2^de	TD n°2 sur l'espace : Projection sur un plan

1) Projection d'un point parallèlement à une droite

a) Construction du projeté d'un point

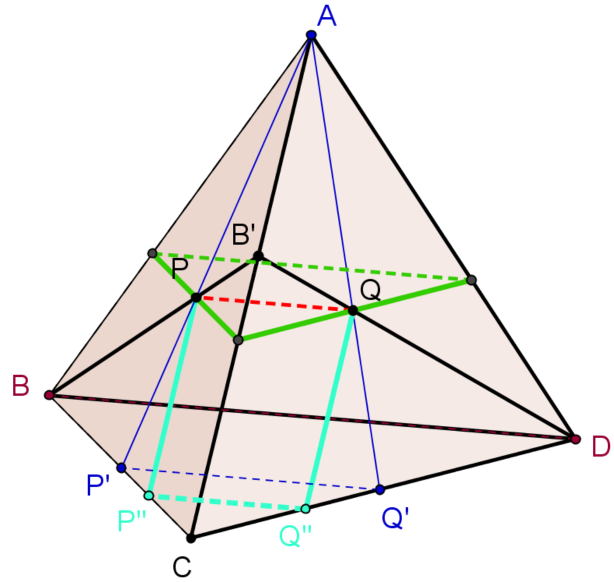
On appelle Q la projection d'un point P du plan de la face ABC d'un tétraèdre $ABCD$ sur le plan de la face ACD, parallèlement à la droite (BD). Construire Q dans les deux cas ci-dessous :

(1) P est sur la face.

Voici quatre méthode, la méthode des projections étant la 2ème :

1ère méthode de construction (en noir) : On trace B' l'intersection de (BP) et (AC). B' et D sont sur (ACD) mais aussi sur le plan défini par les droites parallèles (BD) et (PQ), donc $(B'D)$ contient le point Q cherché (à l'intersection avec la parallèle à (BD) qui passe par P, tracée en pointillés rouges).

2ème méthode de construction (en bleu clair) : On trace P'' la projection de P sur (BCD) parallèlement à la droite (AC). Ensuite, on trace la parallèle à (BD) passant par P''. Cette droite coupe (CD) en Q'' qui est la projection de Q sur (BCD) parallèlement à la droite (AC). Le point Q est alors l'intersection de la parallèle à (BD) passant par P et de de la parallèle à (AC) passant par Q''.

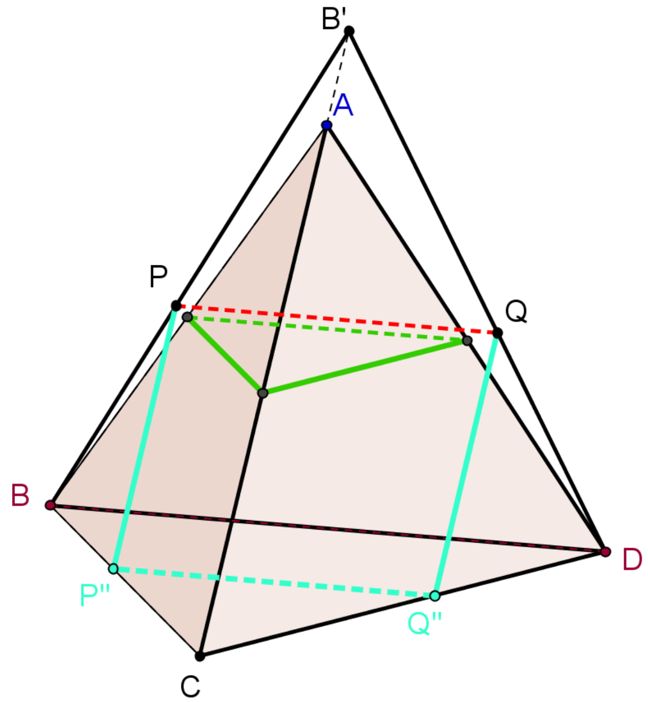


3ème méthode de construction (en bleu foncé) : C'est une variante de la 1ère. On trace P' l'intersection de (AP) et (BC). On trace ensuite la parallèle à (BD) qui passe par P'. Cette droite coupe (CD) en Q', il suffit alors de tracer (AQ') qui contient le point Q cherché (à l'intersection avec la parallèle à (BD) qui passe par P, tracée en pointillés rouges).

