

Les ensembles de nombres sont notés avec des lettres spéciales :

$\mathbb{N}$  : les entiers,  $\mathbb{Z}$  : les entiers relatifs,  $\mathbb{Q}$  : les rationnels,  $\mathbb{R}$  : les réels.

$\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$  et  $\mathbb{R}^*$  désignent les réels positifs, négatifs et non-nuls (idem pour les autres ensembles).

Un intervalle est une partie de  $\mathbb{R}$  :  $[0;1]$  est un intervalle fermé,  $]0;1[$  est semi-ouvert ( $0 \notin ]0;1[$ ).

### 1) Appartenance et inclusion

Un *élément appartient* ( $\in$ ) ou non ( $\notin$ ) à un ensemble.

Un *ensemble est inclus* ( $\subset$ ) ou non ( $\not\subset$ ) dans un autre ensemble.

Compléter avec le symbole qui convient.

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} & 0,5 \in \mathbb{R}^+ & \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} & \mathbb{R}^- \not\subset \mathbb{Q}^- & 0 \in \mathbb{Z}^- & \\ [2;5] \not\subset \mathbb{N} & \pi-3 \notin \mathbb{R}^- & [\frac{1}{2};\frac{2}{3}] \not\subset \mathbb{Q} & [0;1] \subset \mathbb{R} & 0,001 \in [-10^{-5};10^5] & \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \in [0;1] & [-1;5] \subset [-20;20] & ]2;5[ \subset [2;5] & [2;5] \subset [2;5] & \sqrt{\frac{4}{25-16}} \in \mathbb{Q} \cap ]0;1[ & \end{array}$$

### 2) Réunion et intersection d'intervalles

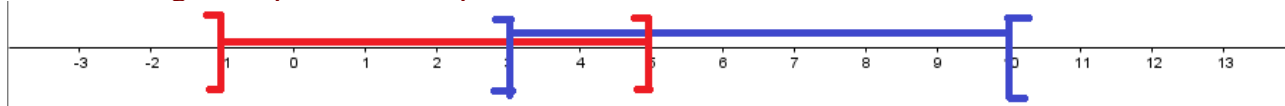
$I$  et  $J$  étant des ensembles,

- $I \cap J$  est l'*intersection* de  $I$  et  $J$  ( $x \in I \cap J$  si  $x \in I$  et  $x \in J$ )
- $I \cup J$  est la *réunion* de  $I$  et  $J$  ( $x \in I \cup J$  si  $x \in I$  ou si  $x \in J$  ou si  $x \in I \cap J$ ).

Déterminer  $I \cup J$  et  $I \cap J$  dans les cas suivants (représenter graphiquement les intervalles).

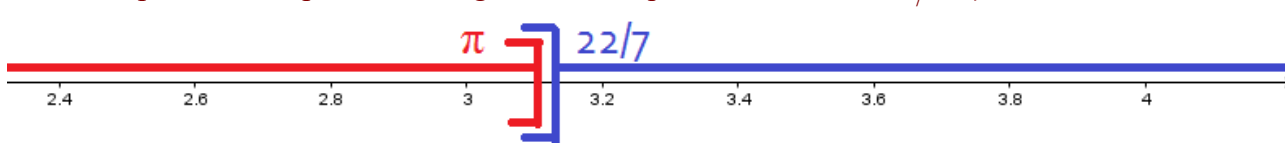
$I$	$J$	$I \cup J$	$I \cap J$
$] -1; 5 ]$	$] 3; 10 [$	$] -1; 10 [$	$] 3; 5 ]$
$[ -1; \pi ]$	$] 3; \sqrt{10} ]$	$[ -1; \sqrt{10} ]$	$] 3; \pi ]$
$] -\infty; \pi ]$	$] \frac{22}{7}; +\infty [$	$] -\infty; \pi ] \cup ] \frac{22}{7}; +\infty [ = ] \mathbb{R} - ] \pi; \frac{22}{7} ]$	$\emptyset$
$] 3,14; \pi ]$	$] \pi; 3,1416 [$	$] 3,14; 3,1416 [$	$\{ \pi \} = ] \pi; \pi ]$
$] \pi; +\infty [$	$] 3; +\infty [$	$] 3; +\infty [ = J$ car $J \subset I$	$] 3; \pi ] = I$

La représentation graphique des intervalles a pour objectif de faciliter la compréhension : pour la réunion on doit être dans l'un ou dans l'autre ; pour l'intersection on doit être dans l'un et dans l'autre. Pour la 1<sup>ère</sup> ligne, on peut faire la représentation suivante :



L'ordre des bornes des différents intervalles est important.

