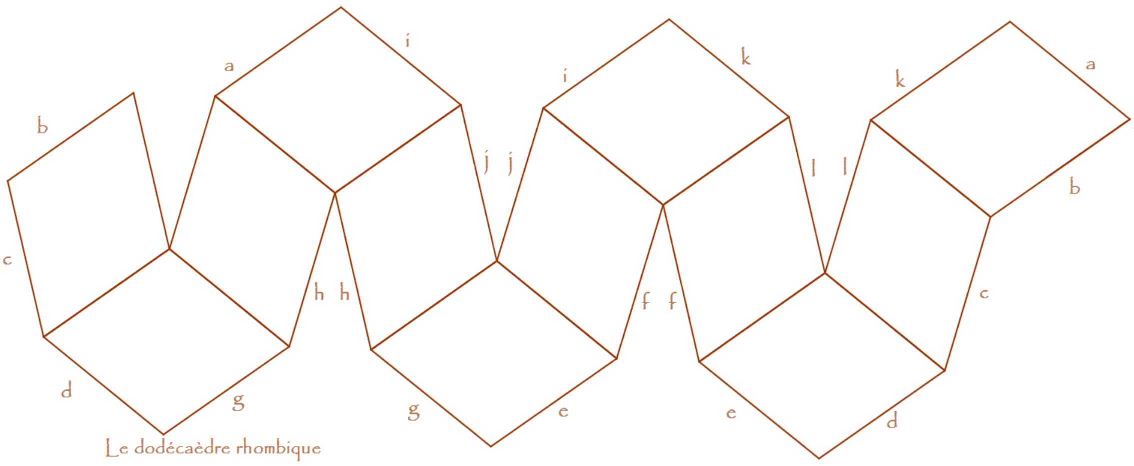
Pour β, on peut juste remarque que α/2 et β/2 sont complémentaires, et donc que α et β sont supplémentaires

$$\beta=180-2\tan^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 109{,}4712°.$$

La dernière mesure qui nous intéresse est la longueur de l'arête des losanges (les faces du dodécaèdre rhombique). Le théorème de Pythagore nous donne cette longueur :

$$I_DI_{DCGH}=\sqrt{(1{,}5)^2+(1{,}5\sqrt{2})^2}=\sqrt{2{,}25+4{,}5}=\sqrt{2{,}25+4{,}5}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}59808\,cm.$$

Le patron de ce solide n'est pas très difficile à réaliser lorsqu'on connaît la forme d'une face : il suffit d'en accoler 12 par 4 (par les petits angles α) et par 3 (par les grands angles β).



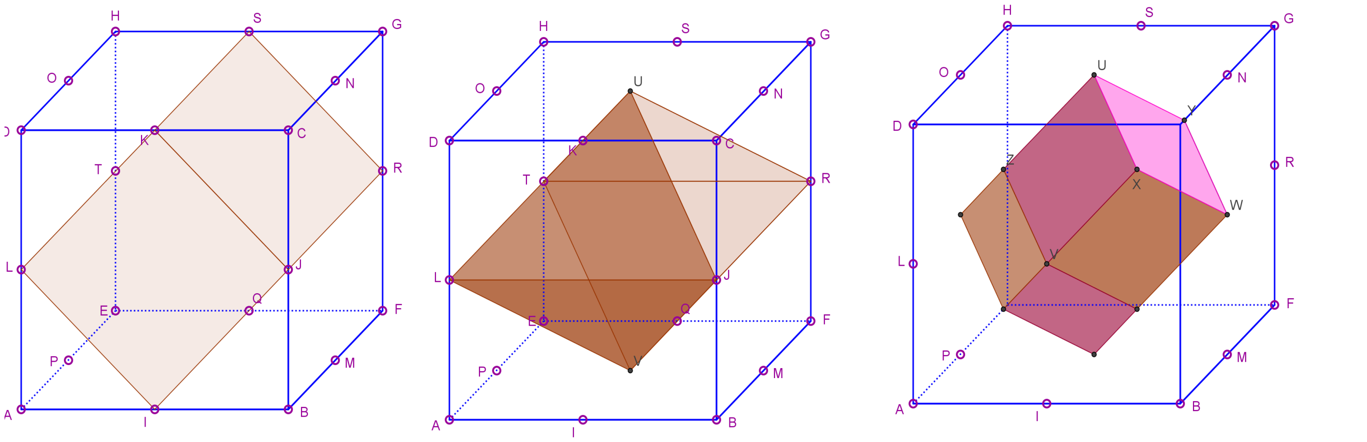
b) Calculer l'aire latérale $\mathfrak{A}_D$ et le volume $\mathfrak{V}_D$ de ce dodécaèdre. Si la petite diagonale des faces d'un dodécaèdre rhombique mesurait 6 *cm,* quel serait son volume ? Comparer ce volume avec celui d'un cube de 6 *cm* de côté ?

