2^{de}	TD n°2 : intervalles et ensembles

Les ensembles de nombres sont notés avec des lettres spéciales :
$\mathbb{N}$: les entiers, $\mathbb{Z}$: les entiers relatifs, $\mathbb{Q}$: les rationnels, $\mathbb{R}$: les réels.
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^*$ désignent les réels positifs, négatifs et non-nuls (idem pour les autres ensembles).
Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$: [0;1] est un intervalle fermé,]0;1] est semi-ouvert (0 $\notin$]0;1[).

1) <u>Appartenance et inclusion</u>

Un *élément* <u>appartient</u> ($\in$) ou non ($\notin$) à un ensemble.
Un *ensemble* <u>est inclus</u> ($\subset$) ou non ($\not\subset$) dans un autre ensemble.
Compléter avec le symbole qui convient.

$\mathbb{N}$..... $\mathbb{Q}$ $\quad$ $0{,}5$.....$\mathbb{R}^+$ $\quad$ $\mathbb{Q}$.....$\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}^-$.....$\mathbb{Q}^-$ $\quad$ 0.....$\mathbb{Z}^-$

$[2\,;5]$.....$\mathbb{N}$ $\quad$ $\pi-3$.....$\mathbb{R}^-$ $\quad$ $[\frac{1}{2};\frac{2}{3}]$.....$\mathbb{Q}$ $\quad$ $[0\,;1]$.....$\mathbb{R}$ $\quad$ $0{,}001$.....$[-10^{-5};10^5]$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$.....$[0\,;1]$ $\quad$ $[-1\,;5]$.....$[-20\,;20]$ $\quad$ $]2\,;5[$.....$[2\,;5]$ $\quad$ $[2\,;5]$.....$[2\,;5]$ $\quad$ $\sqrt{\frac{4}{25-16}}$.....$\mathbb{Q}\cap]0\,;1[$

2) <u>Réunion et intersection d'intervalles</u>

I et *J* étant des ensembles,

- $I\cap J$ est l'*intersection* de *I* et *J* ($x\in I\cap J$ si $x\in I$ et $x\in J$)
- $I\cup J$ est la *réunion* de *I* et *J* ($x\in I\cup J$ si $x\in I$ ou si $x\in J$ ou si $x\in I\cap J$).

Déterminer $I\cup J$ et $I\cap J$ dans les cas suivants (représenter graphiquement les intervalles).

I	J	$I\cup J$	$I\cap J$
$]-1\,;5]$	$]3\,;10[$		
$[-1\,;\pi]$	$[3\,;\sqrt{10}]$		
$]-\infty\,;\pi]$	$]\frac{22}{7};+\infty[$		
$]3{,}14\,;\pi]$	$[\pi\,;3{,}1416[$		
$[\pi\,;+\infty[$	$[3\,;+\infty[$		

3) <u>Écriture ensembliste et intervalle</u>

Un ensemble peut être noté avec des accolades {}

- en *extension* comme S={0;1;2} un ensemble fini ou $\mathbb{N}$={0;1;2;3 ;...} un ensemble infini.
- en *compréhension* comme $\mathbb{R}^+=\{\ x\in\mathbb{R}/x\geq 0\ \}$ ou $[0;1]=\{\ x\in\mathbb{R}/x\geq 0$ et $x\leq 1\ \}$, ou encore P=$\{\ x\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N},\ x=2n\ \}$, l'ensemble des nombres pairs.

I −*J* est la *différence* entre *I* et *J* (on a enlevé à *I* les éléments de *J*), on note parfois aussi *I**J*.

a) Écrire sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles :

I=$\{\ x\in\mathbb{R}/x\geq -2$ et $x<3\ \}$ et *J*=$\{\ x\in\mathbb{R}/x\geq -2$ ou $x<3\ \}$

I=... ; *J*=...

b) Écrire en compréhension :

I= $]-\infty\,;5]\cup]10\,;+\infty[$ et J= $]-\infty\,;5]\cap]-10\,;0[$

I=... ; *J*=...

c) Écrire les ensembles *I* −*J* et *J* −*I* dans les cas suivants :

I	J	*I* −*J*=*I**J*	*J* −*I* =*J**I*
$]-1\,;5]$	$]3\,;10[$		
$[-1\,;2]$	$]0\,;1[$		
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$		
$\{\ x\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N},\ x=3n\ \}$	$\{\ x\in\mathbb{N}/\exists n\in\mathbb{N},\ x=6n\ \}$		