4ème méthode de construction (en vert) : On trace l'intersection du plan contenant P qui est parallèle au plan de la face BCD avec les trois autres faces du tétraèdre. Ce plan contient la parallèle à (BD) qui passe par P (tracée en pointillés rouges).

(2) P est en dehors de la face (mais dans le plan contenant la face).

Lorsque P est en dehors de la face du tétraèdre, la construction est inchangée. On se retrouve avec un point Q à l'extérieur

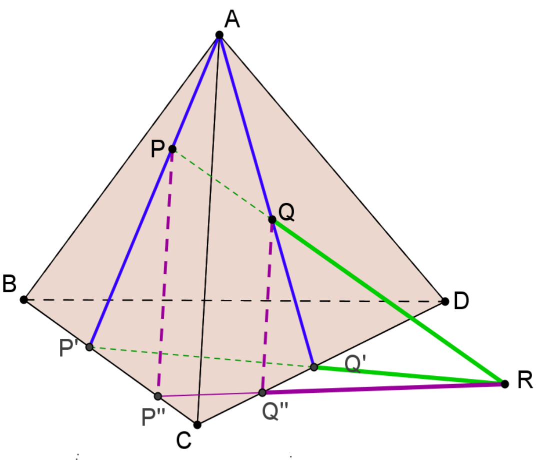


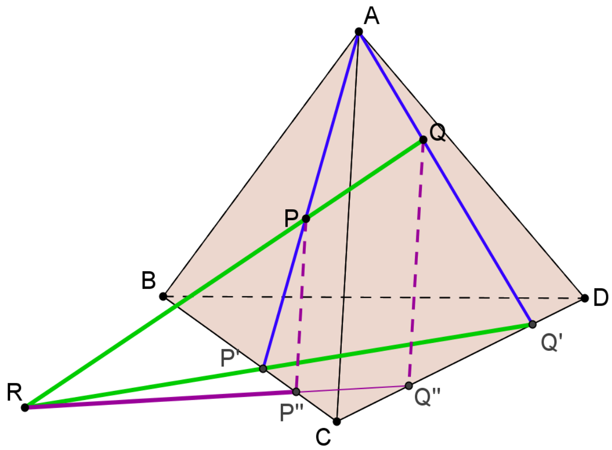
b) Application de cette projection pour résoudre des problèmes connus :

Pb 1 : Les points P et Q appartiennent aux faces ABC et ACD d'un tétraèdre $ABCD$.
Construire le point R d'intersection de la droite (PQ) et du plan (BCD).

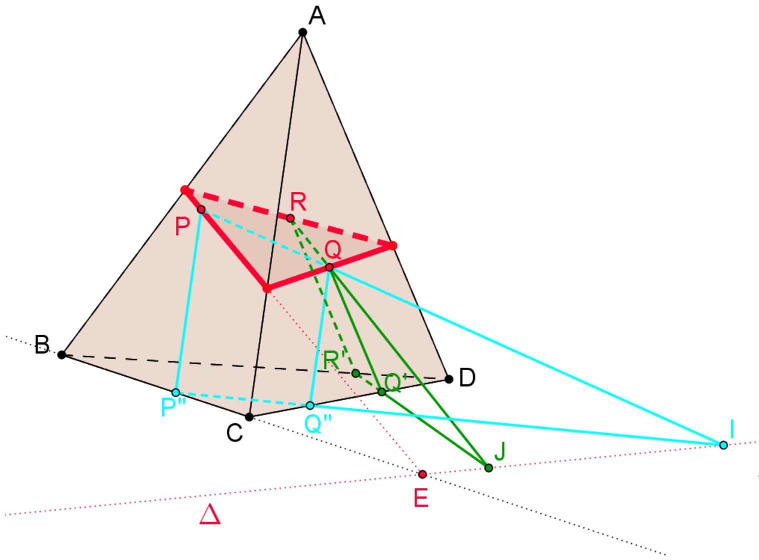
Indication : Projeter P et Q sur (BCD) parallèlement à (AC), tracer l'intersection Δ du plan défini par les droites de projection avec (BCD).

