DS n°5 sur les fonctions de référence

CORRECTION

I] Polynôme du 2^d degré

On se propose d'étudier la fonction *f* définie par $f(x)=-5x^2+20x+1{,}5$.

a) Écrire *f*(*x*) sous la forme canonique $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$.

On a $f(x)=-5x^2+20x+1{,}5=-5(x^2-4x-0{,}3)=-5((x-2)^2-(2)^2-0{,}3)=-5((x-2)^2-4{,}3)$, soit $f(x)=-5(x-2)^2+5\times4{,}3=-5(x-2)^2+21{,}5$ ce qui est la forme canonique voulue avec $\alpha=-5, \beta=2, \gamma=21{,}5$.

b) Utiliser la forme canonique pour :

- Montrer que *f* admet un maximum y_0 atteint pour une valeur x_0 de *x* à déterminer.

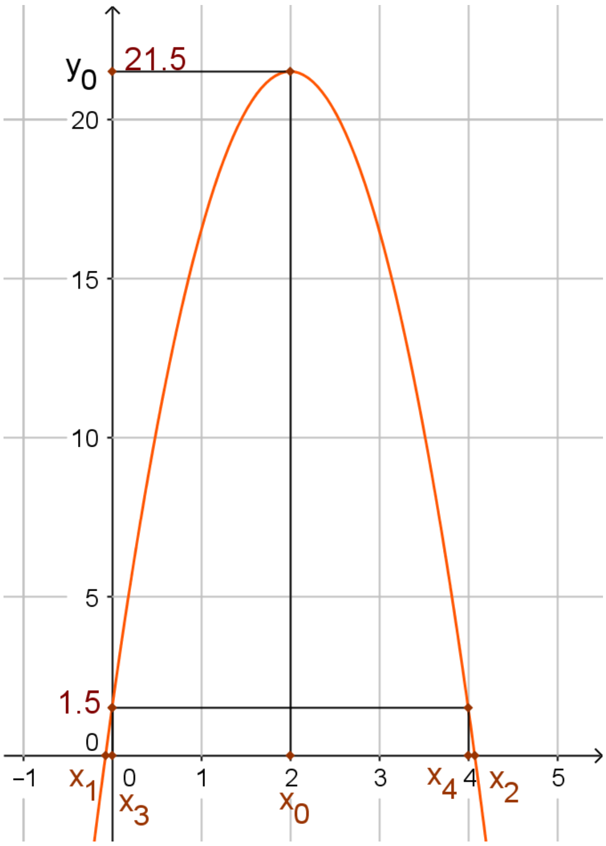
$\forall x\in\mathbb{R}, (x-2)^2\geq0$ avec l'égalité lorsque $x=2$. Donc, en multipliant par $-5<0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}, -5(x-2)^2\leq0$. Finalement, $\forall x\in\mathbb{R}, -5(x-2)^2+21{,}5\leq21{,}5$.
Par conséquent, $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leq21{,}5$ avec l'égalité lorsque $x=2$: *f* admet un maximum $y_0=21{,}5$ atteint pour une valeur $x_0=2$.

- Déterminer le taux d'accroissement τ de *f* entre deux valeurs de x.

On peut le retrouver facilement par le calcul, ou utiliser la forme générale vue en cours ($\tau=\alpha(x_1-\beta+x_2-\beta)$, mais ici on a $\tau=-5(x_1-2+x_2-2)$. On peut aussi écrire que $\tau=-5(x_1+x_2-4)$ ou même que $\tau=-5(x_1+x_2)+20$ mais ces formes n'apportent qu'une simplification inutile.

- Montrer que *f* est strictement croissante sur] $-\infty$; x_0].

