2de CORRECTION TD n°2 : intervalles et ensembles CORRECTION

Les ensembles de nombres sont notés avec des lettres spéciales :
$\mathbb{N}$: les entiers, $\mathbb{Z}$: les entiers relatifs, $\mathbb{Q}$: les rationnels, $\mathbb{R}$: les réels.
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^*$ désignent les réels positifs, négatifs et non-nuls (idem pour les autres ensembles).
Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$: [0;1] est un intervalle fermé,]0;1] est semi-ouvert ($0 \notin]0;1[$).

1) Appartenance et inclusion

Un *élément* appartient ($\in$) ou non ($\notin$) à un ensemble.
Un *ensemble* est inclus ($\subset$) ou non ($\not\subset$) dans un autre ensemble.
Compléter avec le symbole qui convient.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$	$0{,}5 \in \mathbb{R}^+$	$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^- \not\subset \mathbb{Q}^-$	$0 \in \mathbb{Z}^-$
$[2;5] \not\subset \mathbb{N}$	$\pi-3 \notin \mathbb{R}^-$	$[\frac{1}{2};\frac{2}{3}] \not\subset \mathbb{Q}$	$[0;1] \subset \mathbb{R}$	$0{,}001 \in [-10^{-5};10^5]$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \in [0;1]$	$[-1;5] \subset [-20;20]$	$]2;5[\subset [2;5]$	$[2;5] \subset [2;5]$	$\sqrt{\frac{4}{25-16}} \in \mathbb{Q} \cap]0;1[$

2) Réunion et intersection d'intervalles

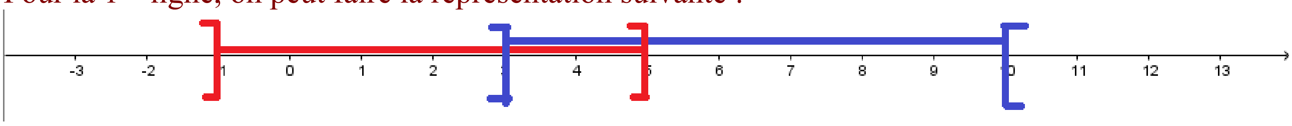
I et *J* étant des ensembles,

- $I \cap J$ est l'*intersection* de *I* et *J* ($x \in I \cap J$ si $x \in I$ et $x \in J$)
- $I \cup J$ est la *réunion* de *I* et *J* ($x \in I \cup J$ si $x \in I$ ou si $x \in J$ ou si $x \in I \cap J$).

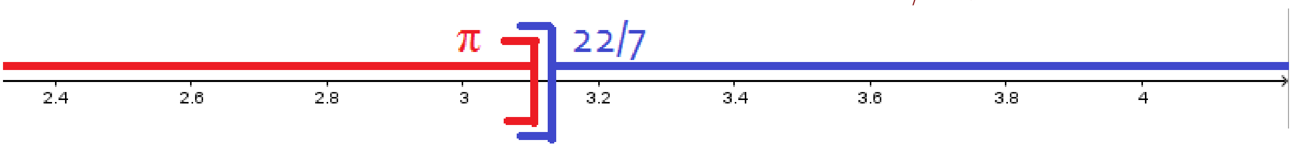
Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$ dans les cas suivants (représenter graphiquement les intervalles).

I	J	$I \cup J$	$I \cap J$
$]-1;5]$	$]3;10[$	$]-1;10[$	$]3;5]$
$[-1;\pi]$	$[3;\sqrt{10}]$	$[-1;\sqrt{10}]$	$[3;\pi]$
$]-\infty;\pi]$	$]\frac{22}{7};+\infty[$	$]-\infty;\pi] \cup]\frac{22}{7};+\infty[= \mathbb{R} -]\pi;\frac{22}{7}]$	$\emptyset$
$]3{,}14;\pi]$	$[\pi;3{,}1416[$	$]3{,}14;3{,}1416[$	$\{\pi\}=[\pi;\pi]$
$[\pi;+\infty[$	$[3;+\infty[$	$[3;+\infty[=J$ car $J \subset I$	$[3;\pi]=I$

La représentation graphique des intervalles a pour objectif de faciliter la compréhension : pour la réunion on doit être dans l'un ou dans l'autre ; pour l'intersection on doit être dans l'un et dans l'autre
Pour la 1ère ligne, on peut faire la représentation suivante :



L'ordre des bornes des différents intervalles est important.
Voici la représentation pour la 3ème ligne, sachant que $\pi \approx 3{,}14159$ et $\frac{22}{7} \approx 3{,}14286$:



La réunion de deux intervalles n'est donc pas toujours un intervalle (ça peut ne s'écrire qu'avec le symbole d'union comme $]-\infty;\pi] \cup]\frac{22}{7};+\infty[$ où les deux intervalles sont disjoints) alors que l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle simple (éventuellement vide ou limité à un point).