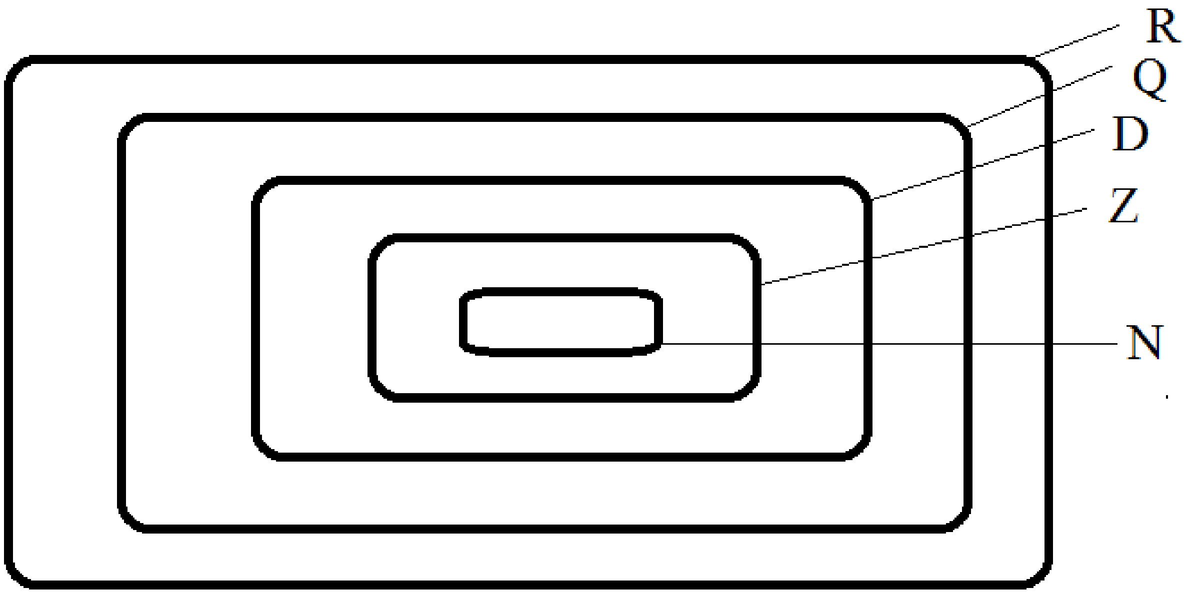
d) Écrire sous la forme *I* −*J* les ensembles : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^-$ et $\mathbb{R}^*_+$

TD n°2 (suite) : intervalles et ensembles

4) Ensembles de nombres

a) Placer dans cette représentation concentrique des ensembles de nombres, les nombres suivants :

$$\sqrt{5}\,;\,2\,;\,0\,;\ -1\ ;\ \tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{5}{7}\ ;\ \tfrac{56}{8}\ ;\ \sqrt{\tfrac{25}{36}}\ ;\ \sqrt{2}-1\ ;\ \pi-3\ ;\ \tfrac{\sqrt{5}+1}{2}$$



b) Les rationnels ont des écritures décimales périodiques (une suite de chiffres se répète à partir d'un certain rang. Quelle est l'écriture, sous forme de fraction irréductible, des nombres suivants.

$$A=1{,}23232323...=1{,}\overline{23}\ ;\ B=0{,}451451451...=0{,}\overline{451}\ ;\ C=12{,}3454545...=12{,}3\overline{45}$$

5) Ensembles de définitions

En l'absence d'information, une fonction numérique *f* est définie sur $\mathbb{R}$ auquel on retire les valeurs interdites (division par zéro, racine d'un nombre négatif). Pour déterminer D_f, le domaine de définition de *f*, il faut donc parfois résoudre des équations et/ou inéquations.

a) Déterminer le domaine de définition de $f : x\ \alpha\ \ \sqrt{5x-2}+\sqrt{2-x}$

NB : résoudre le système d'inéquations qui traduit l'existence de l'expression f(x).

b) Déterminer le domaine de définition de $g : x\ \alpha\ \ \sqrt{(5x-2)(2-x)}$

NB : pour résoudre une inéquation-produit, faire un tableau de signes où est indiqué le signe de chacun des facteurs pour les intervalles où il garde la même valeur.

c) Déterminer les domaines de définition des fonctions *F* et *G* définies par

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5x-2}} \quad \text{et } G(x)=\frac{1}{(5x-2)(2-x)}$$

6) Centre et amplitude

Le *centre* d'un intervalle est la moyenne entre les bornes, l'*amplitude* ou diamètre est l'écart entre celles-ci. On définit aussi le *rayon* (moitié du diamètre d'un intervalle).

a) Donner un intervalle fermé de centre *c* et d'amplitude *a* dans les cas suivants.

$$a=10\,,c=0\ \ ;\ \ a=2\sqrt{2},c=1\ \ ;\ \ a=\tfrac{1}{3},c=\tfrac{4}{5}$$

b) Déterminer le centre *c* et l'amplitude *a* des intervalles suivants.

$$I=[\tfrac{3}{5};\,\tfrac{5}{3}]\ \ ;\ \ J=[\sqrt{2};\,\sqrt{3}]$$

c) Comparer les amplitudes des intervalles suivants.

$$K=[\tfrac{41}{29};\,\sqrt{2}]\ \ ;\ \ L=[\sqrt{2};\tfrac{99}{70}]$$