Nous avons la méthode des projections en violet. L'autre construction a été laissée (en bleu et vert) pour constater qu'il ne s'agit pas des mêmes plans, même si la solution R est identique (Heureusement ! Mais cela ne se voit pas forcément sur des constructions faites à la main) : On trace P'' et Q'', les projections de P et Q sur (BCD) parallèlement à la droite (AC). Le point C est alors l'intersection de (PQ) et $(P'Q')$. Si (PQ) est parallèle à (BCD) alors R n'existe pas bien sûr (nous n'avons pas tracé ce cas).



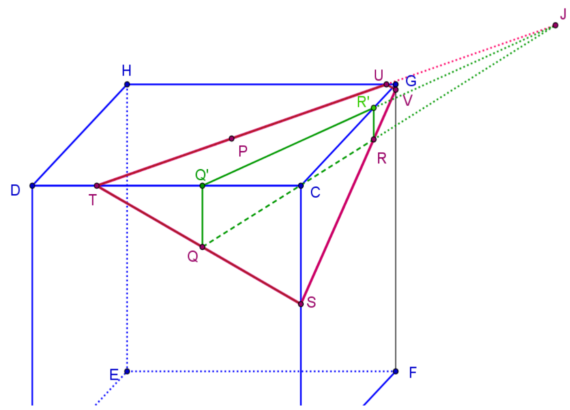


Pb 2 : Les points *P, Q* et *R* appartiennent aux faces *ABC, ACD* et *ABD* d'un tétraèdre *ABCD*. Construire l'intersection du plan (*PQR*) avec les faces du tétraèdre.

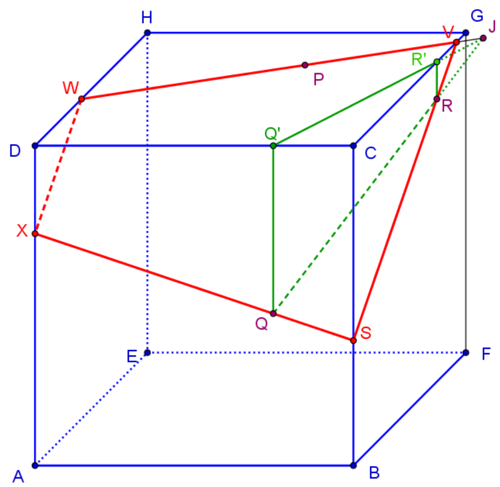


Indication : Tracer l'intersection de (PQ) avec (BCD) par la méthode précédente (une projection parallèle à (AC)), Cela a été fait en bleu clair. On a appelé ce point *I*.
puis de (RQ) avec (BCD) (par une projection parallèle à (AD)) Cela a été fait en vert. On a appelé ce point *J*. Attention à bien déterminer quelle arête du tétraèdre est coupée par les droites de projection (le point *R'* en particulier est souvent mal placé).
et puis tracer l'intersection Δ de (PQR) avec (BCD). Cette droite *Δ* est la droite (*IJ*). Pour savoir comment le plan (PQR) coupe la face ABC, on prolonge (*BC*) jusqu'à couper *Δ*, cela nous donne un point *E* qui est dans (*PQR*), dans (*BCD*) et aussi dans (*ABC*). Il suffit alors de tracer (*PE*) qui est l'intersection de (*PQR*) avec (*ABC*). Le reste est simple et a été tracé en rouge.

Pb 3 : Un cube *ABCDEFGH* est coupé par un plan (*PQR*), *P* étant sur la face *DCG*, *Q* étant sur la face *ABC* et *R* étant sur la face *BCG*. Construire la trace du plan (*PQR*) sur les faces du cube dans le cas ci-contre.
Indication : Tracer l'intersection J de (QR) avec (DCG) par la méthode précédente (une projection parallèle à (BC)). Tracer (JP). La suite est évidente et identique au TD précédent.