Pour $x_1\leq2$ et $x_2\leq2$, on a $x_1-2\leq0$ et $x_2-2\leq0$, et si $x_1\neq x_2$ l'un des deux nombres au moins n'est pas nul. Donc, par addition, $x_1-2+x_2-2<0$. En multipliant par $-5<0$, on obtient $-5(x_1-2+x_2-2)>0$.
Le taux d'accroissement τ étant négatif strictement, la fonction *f* est strictement croissante sur cet intervalle.



c) Dresser le tableau de variation de *f* puis la courbe représentant *f* sur l'intervalle [-1 ;5].

Les trinômes qui admettent un maximum ont un tableau de variation toujours identique :

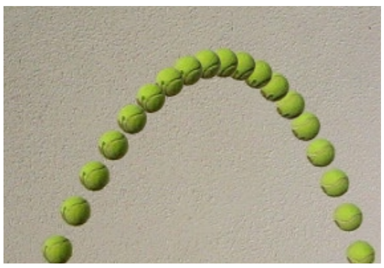
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	$21{,}5$	↘

d) Chercher les antécédents x_1 et x_2 de 0 en résolvant l'équation $f(x)=0$.

On a
$f(x)=-5((x-2)^2-4{,}3)=-5(x-2+\sqrt{4{,}3})(x-2-\sqrt{4{,}3})$, ce qui est la forme factorisée (non demandée) et qui donne, en même temps les antécédents x_1 et x_2 de 0 demandés :

$$x_1=2-\sqrt{4{,}3}, x_2=2+\sqrt{4{,}3}$$

e) Application : on lance une balle de tennis à la vitesse de 20 *m/s*. La hauteur *h*, en mètres, atteinte par la balle en fonction du temps *x*, en secondes, est donnée par la fonction *f* : *h*=*f*(*x*).



- De quelle hauteur a été lancée la balle ?

Au moment du lancé, on a *x*=0 et donc *h*=*f*(0)=1,5 *m*.

- À quel moment la balle atteint-elle sa plus grande hauteur ?

La plus grande hauteur est atteinte au bout de *x*=2 *s*.

- Quelle est la hauteur maximale atteinte ?

La plus grande hauteur atteinte est 21,5 *m*.

- Au bout de combien de temps la balle touche t-elle le sol ?

La balle touche le sol lorsque *h*=*f*(*x*)=0, c'est-à-dire pour $x=x_2=2+\sqrt{4{,}3}\approx4{,}07$ *s* (l'autre solution de l'équation *f*(*x*)=0 est négative $x_1=2-\sqrt{4{,}3}\approx-0{,}07$ et ne peut convenir).

II] Fonction homographique

La fonction g est définie par $g(x)=\frac{2x}{x+2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de cette fonction puis écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$.

On peut calculer $\frac{2x}{x+2}$ pour toutes les valeurs réelles de x sauf pour $x+2=0$, il faut donc que $x\neq-2$. L'ensemble de définition D_g est $]-\infty\ ;-2[\cup]-2\ ;+\infty[$, cet ensemble peut aussi se noter $\mathbb{R}-\{-2\}$.
$\frac{2x}{x+2}=\frac{2(x+2)-4}{x+2}=\frac{2(x+2)-4}{x+2}=2-\frac{4}{x+2}$ ce qui est bien la forme canonique voulue avec $\alpha=2,\beta=-4,\gamma=2$.

b) Déterminer le taux d'accroissement τ de g entre deux valeurs de x, puis étudier le signe de τ sur chacun des intervalles de D_g.

L'exercice a été fait plusieurs fois, on en a conclu que, d'une façon générale, à partir de la forme canonique rappelée plus haut, on a $\tau=\frac{-\beta}{(x_1+\gamma)(x_2+\gamma)}$. Donc ici, $\tau=\frac{4}{(x_1+2)(x_2+2)}$.
Ce nombre τ est strictement positif quels que soient les nombres $x_1\in]-2\ ;+\infty[$ et $x_2\in]-2\ ;+\infty[$ (les deux facteurs (x_1+2) et (x_2+2) sont alors positifs), la fonction g est strictement croissante sur $]-2\ ;+\infty[$.
De même, pour des nombres $x_1\in]-\infty\ ;-2[$ et $x_2\in]-\infty\ ;-2[$ (les deux facteurs (x_1+2) et (x_2+2) sont négatifs). La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty\ ;-2[$.