On peut considérer que l'aire $\mathfrak{A}_D$ des faces du dodécaèdre rhombique est constituée par 12×2=24 petits triangles isocèles $I_DI_CI_{ABCD}$ de base principale la petite diagonale I_DI_C=3 *cm*, et de hauteur la moitié de la grande diagonale des losanges II_{ABCD} : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ *cm*. Cette remarque conduit à la valeur suivante :

$$\mathfrak{A}_D=24\times\frac{3\times\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2}=54\sqrt{2}\approx 76{,}3675\,cm^2$$, soit 35% des faces du cube initial environ.

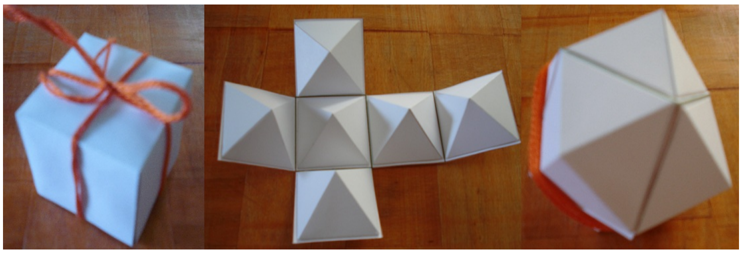
Pour calculer le volume $\mathfrak{V}_D$ du dodécaèdre rhombique, partons de celui du cube : 6×6×6=216 cm^3.
On commence par enlever 4 prismes triangulaires de base 3×3÷2=4,5 cm^2 (par exemple *KCJ*) et de hauteur 6 *cm* (*KS*). Il reste donc au cube ainsi tronqué : 216−4×4,5×6=216−108=108 cm^3 (la moitié est déjà partie).
Remarquons que le solide intermédiaire obtenu est un prisme à base carrée (figure de gauche). Recoupons ce prisme en enlevant 4 pyramides à bases triangulaires telle que *LJUK* sur le schéma ci-contre (on note ici *U* le milieu de la face supérieure, c'est plus facile que I_{DCGH}). La base des pyramides qu'on enlève est un triangle isocèle-rectangle qui mesure *LKJ*=36÷4=9 cm^2 (un quart de la face du cube). La hauteur de ces pyramides est 3 *cm* (la moitié de l'arête du cube). On enlève donc 4×9×3÷3=36 cm^3, il reste 108−36=72 cm^3 (1/3 du cube initial). Le solide restant est une bipyramide à base carrée, une sorte d'octaèdre un peu aplati (figure du milieu).

Enlevons à cet octaèdre aplati les 4 arêtes restantes du cube initial : cela se fait en enlevant encore 4