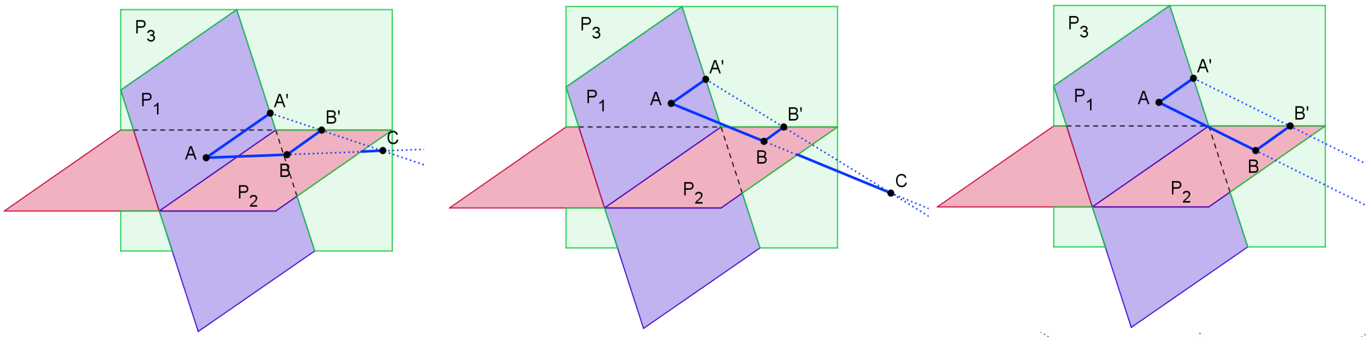


Projetons en *Q'* le point *Q* sur (*DCG*) parallèlement à (*BC*). Projetons ensuite en *R'* le point *R* sur (*DCG*) parallèlement à (*BC*). La droite (*QR*) coupe la droite (*Q'R'*) en *J* qui est sur le plan (*BCD*). On peut alors tracer la droite (*JP*) qui est dans le plan (*BCD*). Cela nous donne les points *U* et *T*. On peut ensuite tracer la droite (*TQ*) qui est dans le plan (*ADC*). Cela nous donne le point *S*. Le reste de la construction ne pose pas de problème. La trace demandée est en rouge.

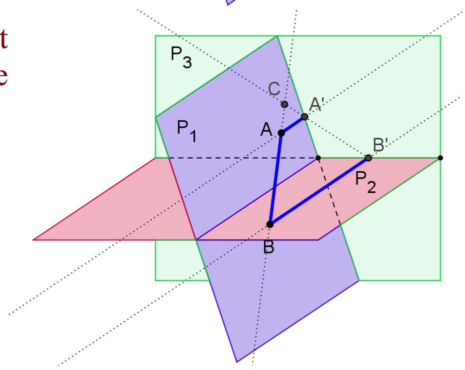


Selon les cas, il y aura un segment [*UV*] dans la face *EFG* ou bien non, si la droite (*JP*) coupe [*CG*] au lieu de [*HG*]. De même, il se peut que le plan (*PQR*) coupe la face *DAE*, auquel cas il y aura un segment [*XW*] à tracer dans cette face et le point *T* disparaît de la section, car il est alors dans le prolongement de [*DC*].

Faute de place, je n'avais pas mis le problème où il s'agit de construire le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan P_3. Le voici, avec la méthode des projections :
On trace A' et B', les projections de A et B sur P_3 parallèlement à la droite d'intersection de P_1 et P_2. Le point C est alors l'intersection de (AB) et ($A'B'$). Si (AB) est parallèle à P_3 alors C n'existe pas bien sûr (figure de droite).



Dans le cas de la 2ème figure (à droite sur le TD1), pour trouver le point C sans sortir des morceaux de plans tracés, il apparaît plus facile d'utiliser cette méthode.