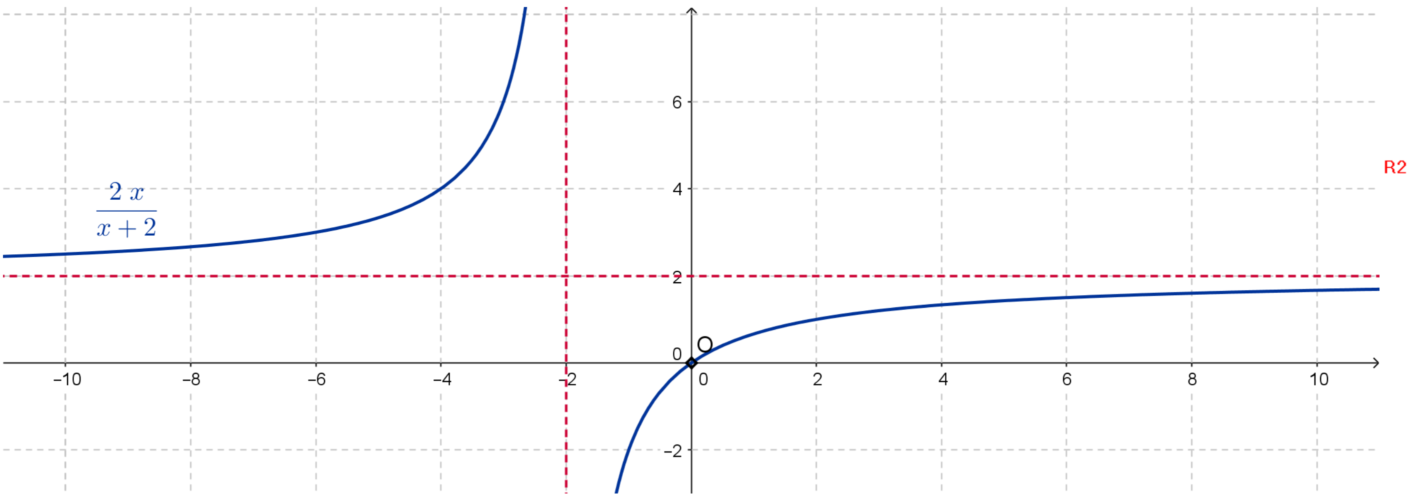
c) Dresser le tableau de variation de g en y précisant les valeurs limites de $g(x)$ au bord de D_g. Donner les équations des asymptotes (droites vers lesquelles se rapproche la courbe de g aux bornes de son ensemble de définition).

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x)$	2 $\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	2

$g(x)=2-\frac{4}{x+2}$. Pour des valeurs positives très grandes, le dénominateur $x+2$ est très grand, $\frac{4}{x+2}$ est alors très petit, il s'approche de 0. Et donc $2-\frac{4}{x+2}$ s'approche de 2. De même pour des valeurs infiniment petite négativement... Pour les valeurs proches de la valeur interdite -2, le nombre $g(x)$ s'approche de l'infini (positif ou négatif selon les cas).

d) Tracer la courbe de g sur $[-10\ ;10]$ ainsi que ses asymptotes.

Les asymptotes : il y en a deux. La verticale a pour équation $x=-2$, l'horizontale a pour équation $y=2$. Ces deux droites sont tracées en pointillés rouge. La courbe de g est en bleu.



e) <u>Application</u> : lors d'un branchement en parallèle de deux résistances R_1 et R_2, on peut remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition de vérifier l'égalité $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

- Exprimer R en fonction de R_1 et R_2,

$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{R_2}{R_1R_2}+\frac{R_1}{R_1R_2}=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}$ et donc, en inversant ces deux fractions $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

- Montrer alors que si R_1=2 Ω et $R_2=x$ Ω, on a $R=g(x)$ et $\forall x\in\mathbb{R}^+, 0\leq R<2$.