Voici la représentation pour la 3<sup>ème</sup> ligne, sachant que  $\pi \approx 3,14159$  et  $\frac{22}{7} \approx 3,14286$  :



La réunion de deux intervalles n'est donc pas toujours un intervalle (ça peut ne s'écrire qu'avec le symbole d'union comme  $] -\infty; \pi ] \cup ] \frac{22}{7}; +\infty [$  où les deux intervalles sont disjoints) alors que l'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle simple (éventuellement vide ou limité à un point).

### 3) Écriture ensembliste et intervalle

Un ensemble peut être noté avec des accolades  $\{ \}$

- en *extension* comme  $S = \{0;1;2\}$  un ensemble fini ou  $\mathbb{N} = \{0;1;2;3; \dots\}$  un ensemble infini.
- en *compréhension* comme  $\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \}$  ou  $[0;1] = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x \leq 1 \}$ , ou encore  $P = \{ x \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, x = 2n \}$ , l'ensemble des nombres pairs.

$I - J$  est la *différence* entre  $I$  et  $J$  (on a enlevé à  $I$  les éléments de  $J$ ), on note parfois aussi  $I \setminus J$ .

a) Écrire sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles :

$$I = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x < 3 \} \text{ et } J = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ ou } x < 3 \}$$

$$I = [-2; +\infty[ \cap ]-\infty; 3[ = [-2; 3[ ; J = [-2; +\infty[ \cup ]-\infty; 3[ = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$$

b) Écrire en compréhension :

$$I = ]-\infty; 5] \cup ]10; +\infty[ \text{ et } J = ]-\infty; 5] \cap ]-10; 0[$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5 \text{ ou } x > 10\} \text{ et } J = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5 \text{ et } -10 < x < 0\}$$

après simplification,  $J = \{x \in \mathbb{R} / -10 < x < 0\}$  puisque  $x \leq 5$  est alors toujours vrai

c) Écrire les ensembles  $I - J$  et  $J - I$  dans les cas suivants :

$I$	$J$	$I - J = I \setminus J$	$J - I = J \setminus I$
$] -1; 5 ]$	$] 3; 10 [$	$] -1; 3 ]$	$] 5; 10 ]$
$[ -1; 2 ]$	$] 0; 1 [$	$] -1; 0 ] \cup [ 1; 2 ]$	$\emptyset$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} / x \notin \mathbb{Q}\}$
$\{x \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, x = 3n\}$	$\{x \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, x = 6n\}$	$\{x \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, x = 6n + 3\}$	$\emptyset$

On peut faire, ici aussi, des représentations graphiques pour faciliter la compréhension lorsqu'il s'agit d'intervalles. Pour l'avant-dernière ligne, il faut se rappeler que tous les rationnels sont réels. Les ensembles de nombres sont, en effet, inclus les uns dans les autres :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Pour la dernière ligne, considérons la liste des multiples de 3 où l'on souligne les non-multiples de 6 : 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, etc. Les multiples de 3 qui ne sont pas multiples de 6 (les nombres soulignés) sont obtenus en multipliant 3 par un nombre impair :  $3(2n+1) = 6n+3$ . Entre deux multiples consécutifs de 6, il y a toujours un multiple de 3. Dans la division euclidienne par 6, ces nombres ont pour reste 3.

Par contre, il n'y a pas de multiple de 6 qui ne soit pas un multiple de 3.

d) Écrire sous la forme  $I - J$  les ensembles :  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{Z}^-$  et  $\mathbb{R}_+^*$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} ; \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} - \mathbb{N}^* ; \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R} - \mathbb{R}^-$$

