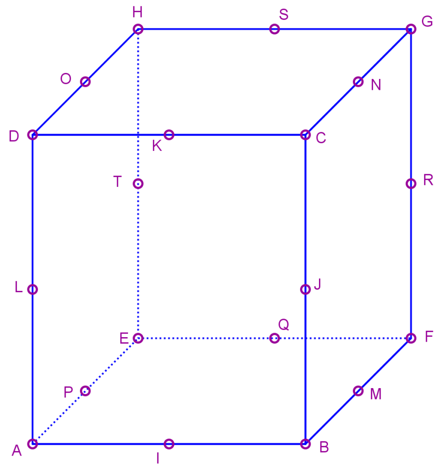
Ce devoir est prévu pour être fait en trio : que vous le fassiez seul, en duo ou en trio, il est à traiter en entier. Bon voyage !

1. Saucissonage



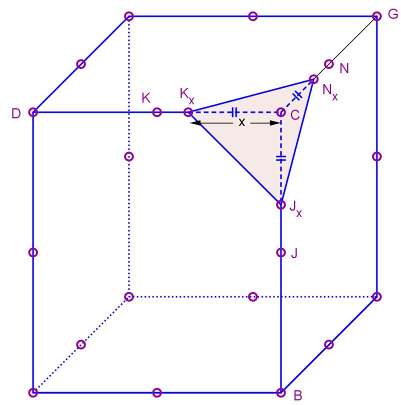
Sur un cube *ABCDEFGH*, nous avons placé les milieux *I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S* et *T* des arêtes comme le montre la figure. Coupons ce cube par les deux plans parallèles : (*DBG*) et (*HFA*).

a) Si l'on isole les trois solides résultants de ce saucissonnage, on s'aperçoit que deux sont des tétraèdres, l'autre étant un octaèdre (huit faces) assez particulier. Tracer le patron (faces en vraie grandeur, attachées par une arête) d'un de ces tétraèdres et celui de l'octaèdre.

b) En considérant que l'arête du cube initial mesure 6 *cm*, calculer l'aire exacte de la surface $\mathfrak{A}_o$ de l'octaèdre ainsi que son volume $\mathfrak{V}_o$. Comparer $\mathfrak{A}_o$ avec l'aire totale des deux tétraèdres et $\mathfrak{V}_o$ avec leur volume total.

c) L'octaèdre obtenu est un *antiprisme.* Chercher la définition de ce mot. Calculer la hauteur de cet antiprisme (la distance entre ses bases).

2. Troncatures des sommets



Avec les mêmes conventions de noms pour les sommets et les milieux des arêtes d'un cube, nous avons placé les points K_x, J_x et N_x sur les arêtes [*CD*], [*CB*] et [*CG*] à une même distance *x* du sommet *C*, comme le montre la figure, puis nous avons enlevé la partie contenant le sommet, réalisant ainsi une *troncature régulière du sommet C*.

a) En considérant toujours que l'arête du cube initial mesure 6 *cm,* tracer la perspective du solide obtenu en réalisant des troncatures* sur chacun de ses sommets dans les deux cas suivants :

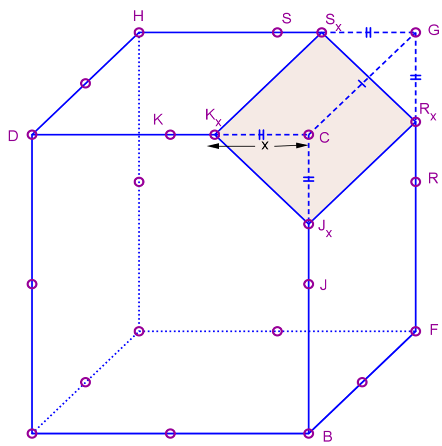
x=2 *cm* - x=3 *cm*

Dans le dernier cas, le solide obtenu s'appelle un *cuboctaèdre*. Déterminer le volume du cuboctaèdre obtenu en partant d'un cube de côté 6 *cm*. Tracer le patron du cuboctaèdre obtenu en partant d'un cube de côté 6 *cm*.

b) On peut continuer la troncature des sommets du cube d'arête 6 *cm* au-delà de la valeur x=3 *cm.* Lorsqu'on continue jusqu'à la valeur de l'arête du cube, donc ici jusqu'à x=6 *cm*, on obtient un solide à huit faces régulières appelé octaèdre régulier. Tracer ce solide en perspective (joindre les centres des faces adjacentes) puis en tracer le patron.

c) Calculer l'aire exacte de la surface $\mathfrak{A}_R$ d'un tel octaèdre régulier et puis son volume $\mathfrak{V}_R$. Déterminer le rapport entre le volume du cube initial et $\mathfrak{V}_R$. Par quel nombre faut-il multiplier les arêtes de l'octaèdre pour que son volume égale celui du cube initial ?

3. Troncatures des arêtes



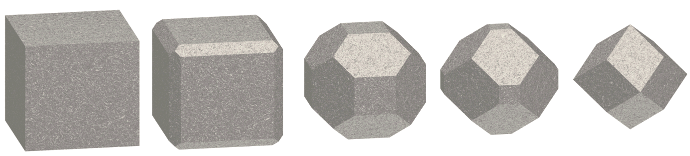
Pour réaliser une *troncature régulière de l'arête* [*CG*] du cube, on coupe celui-ci selon un plan ($K_xJ_xR_x$) parallèle au plan diagonal (*DBF*) qui est parallèle à l'arête [*CG*], en passant par K_x défini comme précédemment.

a) En considérant que l'arête du cube initial mesure 6 *cm,* tracer la perspective du solide obtenu en réalisant des troncatures régulières* sur chacune des arêtes dans le cas où x=3 *cm*.

Le solide obtenu s'appelle un *dodécaèdre rhombique*. Déterminer les dimensions d'une des faces du dodécaèdre rhombique obtenu en partant d'un cube de côté 6 *cm* (longueur des diagonales puis des côtés, mesures des angles). Tracer son patron.

b) Calculer l'aire latérale $\mathfrak{A}_D$ et le volume $\mathfrak{V}_D$ d'un tel dodécaèdre rhombique. Si la petite diagonale des faces d'un dodécaèdre rhombique mesure 6 *cm* quel est son volume ? Comparer ce volume avec celui d'un cube de 6 *cm* de côté ?

c) Le dodécaèdre rhombique est le *dual* du cuboctaèdre. Chercher la définition de dual. Donner un autre exemple de solides duaux vu dans ce sujet.



* Visualiser dynamiquement ces troncatures sur http://www.mathcurve.com/polyedres/chanfreine/chanfreine.shtml