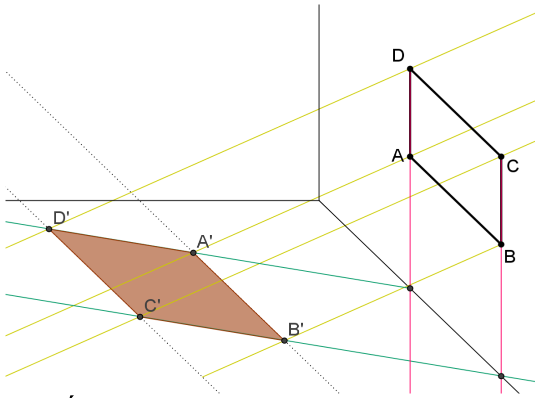


2) Lumière

a) On souhaite tracer la tâche de lumière projetée au sol par un éclairage

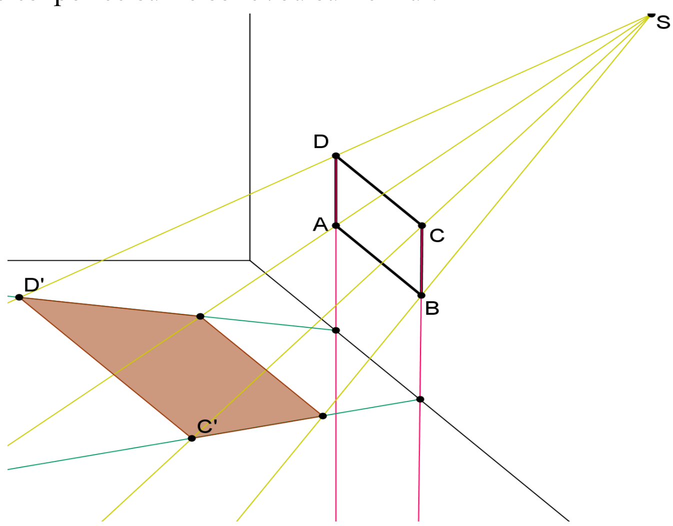
- naturel (la source de lumière étant très loin les rayons sont supposés *parallèles*)
- par une lumière artificielle (les rayons *divergent à partir d'une source S* ponctuelle).

On examine dans les cas suivants ce qui se passe si l'ombre est portée sur le sol et/ou sur le mur.



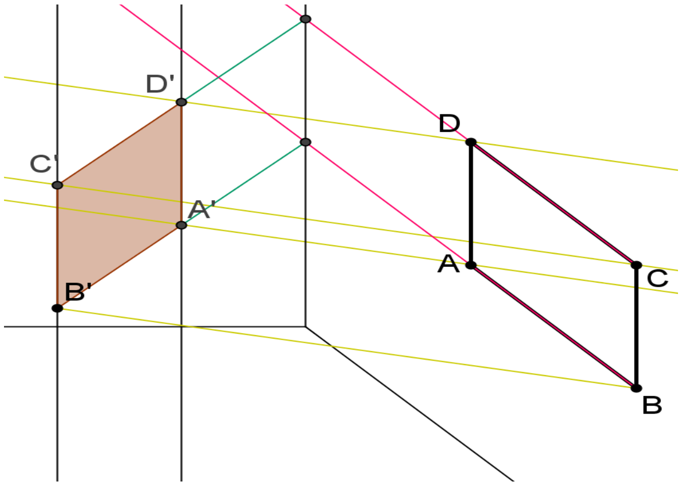
Éclairage naturel, ombre sur le sol

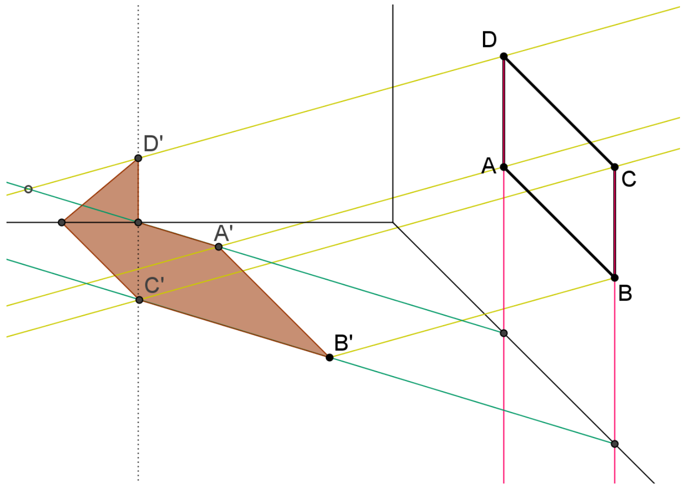
D' est donné. Si deux plans contiennent deux droites parallèles, alors leur intersection sera parallèle à ces droites (th. du toit) ; le plan (DCD') contient une droite (DC) qui est parallèle à une droite du sol (l'intersection du sol et du mur côté fenêtre), il coupe le plan du sol selon la direction de ces droites ; on en déduit que (DC)// ($D'C'$).
Le point A et la droite (DD') définissent un plan qui contient le rayon (AA') parallèle à (DD') ; on construit l'intersection de ce plan avec le sol en prolongeant (DA), cela donne un point que l'on joint à D' ; A' est sur cette intersection. On trace ($A'B'$) selon le raisonnement plus haut, parallèle à (AB).
Pour savoir où sont placé B' et C' sur les droites tracées, on peut considérer que (DAD') et (CBC') sont des plans parallèles (ils contiennent des droites sécantes parallèles deux à deux) ; ils coupent le plan du sol selon deux droites parallèles, donc ($D'A'$)//($C'B'$).