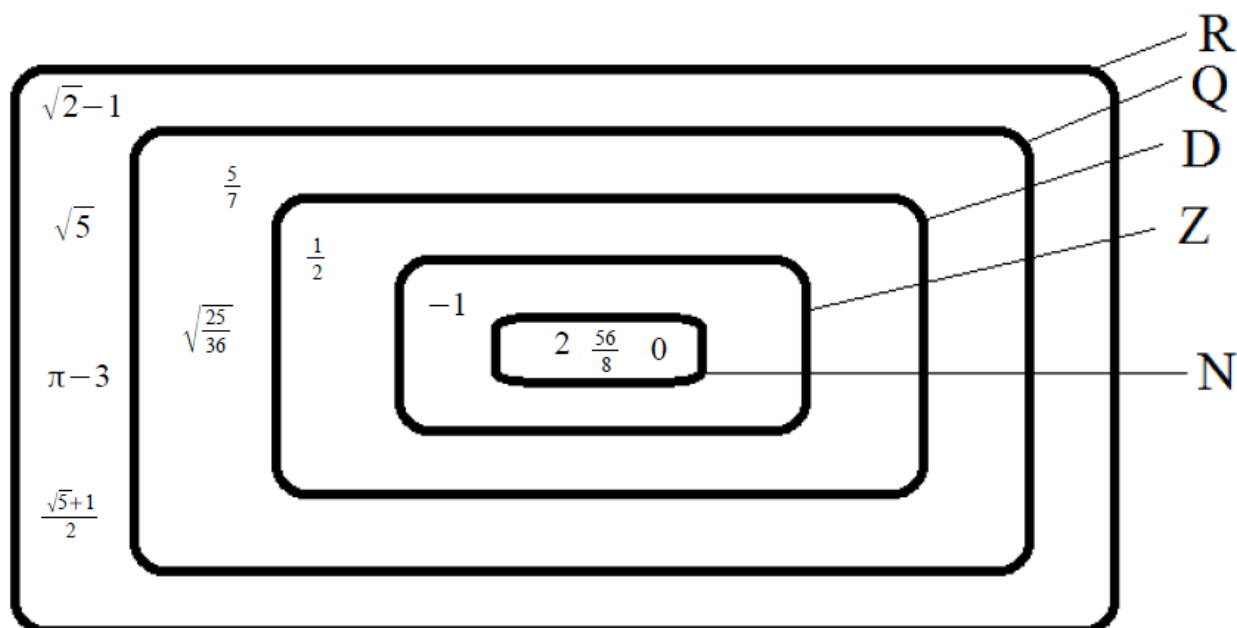
tant qu'on y est, écrivons ces ensembles en compréhension :

$$\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{N} / x \neq 0\} ; \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 0\} ; \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$

### 1) Ensembles de nombres

a) Placer dans cette représentation concentrique des ensembles de nombres, les nombres suivants :

$$\sqrt{5}; 2; 0; -1; \frac{1}{2}; \frac{5}{7}; \frac{56}{8}; \sqrt{\frac{25}{36}}; \sqrt{2}-1; \pi-3; \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$



En seconde, les irrationnels connus sont les nombres qui s'écrivent à partir de  $\pi$  et des racines carrées de nombres qui ne sont pas eux-mêmes des carrés.

b) Les rationnels ont des écritures décimales périodiques (une suite de chiffres se répète à partir d'un certain rang. Quelle est l'écriture, sous forme de fraction irréductible, des nombres suivants.

$$A=1,23232323\dots=1,\overline{23}; B=0,451451451\dots=0,\overline{451}; C=12,3454545\dots=12,\overline{345}$$

Dans A, il y a deux chiffres qui se répètent donc on multiplie par 100 pour décaler de deux rangs la virgule :  $100A=123,23232323\dots$  donc  $100A-A=123,\overline{23}-1,\overline{23}=122$ . Comme  $100A-A=99A$ , on en déduit que  $99A=122$  donc  $A=\frac{122}{99}$ .

De même,  $1000B=451,451451451\dots$  donc  $1000B-B=451,\overline{45}-0,\overline{45}=451$ . Comme  $1000B-B=999B$ , on en déduit que  $999B=451$  donc  $B=\frac{451}{999}$ .

Enfin,  $100C=1234,54545\dots$  donc  $100C-C=1234,\overline{545}-12,\overline{345}=1222,2$ . Comme  $100C-C=99C$  on en déduit que  $99C=1222,2$  donc  $C=\frac{1222,2}{99}$ . Pour se ramener à une fraction, on multiplie par 10 le numérateur et le dénominateur :  $C=\frac{12222}{990}$ . On peut simplifier cette dernière fraction par 18, on trouve alors :  $C=\frac{679}{55}$ .

Remarque : par extension, les nombres irrationnels sont ceux qui n'ont pas une écriture décimale périodique. Le nombre  $0,12345678910111213\dots$  (tous les nombres entiers les uns derrière les autres) n'est pas rationnel.

### 2) Ensembles de définitions

En l'absence d'information, une fonction numérique  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  auquel on retire les valeurs interdites (division par zéro, racine d'un nombre négatif). Pour déterminer  $D_f$ , le domaine de définition de  $f$ , il faut donc parfois résoudre des équations et/ou inéquations.

a) Déterminer le domaine de définition de  $f: x \mapsto \sqrt{5x-2} + \sqrt{2-x}$

NB : résoudre le système d'inéquations qui traduit l'existence de l'expression  $f(x)$ .

Pour  $f$ , on doit avoir  $5x-2 \geq 0$  et  $2-x \geq 0$  (les inégalités sont prises au sens large car on peut prendre la racine carrée de 0). Il faut avoir simultanément  $x \geq \frac{2}{5}$  et  $x \leq 2$ , On en déduit qu'il faut avoir  $\frac{2}{5} \leq x \leq 2$ , ce qui est possible dans  $D_f = [\frac{2}{5}; 2]$ .

b) Déterminer le domaine de définition de  $g: x \mapsto \sqrt{(5x-2)(2-x)}$

NB : pour résoudre une inéquation-produit, faire un tableau de signes où est indiqué le signe de chacun des facteurs pour les intervalles où il garde la même valeur.