Si R_1=2 Ω et $R_2=x$ Ω, on a $R=\frac{2x}{2+x}$ (il suffit de remplacer R_1 et R_2 par leurs valeurs : 2 et x)
Si $R_2=x$ est positif (ce qui est bien le cas car une résistance est toujours positive), donc $\forall x\geq0$, on a bien $2x\geq0$ et $2+x\geq2>0$. Le quotient de deux nombres positifs étant positif, on a bien $\frac{2x}{2+x}\geq0$.

- En déduire la valeur de R_2 quand R_1=2 Ω et R=1,5 Ω.

Quand $R=\frac{2x}{2+x}=1{,}5\ \Omega$, on cherche les antécédents de 1,5 par g. On voit sur la courbe qu'il n'y a qu'une seule valeur et que celle-ci est positive (ce qui est obligatoire pour une résistance).
On la trouve par le calcul en résolvant l'équation $\frac{2x}{2+x}=1{,}5$ qui équivaut, comme $x+2>0$, à $2x=1{,}5(2+x)=3+1{,}5x \Leftrightarrow 2x-1{,}5x=3 \Leftrightarrow 0{,}5x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{0{,}5}=6\ \Omega$.
Donc quand $R_1=2\ \Omega$ et $R=1{,}5\ \Omega$, on a $R_2=6\ \Omega$.
Vérification : $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{6}{12}+\frac{2}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ et donc, comme $\frac{1}{R}=\frac{2}{3}$, $R=\frac{3}{2}\ \Omega$.

III] Fonctions valeurs absolues

a) Écrire les expressions suivantes sans les barres de valeur absolue, en précisant le domaine de validité :
$f(x)=|-2x+1|$; $g(x)=|2x-5|$; $h(x)=f(x)-g(x)$

Nous pouvons distinguer 3 cas selon la valeur de x.
$-2x+1>0$ pour $x<\frac{1}{2}$ et $2x-5>0$ pour $x>\frac{5}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)=\lvert -2x+1\rvert$		$-2x+1$	0	$2x-1$		$2x-1$	
$g(x)=\lvert 2x-5\rvert$		$-2x+5$		$-2x+5$	0	$2x-5$	
$h(x)=f(x)-g(x)$		-4		$4x-6$		4	

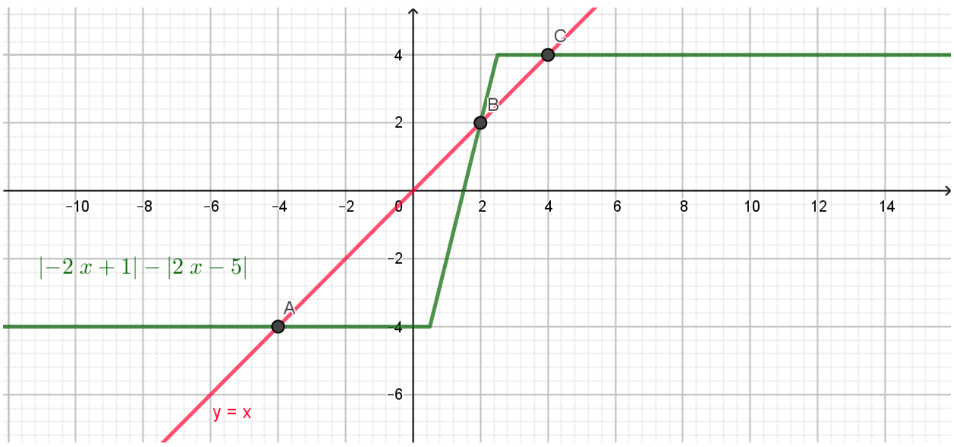
b) À partir des expressions affines obtenues, dresser le tableau des variations de h.
Sur les deux intervalles extrêmes, les expressions sont constantes ($h(x)$ ne dépend pas alors de x), mais sur l'intervalle central, l'expression affine est croissante (car le coefficient de x est 4>0).