Lumière artificielle

Le raisonnement est un peu semblable ici, sauf que les rayons ne sont pas parallèles. La 1ère chose à faire est de trouver la source de lumière : le point S, en prolongeant les deux rayons donnés (DD') et (CC'). On trace ensuite les autres rayons en partant de S. On peut ensuite chercher les intersections des plans (DAD') et (CBC') avec le sol : on prolonge comme précédemment (DA) et (CB) jusqu'au sol (en rose sur notre figure), puis on trace les intersections cherchées (en bleu sur notre figure). Cela devrait suffire pour tracer la trace de la fenêtre sur le sol.





Éclairage naturel, ombre sur le mur

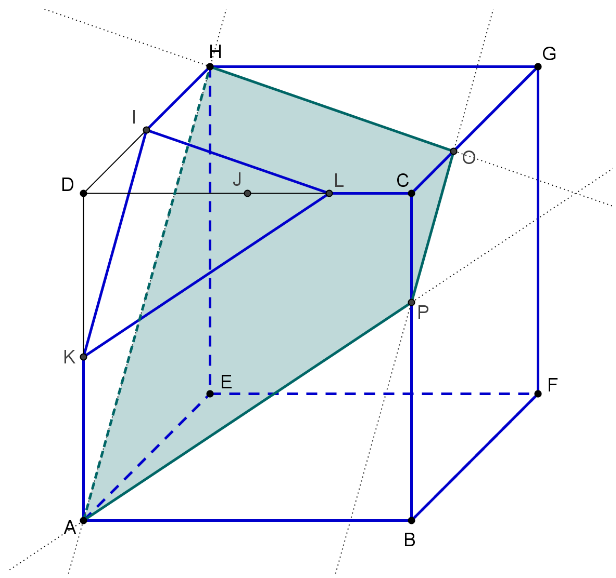
Ici, on fait comme plus haut en intervertissant le sol et le mur du fond. Les couleurs des traits de construction devraient aider à comprendre celle-ci. On peut remarquer que, dans ce cas, ce sont les droites (*DA*), (*BC*), (*DA*) et (*BC*) qui sont parallèles (ils sont verticaux) alors que plus haut c'étaient les droites (*DC*), (*AB*), (*D'C'*) et (*A'B'*).

Éclairage naturel, ombre sur le sol et le mur

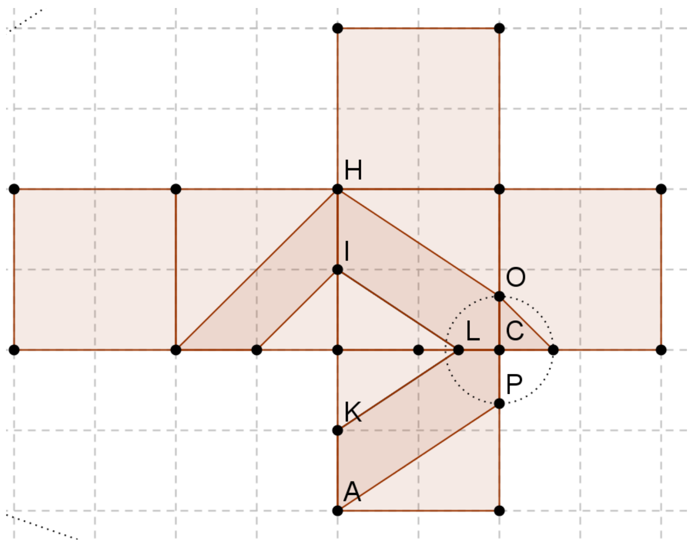
Contrairement aux idées que l'on peut se faire des projections de la lumière, cette construction mixte n'est pas fausse. Une fois construit la trace de la fenêtre sur le sol, comme s'il n'y avait que le sol, il faut se préoccuper de la projection de *D* sur le mur du fond, en procédant comme à gauche. Le segment (*D'A'*) doit se terminer vertical en *D'*.

