Chapitre 8 : Probabilités

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilité sur un ensemble fini		
Probabilité d'un événement.	• Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. • Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.	La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.
Réunion et intersection de deux événements, formule : $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.	• Connaître et exploiter cette formule.	

1) La notion de probabilité

<u>Définitions</u> : Une *expérience aléatoire* est une *expérience* (observation effectuée dans des conditions précises) dont on ne connait pas à l'avance le résultat car il dépend du hasard. Les différents résultats d'une expérience aléatoire sont qualifiés d'élémentaires et appelés *issues* ou *éventualités*. Selon les situations, on distingue certains sous-ensembles de résultats parmi tous les issues possibles en définissant des *événements* particuliers et en s'intéressant à leur *réalisation* éventuelle lors de l'expérience. On appelle *univers*, et on note Ω, l'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.

<u>Exemple 1</u> : On tire une pièce de monnaie : 2 résultats sont possibles : « P: pile » et « F: face ». L'univers associé à cette expérience est l'ensemble Ω={P, F}.

Exemple 1 bis : On tire un dé à 6 faces. On s'intéresse au chiffre obtenu sur la face du dessus. Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On peut s'intéresser aux évènements : « le chiffre obtenu est pair » ou « le chiffre obtenu est supérieur à 3 ».

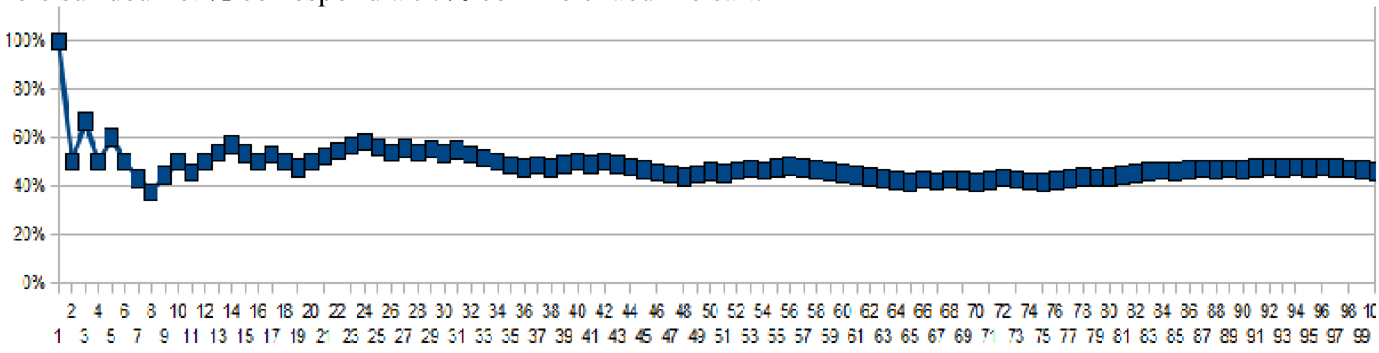
<u>Exemple 2</u> : On tire deux dés à 6 faces (l'un bleu et l'autre rouge). Si on s'intéresse aux chiffres obtenus sur les faces du dessus, les différentes issues possibles sont des *couples* (ensembles ordonnés) de chiffres. En notant en 1er le résultat du dé bleu, il y a 36 couples différents qui sont (1;1), (1;2), (1;3), … (2;1), etc. On peut noter Ω={(*i*;*j*) avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ et $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ }. Avec les couleurs, on peut distinguer le résultat (1;2) du résultat (2;1) mais si les dés n'étaient pas de couleur différente on pourrait introduire tout de même une distinction entre les dés pour expliquer la répartition des résultats, par exemple en disant « le premier dé vaut … et le 2ème dé vaut .... ». On peut s'intéresser à des événements plus élaborés que les résultats élémentaires cités, comme *A* : « on obtient un double » ou bien *B* : « la somme des deux dés vaut 10 ». L'évènement *A* correspond à l'ensemble {(*i*;*i*) avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ }, tandis que l'évènement *B* correspond à l'ensemble {(4;6),(5;5),(6;4)}.

Notion intuitive de probabilité et loi des grands nombres : Dans une expérience aléatoire, la *probabilité* *P*(*E*) d'un évènement *E* est le nombre compris entre 0 et 1, égal à la *fréquence théorique* qu'aurait ce résultat <u>si on réalisait cette expérience une infinité de fois</u>, qui exprime *la chance* qu'on a d'obtenir ce résultat lorsqu'on réalise l'expérience.

<u>Exemple 1</u> : On tire 100 fois une pièce et on note « pile : 1 » et « face : 0 ». Nous effectuons ces tirages en notant dans le tableau A, les tirages à gauche, la comptabilité de l'apparition des « faces » (le chiffre 0) au centre, et l'évolution de la fréquence d'apparition du 0 au fur-et-à-mesure des tirages.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	2	2	3	3	3	3	4	5	100%	50%	67%	50%	60%	50%	43%	38%	44%	50%
10	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	5	6	7	8	8	8	9	9	9	10	45%	50%	54%	57%	53%	50%	53%	50%	47%	50%
20	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	11	12	13	14	14	14	15	15	16	16	52%	55%	57%	58%	56%	54%	56%	54%	55%	53%
30	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	17	17	17	17	17	17	18	18	19	20	55%	53%	52%	50%	49%	47%	49%	47%	49%	50%
40	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	20	21	21	21	21	21	21	21	22	23	49%	50%	49%	48%	47%	46%	45%	44%	45%	46%
50	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	23	24	25	25	26	27	27	27	27	27	45%	46%	47%	46%	47%	48%	47%	47%	46%	45%
60	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	27	27	27	27	27	28	28	29	29	29	44%	44%	43%	42%	42%	42%	42%	43%	42%	41%
70	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	30	31	31	31	31	32	33	34	34	35	42%	43%	42%	42%	41%	42%	43%	44%	43%	44%
80	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	36	37	38	39	39	40	41	41	42	42	44%	45%	46%	46%	46%	47%	47%	47%	47%	47%
90	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	43	44	44	45	45	46	46	46	46	46	47%	48%	47%	48%	47%	48%	47%	47%	46%	46%