3) Écriture ensembliste et intervalle

Un ensemble peut être noté avec des accolades {}

- en *extension* comme S={0;1;2} un ensemble fini ou $\mathbb{N}=\{0;1;2;3\ ;...\}$ un ensemble infini.
- en *compréhension* comme $\mathbb{R}^+=\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ ou $[0;1]=\{x \in \mathbb{R} / x \geq 0$ et $x \leq 1\}$, ou encore $P=\{x \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, x=2n\}$, l'ensemble des nombres pairs.

$I-J$ est la *différence* entre *I* et *J* (on a enlevé à *I* les éléments de *J*), on note parfois aussi *I**J*.
a) Écrire sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles :

$I=\{x \in \mathbb{R} / x \geq -2$ et $x<3\}$ et $J=\{x \in \mathbb{R} / x \geq -2$ ou $x<3\}$

$I=[-2\,;+\infty[\cap]-\infty\,;3[=[-2\,;3[$; $J=[-2\,;+\infty[\cup]-\infty\,;3[=]-\infty\,;+\infty[=\mathbb{R}$

b) Écrire en compréhension :

$$I=]-\infty\,;5]\cup]10\,;+\infty[\text{ et } J=]-\infty\,;5]\cap]-10\,;0[$$

$$I=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 5 \text{ ou } x>10\} \text{ et } J=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 5 \text{ et } -10<x<0\}$$

après simplification, $J=\{x\in\mathbb{R}/-10<x<0\}$ puisque $x\leq 5$ est alors toujours vrai

c) Écrire les ensembles $I-J$ et $J-I$ dans les cas suivants :

I	J	$I-J=I\backslash J$	$J-I=J\backslash I$
$]-1\,;5]$	$]3\,;10[$	$]-1\,;3]$	$]5\,;10]$
$[-1\,;2]$	$]0\,;1[$	$]-1\,;0]\cup[1\,;2]$	$\emptyset$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R}/x\notin\mathbb{Q}\}$
$\{x\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N}, x=3n\}$	$\{x\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N}, x=6n\}$	$\{x\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N}, x=6n+3\}$	$\emptyset$

On peut faire, ici aussi, des représentations graphiques pour faciliter la compréhension lorsqu'il s'agit d'intervalles. Pour l'avant-dernière ligne, il faut se rappeler que tous les rationnels sont réels. Les ensembles de nombres sont, en effet, inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.
Pour la dernière ligne, considérons la liste des multiples de 3 où l'on souligne les non-multiples de 6 : 0, <u>3</u>, 6, <u>9</u>, 12, <u>15</u>, 18, <u>21</u>, 24, <u>27</u>, 30, <u>33</u>, etc. Les multiples de 3 qui ne sont pas multiples de 6 (les nombres soulignés) sont obtenus en multipliant 3 par un nombre impair : $3(2n+1)=6n+3$. Entre deux multiples consécutifs de 6, il y a toujours un multiple de 3. Dans la division euclidienne par 6, ces nombres ont pour reste 3.
Par contre, il n'y a pas de multiple de 6 qui ne soit pas un multiple de 3.

d) Écrire sous la forme $I-J$ les ensembles : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^-$ et $\mathbb{R}_+^*$

$$\mathbb{N}^*=\mathbb{N}-\{0\} \;;\; \mathbb{Z}^-=\mathbb{Z}-\mathbb{N}^* \;;\; \mathbb{R}_+^*=\mathbb{R}-\mathbb{R}^-$$

tant qu'on y est, écrivons ces ensembles en compréhension :