Pour  $g$ , on doit avoir  $5x-2 \geq 0$  et  $2-x \geq 0$  ou alors  $5x-2 \leq 0$  et  $2-x \leq 0$  (un produit est positif si les deux facteurs sont de même signe), donc  $x \geq \frac{2}{5}$  et  $x \leq 2$  ou  $x \leq \frac{2}{5}$  et  $x \geq 2$ . La 2<sup>ème</sup> possibilité ne contient aucune valeur. Par conséquent, on a  $D_g = D_f = [\frac{2}{5}; 2]$ .

Le tableau de signes qu'il est recommandé de faire est le suivant :

$x$		$\frac{2}{5}$		$2$	
$5x-2$		-	0	+	+
$2-x$		+	+	+	0
$(5x-2)(2-x)$		-	0	+	0

Ce tableau qui applique la « règle des signes » permet de répondre à la question posée (quelles sont les valeurs de  $x$  pour lesquelles la racine carrée est possible). Dans ce cas particulier, on a pu s'en passer, mais cela devient une aide méthodologique précieuse dans les cas un peu plus compliqués qui ne manqueront pas de se présenter...

c) Déterminer les domaines de définition des fonctions  $F$  et  $G$  définies par

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-2}} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{(5x-2)(2-x)}$$

Pour  $F$ , on doit avoir  $5x-2 > 0$  (on ne peut pas diviser par zéro ni prendre la racine d'un nombre négatif) par conséquent,  $D_F = ]\frac{2}{5}; +\infty[$ . Pour  $G$ , on doit avoir  $5x-2 \neq 0$  et  $2-x \neq 0$  (on ne peut pas diviser par zéro) par conséquent,  $D_G = \mathbb{R} - \{\frac{2}{5}; 2\} = ]-\infty; \frac{2}{5}[ \cup ]\frac{2}{5}; 2[ \cup ]2; +\infty[$ .

### 3) Centre et amplitude

Le *centre* d'un intervalle est la moyenne entre les bornes, l'*amplitude* ou diamètre est l'écart entre celles-ci. On définit aussi le *rayon* (moitié du diamètre d'un intervalle).

a) Donner un intervalle fermé de centre  $c$  et d'amplitude  $a$  dans les cas suivants.

$$a=10, c=0 \quad ; \quad a=2\sqrt{2}, c=1 \quad ; \quad a=\frac{1}{3}, c=\frac{4}{5}$$

$[-5; 5]$  est un intervalle fermé de centre 0 et d'amplitude 10.

$[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$  est un intervalle fermé de centre 1 et d'amplitude  $2\sqrt{2}$ .

$[\frac{4}{5}-\frac{1}{6}; \frac{4}{5}+\frac{1}{6}]$ , soit  $[\frac{19}{30}; \frac{29}{30}]$  est un intervalle fermé de centre  $\frac{4}{5}$  et d'amplitude  $\frac{1}{3}$ .

D'une façon générale, les bornes d'un intervalle de centre  $c$  et d'amplitude  $a$  sont  $c-\frac{a}{2}$  et  $c+\frac{a}{2}$ .

b) Déterminer le centre  $c$  et l'amplitude  $a$  des intervalles suivants.

$$I = [\frac{3}{5}; \frac{5}{3}] \quad ; \quad J = [\sqrt{2}; \sqrt{3}]$$

D'une façon générale, le centre  $c$  et l'amplitude  $a$  d'un intervalle  $[d; e]$  sont  $c = \frac{d+e}{2}$  et  $a = e-d$ .

Le centre et l'amplitude de l'intervalle  $I$  sont  $c = \frac{\frac{3}{5} + \frac{5}{3}}{2} = \frac{9+25}{30} = \frac{34}{30} = \frac{17}{15}$  et  $a = \frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{-9+25}{15} = \frac{16}{15}$ .

Le centre et l'amplitude de l'intervalle  $J$  sont  $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} \approx 1,57$  et  $a = \sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0,318$ .

c) Comparer les amplitudes des intervalles suivants.

$$K = [\frac{41}{29}; \sqrt{2}] \quad ; \quad L = [\sqrt{2}; \frac{99}{70}]$$

Ces deux intervalles ont des amplitudes voisines :  $\sqrt{2} - \frac{41}{29} \approx 0,00042$  pour celle de  $K$  et

$\frac{99}{70} - \sqrt{2} \approx 0,00072$  pour celle de  $L$ . Ces intervalles interviennent lorsqu'on cherche à s'approcher de  $\sqrt{2}$  avec des réduites de sa fraction continue (on en a vu une dans la feuille TD n°1, il s'agissait de

$$D = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{17}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}.$$