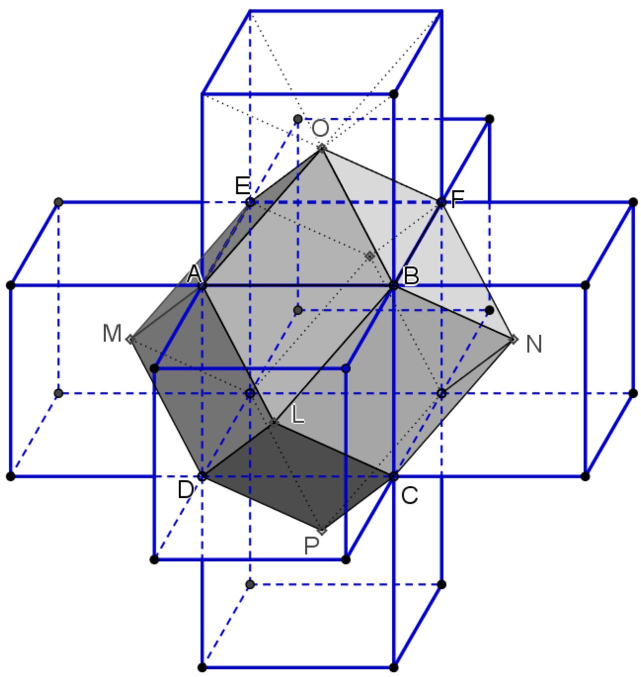


pyramides. Ces pyramides ont comme base les faces en forme de losange dont nous venons de déterminer les dimensions. Les aires de ces bases sont égales à la moitié du produit des deux diagonales (losanges), soit à $3\times3\sqrt{2}\div2=4{,}5\sqrt{2}\,cm^2$. La hauteur de ces pyramides est aussi simple à déterminer : sur la vue en vraie grandeur de la face du cube (plus haut, où nous avons noté I_{ABCD}, I_{ABCD}, etc.), nous remarquons que la hauteur cherchée n'est rien d'autre que la distance BI_B, un quart de la diagonale des faces du cube, soit $\frac{AB\times\sqrt{2}}{4}=\frac{6\times\sqrt{2}}{4}=1{,}5\sqrt{2}\,cm$. Finalement on enlève ainsi $4\times 4{,}5\sqrt{2}\times 1{,}5\sqrt{2}\div3=18\ cm^3$, il reste $72-18=54$. On a donc $\mathfrak{V}_D = 54\ cm^3$ (soit exactement ¼ du cube initial!).

Remarque : Cette découverte (il reste ¼ du volume du cube), peut nous faire réfléchir : nous avions déjà remarqué que les sommets du dodécaèdre rhombique où se joignent trois faces (tels que *X* ou *Z* sur notre figure) sont équidistants les uns des autres, la distance étant égale à la moitié de l'arête du cube. En fait, ces sommets sont les sommets d'un cube de dimension moitié du cube initial. Les faces de ce petit cube sont parallèles à celles du grand et son volume est égal à 1/8ème de celui du grand (les longueurs étant multipliées par ½, le volume est multiplié par 1/8). Si nous faisons subir au centre de ce petit cube des symétries par rapport aux centres de ses faces, nous obtiendrions les autres sommets du dodécaèdre (ceux où les faces se joignent par quatre). Le petit cube peut être vu comme un ensemble de six pyramides à base carrée (les faces de ce petit cube) dont le sommet est le centre du cube. En effectuant cette symétrie, les pyramides tournent leur sommet vers l'extérieur et matérialisent le dodécaèdre rhombique qui, par l'effet du retournement se trouve avoir un volume double de celui du cube (les six pyramides tournées vers l'extérieur ont le volume du cube et elles laissent en se tournant vers l'extérieur un trou cubique de même volume).
Voir, à ce propos :
le « cube transformiste » sur Mathadomicile.



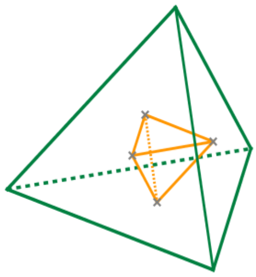
Si la petite diagonale des faces d'un dodécaèdre rhombique mesurait 6 *cm* on aurait doublé toutes les longueurs : les aires seraient alors multipliées par $2^2=4$ et les volumes par $2^3=8$. Le volume de ce grand dodécaèdre rhombique serait alors de $8\times\mathfrak{V}_D = 8\times54 = 432\ cm^3$ soit exactement le double de celui du cube initial.
Une dernière représentation en perspective : ce grand dodécaèdre dans un réseau cubique (on avait déjà vu cette construction dans le TD3 de ce chapitre).
Avec 6 pyramides telles que ABFEO sur cette figure, on peut reconstituer un cube ce qui montre bien que le volume de ce grand dodécaèdre rhombique est le double de celui du cube.