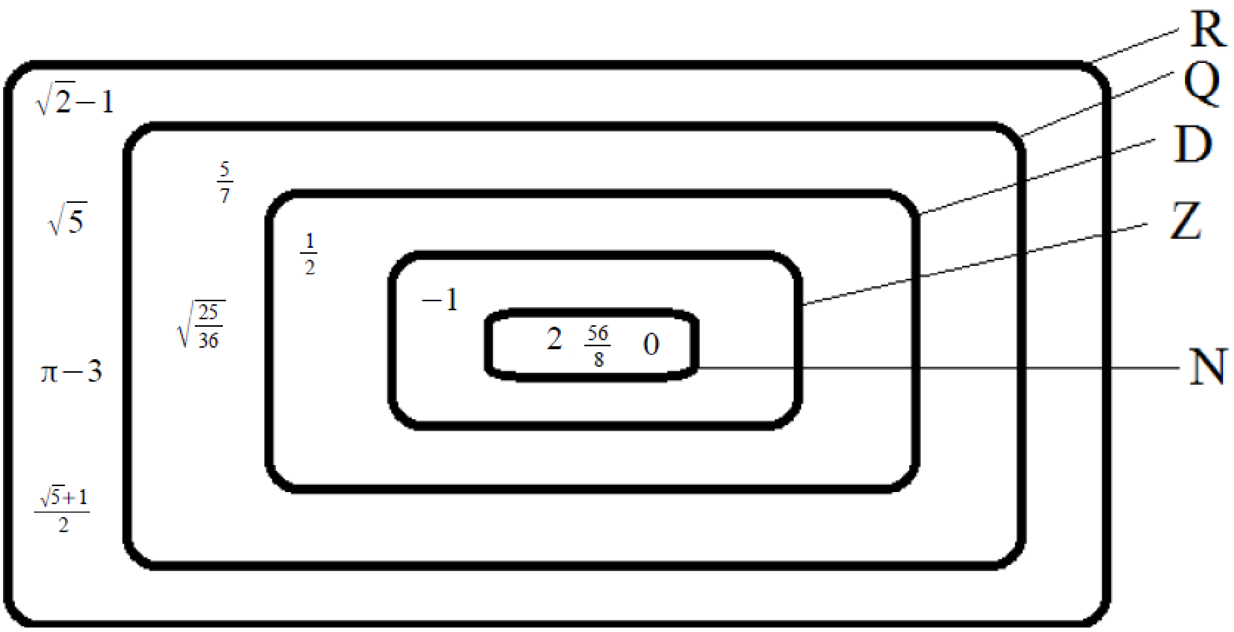
$$\mathbb{N}^*=\{x\in\mathbb{N}/x\neq 0\} \;;\; \mathbb{Z}^-=\{x\in\mathbb{Z}/x\leq 0\}=\;;\; \mathbb{R}_+^*=\{x\in\mathbb{R}/x>0\}$$

TD n°2 (suite) : intervalles et ensembles

1) Ensembles de nombres

a) Placer dans cette représentation concentrique des ensembles de nombres, les nombres suivants :

$$\sqrt{5}\,;2\,;0\,;\ -1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{7}\ ;\ \frac{56}{8}\ ;\ \sqrt{\frac{25}{36}}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ \pi-3\ ;\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



En seconde, les irrationnels connus sont les nombres qui s'écrivent à partir de π et des racines carrés de nombres qui ne sont pas eux-mêmes des carrés.

b) Les rationnels ont des écritures décimales périodiques (une suite de chiffres se répète à partir d'un certain rang. Quelle est l'écriture, sous forme de fraction irréductible, des nombres suivants.

$$A=1,23232323...=1,\overline{23}\ ;\ B=0,451451451...=0,\overline{451}\ ;\ C=12,3454545...=12,3\overline{45}$$

Dans A, il y a deux chiffres qui se répètent donc on multiplie par 100 pour décaler de deux rangs la virgule : 100A=123,23232323... donc 100A-A=123,$\overline{23}$-1,$\overline{23}$=122. Comme 100A-A=99A, on en déduit que 99A=122 donc A= $\frac{122}{99}$.

De même, 1000B=451,451451451... donc 1000B-B=451,$\overline{45}$-0,$\overline{45}$=451. Comme 1000B-B=999B, on en déduit que 999B=451 donc B= $\frac{451}{999}$.

Enfin, 100C=1234,54545... donc 100C-C=1234,5$\overline{45}$-12,3$\overline{45}$=1222,2. Comme 100C-C=99C on en déduit que 99C=1222,2 donc C= $\frac{1222,2}{99}$. Pour se ramener à une fraction, on multiplie par 10 le numérateur et le dénominateur : C= $\frac{12222}{990}$. On peut simplifier cette dernière fraction par 18, on trouve alors : C= $\frac{679}{55}$.

Remarque : par extension, les nombres irrationnels sont ceux qui n'ont pas une écriture décimale périodique. Le nombre 0,12345678910111213... (tous les nombres entiers les uns derrière les autres) n'est pas rationnel.

2) Ensembles de définitions

En l'absence d'information, une fonction numérique *f* est définie sur $\mathbb{R}$ auquel on retire les valeurs interdites (division par zéro, racine d'un nombre négatif). Pour déterminer D_f, le domaine de définition de *f*, il faut donc parfois résoudre des équations et/ou inéquations.

a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \sqrt{5x-2}+\sqrt{2-x}$

NB : résoudre le système d'inéquations qui traduit l'existence de l'expression f(x).

Pour *f*, on doit avoir $5x-2\geq 0$ et $2-x\geq 0$ (les inégalités sont prises au sens large car on peut prendre la racine carrée de 0). Il faut avoir simultanément $x\geq\frac{2}{5}$ et $x\leq 2$, On en déduit qu'il faut avoir $\frac{2}{5}\leq x\leq 2$, ce qui est possible dans D_f= $[\frac{2}{5};2]$.

b) Déterminer le domaine de définition de $g : x \mapsto \sqrt{(5x-2)(2-x)}$

NB : pour résoudre une inéquation-produit, faire un tableau de signes où est indiqué le signe de chacun des facteurs pour les intervalles où il garde la même valeur.