3) Étude d'un solide

a) *ABCDEFGH* est un cube de 4 cm de côté dont le sommet *D* a été coupé selon le plan (*KIL*) tel que *K, I, J* et *L* sont les milieux de [*AD*], [*DH*], [*DC*] et [*JC*]. Représenter, sur la figure en perspective, la section des faces du cube avec un plan parallèle à (*KIL*) passant par *H* (on notera *O* et *P* les intersections de ce plan avec les arêtes [*CG*] et [*CB*]).



b) Sur le patron du cube, tracer les arêtes du polyèdre *KILCOPACH* et colorier ses faces latérales.

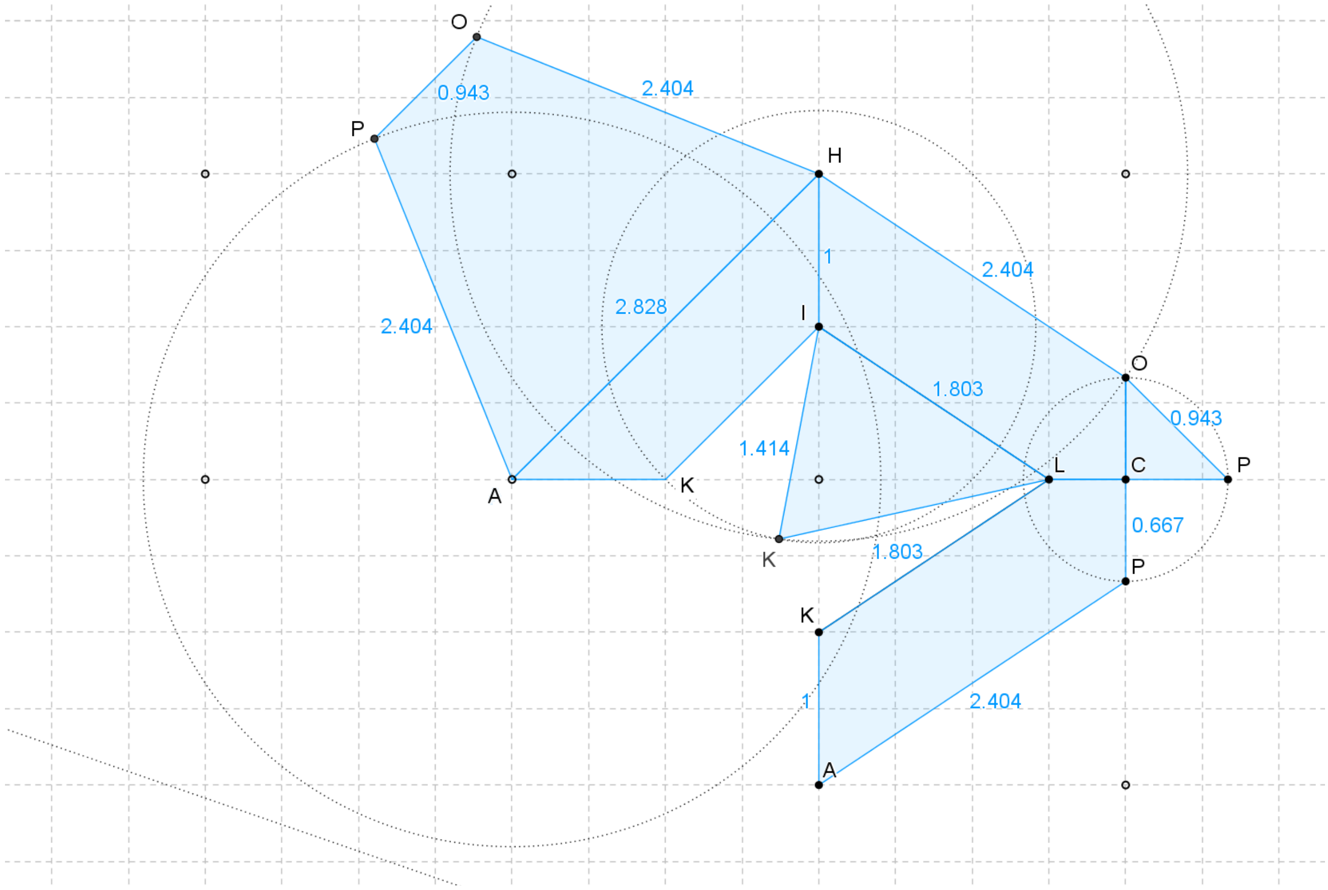


c) En reportant les mesures obtenues, construire sur ce patron, les bases *KIL* et *HOPA* (un trapèze) du polyèdre *KILCOPACH*.

La construction n'est pas si facile à faire à la main, car nous n'avons que des longueurs de segment qu'il faut reporter avec le compas. Avec GeoGebra c'est plus facile...(voir ci-dessous ; j'ai laissé les sommets du patron visibles sous la forme de petits ronds ; le quadrillage sous-jacent permet aussi de se repérer ; les cercles en pointillés permettent de tracer les longueurs).