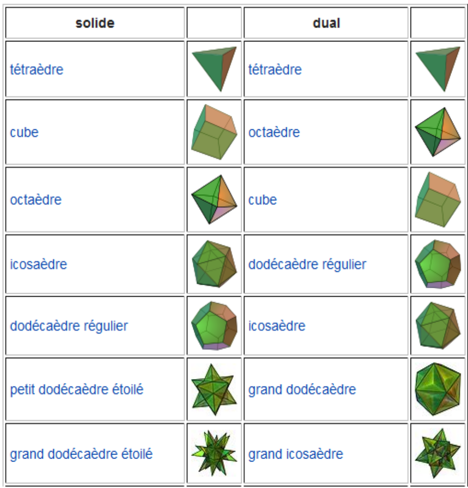
c) Le dodécaèdre rhombique est le *dual* du cuboctaèdre. Chercher la définition de dual. Donner un autre exemple de solides duaux vu dans ce sujet.

La *dualité* est un concept qui ne s'applique pas uniquement aux solides de l'espace. D'une façon générale, l'idée est une association de deux objets dans une relation d'opposition/complémentarité. En géométrie, un solide est un dual d'un autre solide si les faces de l'un sont les sommets de l'autre et réciproquement. Ainsi, on a le cuboctaèdre et le dodécaèdre rhombique qui sont des solides duaux : si l'on considère le solide formé par les centres des faces d'un cuboctaèdre, on obtient un dodécaèdre rhombique, et réciproquement (si l'on considère le solide formé par les centres des faces d'un dodécaèdre rhombique, on obtient un cuboctaèdre).

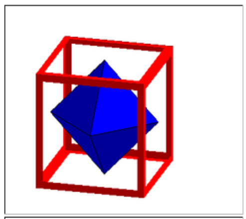
D'autres solides sont ainsi dans une relation duale : le cube et l'octaèdre (partie 2 de ce DM) sont duaux (l'illustration à droite montre ces deux solides inscrits dans le solide dual). Le tétraèdre a pour dual un autre tétraèdre. Tous les solides de l'espace ont leur propre dual.



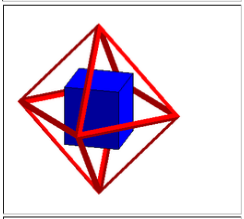
Le tétraèdre est son propre dual



solide		dual	
tétraèdre		tétraèdre	
cube		octaèdre	
octaèdre		cube	
icosaèdre		dodécaèdre régulier	
dodécaèdre régulier		icosaèdre	
petit dodécaèdre étoilé		grand dodécaèdre	
grand dodécaèdre étoilé		grand icosaèdre	



Le dual du cube est l'octaèdre



Le dual de l'octaèdre est le cube

En guise de conclusion, plaçons le dodécaèdre rhombique dans notre tableau sur les aires et les volumes :

	Cuboctaèdre	Le cube	L'octaèdre *BGDHFA*	Dodécaèdre rhombique	Octaèdre régulier
% de l'aire latérale du cube	79%	100%	79%	35%	29%
% du volume du cube	83%	100%	67%	25%	17%
Rapport aire/volume	0,95	1,00	1,18	1,41	1,70

Le cuboctaèdre est le seul de ces volumes qui soit plus compact (compacité mesurée par le rapport aire/volume) que le cube, le solide le moins compact étant l'octaèdre régulier.
Le dodécaèdre rhombique a, quant-à lui, un rapport égal à $\sqrt{2}$!

* Visualiser dynamiquement ces troncatures à l'adresse
http://www.mathcurve.com/polyedres/chanfreine/chanfreine.shtml
Le site mathcurve donne beaucoup d'autres informations sur ces solides. Nous en avons extrait les images ci-dessous du cube imbriqué avec l'octaèdre (à gauche), de l'enveloppe de cette imbrication qui est le dodécaèdre rhombique (à droite, en rouge), du cuboctaèdre dual de ce dodécaèdre rhombique dans les trois inscriptions (au centre) dans le cube, dans l'octaèdre et dans le dodécaèdre rhombique.