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$\longrightarrow$	-4	$\nearrow$	4	$\longrightarrow$	

c) Déterminer l'extremum de h sur $\mathbb{R}$ (nature, valeur de l'extremum, valeur de la variable pour l'atteindre).
La fonction h admet un maximum : 4, atteint pour $x\geq\frac{5}{2}$ et un minimum : -4 atteint pour la valeur $x\geq\frac{1}{2}$.
Remarque : ma question était mal posée puisqu'il y a deux extremums... désolé de n'avoir pas corrigé cette coquille avant. C'est la même chose pour l'expression « valeur de la variable pour l'atteindre » qui devrait normalement être au pluriel ici. Au départ, j'avais pris $g(x)=|1{,}5x-5|$, les expressions de $h(x)$ n'étaient pas alors constantes et il n'y avait qu'un minimum... Et puis, pour vous simplifier la tâche, j'ai changé l'expression et oublié d'adapter les questions...

d) Résoudre l'inéquation $h(x)\geq 0$ par le calcul.
L'équation $h(x)=0$ concerne l'intervalle central (entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$), elle s'écrit $4x-6=0$ et a pour solution $x=\frac{3}{2}$. Comme h est croissante sur cet intervalle, $h(x)\geq 0$ a pour solutions $x\geq\frac{3}{2}$. Pour $x\geq\frac{5}{2}$, on a $h(x)=4>0$ et donc $h(x)\geq 0$. Conclusion : L'inéquation a pour solutions réelles $x\geq\frac{3}{2}$.

e) Montrer graphiquement que l'équation $h(x)=x$ a trois solutions, notées x_1, x_2 et x_3. Déterminer ces solutions par le calcul.



Pour résoudre graphiquement une équation, il faut considérer le graphique (non demandé mais observé sur la calculatrice) : on trace la courbe de h (elle permet aussi de vérifier les résultats précédents), et on trace aussi la courbe d'équation $y=x$. Ainsi, les solutions de l'équation $h(x)=x$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
Les solutions se lisent directement sur la courbe (elles sont entières) : -4 ,2 et 4. Si j'ai écrit « par le calcul » c'est qu'au départ, j'avais pris $g(x)=|1{,}5x-5|$ (les expressions étaient alors moins évidentes).

IIII] Parabole et tables de multiplication

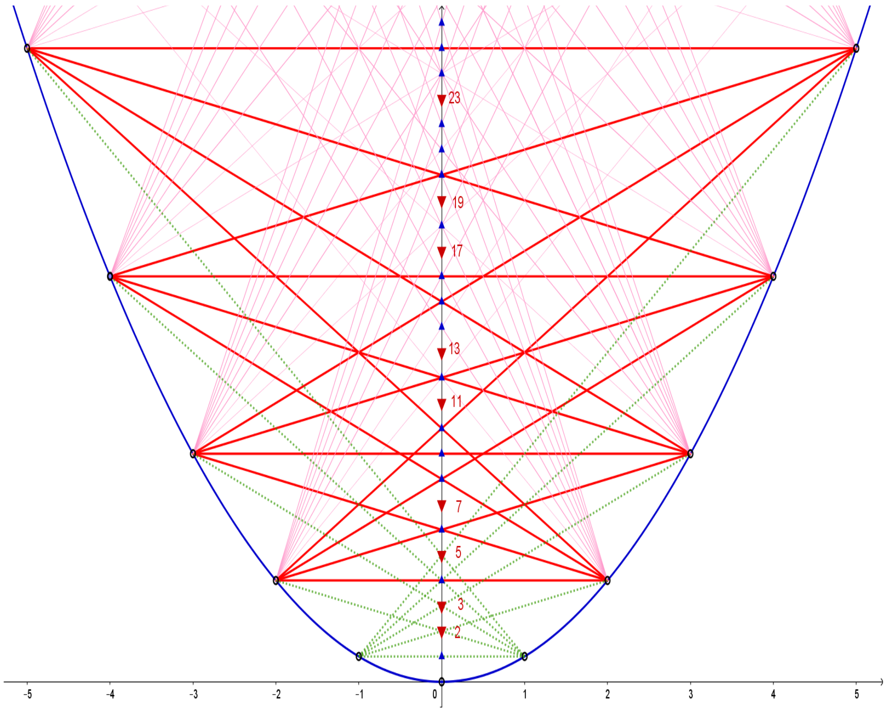
a) Tracer Γ la parabole d'équation $y=x^2$ pour $x\in[-5\ ;\ +5]$ (prendre 1 carreau par unité).
C'est fait plus bas.