d) Calculer le volume du polyèdre *KILCOPACH*.

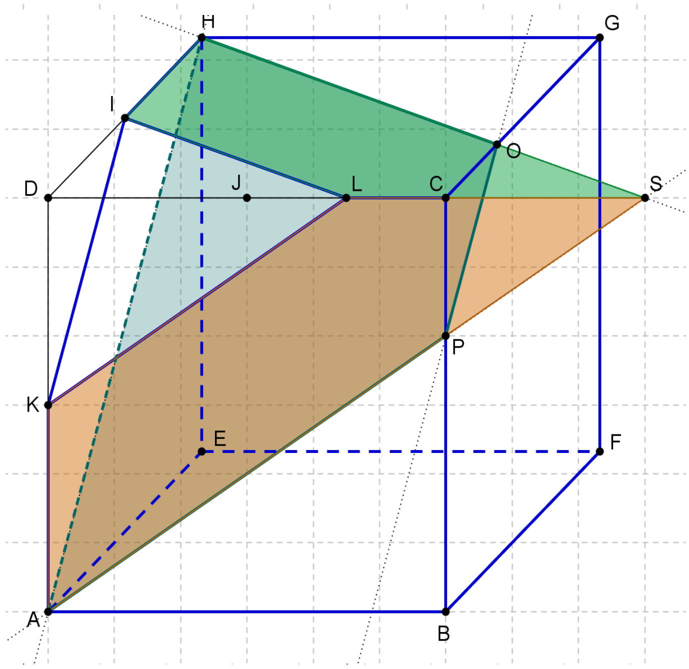
Pour calculer le volume du polyèdre, il faut procéder par soustraction : calculons pour commencer le volume de la pyramide *HDAS*, *S* étant l'intersection de (*HO*) et (*AP*). La base *ADH* mesure $4\times4\div2=8cm^2$ (la moitié d'une des face carrée). La hauteur $DS=DL\times2=3\times2=6cm$ (Théorème des milieux dans le triangle *DHS*, *I* étant le milieu de [*DH*]). Le volume de *HDAS* est donc $8\times6\div3=16cm^3$.



À cette pyramide, on enlève le coin $OCPS$ qui est une réduction de $HDAS$ de coefficient 1/3 (car si DS=6cm alors CS=6−4=2cm et on a bien $\frac{CS}{DS}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$), donc on enlève $16\div3^3=\frac{16}{27}\ cm^3$.

On enlève aussi le coin $IDKL$ qui est une réduction de $HDAS$ de coefficient ½ (car I étant le milieu de [DH], $\frac{DI}{DH}=\frac{1}{2}$), donc on enlève $16\div2^3=\frac{16}{8}=2\ cm^3$.

Finalement, le polyèdre $KILCOPACH$ mesure



$$16-\frac{16}{27}-2=\frac{14\times27-16}{27}=\frac{362}{27}\approx13{,}407407\ cm^3.$$