Pour g, on doit avoir $5x-2\geq 0$ et $2-x\geq 0$ ou alors $5x-2\leq 0$ et $2-x\leq 0$ (un produit est positif si les deux facteurs sont de même signe), donc $x\geq\frac{2}{5}$ et $x\leq 2$ ou $x\leq\frac{2}{5}$ et $x\geq 2$. La 2ème possibilité ne contient aucune valeur. Par conséquent, on a $D_g=D_f=[\frac{2}{5};2]$.

Le tableau de signes qu'il est recommandé de faire est le suivant :

x		$\frac{2}{5}$		2	
$5x-2$	-	0	+		+
$2-x$	+		+	0	-
$(5x-2)(2-x)$	-	0	+	0	-

Ce tableau qui applique la « règle des signes » permet de répondre à la question posée (quelles sont les valeurs de x pour lesquelles la racine carrée est possible). Dans ce cas particulier, on a pu s'en passer, mais cela devient une aide méthodologique précieuse dans les cas un peu plus compliqués qui ne manqueront pas de se présenter...

c) Déterminer les domaines de définition des fonctions F et G définies par

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5x-2}} \text{ et } G(x)=\frac{1}{(5x-2)(2-x)}$$

Pour F, on doit avoir $5x-2>0$ (on ne peut pas diviser par zéro ni prendre la racine d'un nombre négatif) par conséquent, $D_F=\,]\frac{2}{5};+\infty[$. Pour G, on doit avoir $5x-2\neq 0$ et $2-x\neq 0$ (on ne peut pas diviser par zéro) par conséquent, $D_G=\mathbb{R}-\{\frac{2}{5};2\}=]-\infty;\frac{2}{5}[\cup]\frac{2}{5};2[\cup]2;+\infty[$.

3) Centre et amplitude

Le *centre* d'un intervalle est la moyenne entre les bornes, l'*amplitude* ou diamètre est l'écart entre celles-ci. On définit aussi le *rayon* (moitié du diamètre d'un intervalle).

a) Donner un intervalle fermé de centre c et d'amplitude a dans les cas suivants.

$$a=10, c=0 \;;\; a=2\sqrt{2}, c=1 \;;\; a=\frac{1}{3}, c=\frac{4}{5}$$

$[-5;5]$ est un intervalle fermé de centre 0 et d'amplitude 10.

$[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]$ est un intervalle fermé de centre 1 et d'amplitude $2\sqrt{2}$.

$[\frac{4}{5}-\frac{1}{6};\frac{4}{5}+\frac{1}{6}]$, soit $[\frac{19}{30};\frac{29}{30}]$ est un intervalle fermé de centre $\frac{4}{5}$ et d'amplitude $\frac{1}{3}$.

D'une façon générale, les bornes d'un intervalle de centre c et d'amplitude a sont $c-\frac{a}{2}$ et $c+\frac{a}{2}$.

b) Déterminer le centre c et l'amplitude a des intervalles suivants.

$$I=[\frac{3}{5};\frac{5}{3}] \;;\; J=[\sqrt{2};\sqrt{3}]$$

D'une façon générale, le centre c et l'amplitude a d'un intervalle $[d;e]$ sont $c=\frac{d+e}{2}$ et $a=e-d$.

Le centre et l'amplitude de l'intervalle I sont $c=\frac{\frac{3}{5}+\frac{5}{3}}{2}=\frac{\frac{9+25}{15}}{2}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}$ et $a=\frac{-3}{5}+\frac{5}{3}=\frac{-9+25}{15}=\frac{16}{15}$.

Le centre et l'amplitude de l'intervalle J sont $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}57$ et $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}\approx 0{,}318$.

c) Comparer les amplitudes des intervalles suivants.

$$K=[\frac{41}{29};\sqrt{2}] \;;\; L=[\sqrt{2};\frac{99}{70}]$$

Ces deux intervalles ont des amplitudes voisines : $\sqrt{2}-\frac{41}{29}\approx 0{,}00042$ pour celle de K et $\frac{99}{70}-\sqrt{2}\approx 0{,}000072$ pour celle de L. Ces intervalles interviennent lorsqu'on cherche à s'approcher de $\sqrt{2}$ avec des réduites de sa fraction continue (on en a vu une dans la feuille TD n°1, il s'agissait de $D=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}}=1+\frac{1}{2+\frac{5}{12}}=1+\frac{12}{29}=\frac{41}{29}$).