b) On note M un point de Γ d'abscisse m strictement positive (m>0) et N un point de Γ d'abscisse $-n$ strictement négative ($-n<0\Leftrightarrow n>0$). Montrer que l'équation de la droite (MN) est $y=(m-n)x+mn$.
Le taux de variation (pente) de la droite (MN) est :

$$a=\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{m^2-(-n)^2}{m+n}=\frac{m^2-n^2}{m+n}=\frac{(m-n)(m+n)}{m+n}=m-n\ .$$

L'équation de la droite (MN) est $y=(m-n)x+b''$ où b'' vérifie par exemple, l'égalité $m^2=(m-n)m+b''$, soit $b''=mn$.
On a donc l'équation suivante pour (MN) : $y=(m-n)x+mn$.

c) Quelle est l'ordonnée à l'origine de (MN) ? Expliquer pourquoi et comment, si on trace les segments [MN] pour toutes les valeurs entières de m et de n, on peut visualiser les nombres premiers (nombres qui ne sont pas dans les tables). Faire ces tracés pour $m\,,n\in\{1,2,3,4,5\}$ et montrer sur la figure où se visualisent les nombres premiers.



L'ordonnée à l'origine de cette droite est le nombre positif mn, produit des deux nombres positifs m et n.
Nous allons tracer Γ pour $x\in[-5\ ;\ +5]$ ainsi que les segments [MN] pour les valeurs entières de m et de n supérieures à 1.
Nous avons tracé **en rouge** les segments issus des points dont la valeur absolue de l'abscisse est supérieure ou égale à 2 (en rose pâle, lorsqu'on dépasse 5 car ce n'était pas demandé).
Nous avons tracé **en vert** les segments issus des points dont la valeur absolue de l'abscisse est égale à 1. Ces segments vont matérialiser la table de 1 et donc, ils vont passer indifféremment sur les nombres premiers ou composés. Pour cette raison, ils ne nous intéressent pas ici et nous les avons distingué pour ne pas en tenir davantage compte.
Pour visualiser un produit, par exemple le produit 2×4, on regarde le segment joignant les points $M(2)$ et $N(-4)$: il coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 8, on a donc 2×4=8. Le nombre 8 est donc composé (il est dans la table de 2 et dans celle de 4). Nous l'avons représenté par un triangle bleu, pointe vers le haut.
On peut lire ainsi le début des tables de 2, 3, 4 et 5
Entre 4 et 6, sur l'axe des ordonnées, le point d'ordonnée 5 n'est atteint par aucun segment rouge : c'est donc un nombre premier ; de même pour 7, 11, etc. Nous avons représenté ces nombres premiers par un triangle rouge, pointe vers le bas. Les nombres premiers apparaissent ainsi, sur cette construction, comme les seuls points qui ne sont jamais atteint par aucun segment rouge joignant deux points à coordonnées entières de la courbe de la fonction carré, la valeur absolue de l'abscisse étant supérieure ou égale à 1.