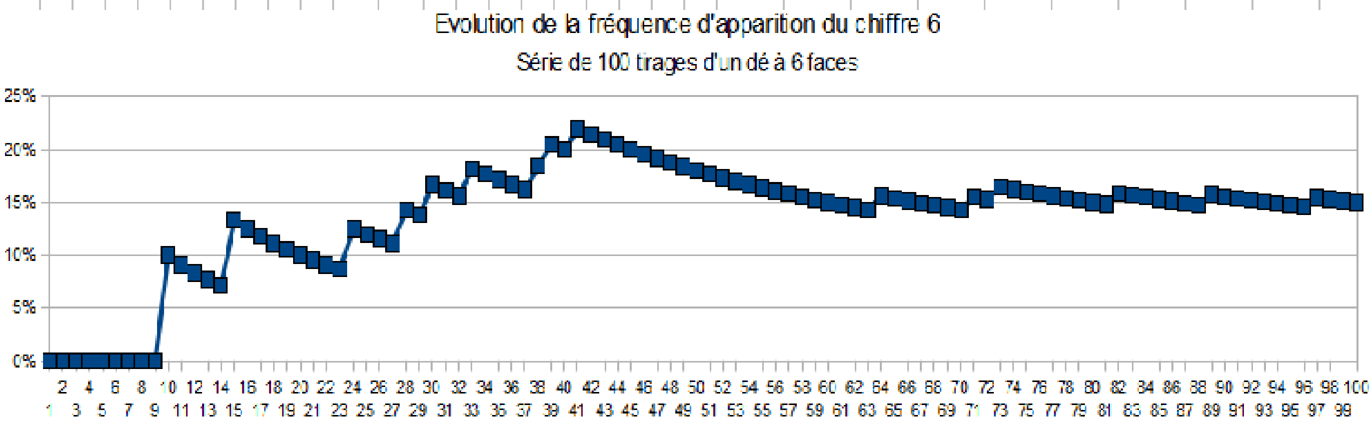
Pour mieux visualiser cette évolution, on peut faire une représentation graphique en mettant en abscisse le n° du tirage, et en ordonnée la fréquence d'apparition du 0. On remarque que les fréquences sont très irrégulières au début, puis tendent à se stabiliser autour d'une valeur moyenne : ici 50%, car la pièce étant bien équilibrée (les tirages des 0 et des 1 ne favorisent aucun des 2 résultats), on obtient une des faces une fois sur deux et ½ correspond à 50% comme chacun le sait.



Que se passe-il si on prolonge ce travail (tirage de la pièce, calcul des fréquences et représentation graphique) sur un plus grand nombre de lancés? Les fréquences expérimentales de cette expérience se stabilisent de plus en plus sur une fréquence moyenne, obtenue en théorie lorsque le nombre de tirages se rapproche de l'infini. Ce phénomène porte le nom de « loi des grands nombres » et a été initialement reconnu comme tel par Jacques Bernouilli, un mathématicien suisse, vers 1690 (*Ars Conjectandi*, son ouvrage fondateur sur les probabilités est publié en 1715 après sa mort).

Exemple 2 : On tire un dé à 6 faces en observant les fréquences d'apparition d'une face particulière, disons la face portant le chiffre « 6 ». Cette fréquence, ici aussi très irrégulière au début, se stabilise progressivement autour d'une valeur d'équilibre de 1/6 soit 17% environ, atteinte en principe, selon la loi des grands nombres, à l'infini. Cette valeur d'équilibre est la probabilité d'obtenir la face « 6 » du dé.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	3	3	4	3	5	1	3	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	10%
10	2	5	3	1	6	4	5	5	4	3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	9%	8%	8%	7%	13%	13%	12%	11%	11%	10%
20	4	2	5	6	3	1	5	6	2	6	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	10%	9%	9%	13%	12%	12%	11%	14%	14%	17%
30	5	5	6	4	5	4	3	6	6	1	5	5	6	6	6	6	6	7	8	8	16%	16%	18%	18%	17%	17%	16%	18%	21%	20%
40	6	4	2	5	4	5	5	2	1	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	22%	21%	21%	20%	20%	20%	19%	19%	18%	18%
50	3	1	4	1	3	2	3	1	4	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	18%	17%	17%	17%	16%	16%	16%	16%	15%	15%
60	1	1	4	6	3	5	5	5	5	3	9	9	9	10	10	10	10	10	10	10	15%	15%	14%	16%	15%	15%	15%	15%	14%	14%
70	6	2	6	4	4	5	5	1	1	3	11	11	12	12	12	12	12	12	12	12	15%	15%	16%	16%	16%	16%	16%	15%	15%	15%
80	1	6	3	2	4	4	3	1	6	5	12	13	13	13	13	13	13	13	14	14	15%	16%	16%	15%	15%	15%	15%	15%	16%	16%
90	2	1	2	2	5	1	6	2	2	5	14	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%	15%



On peut s'amuser à changer de chiffre : suivre l'apparition de la face numérotée « 1 », ou bien recommencer une nouvelle série, on obtiendra quelque chose d'assez semblable, surtout vers la fin. Le début est particulier car il n'y a eu que peu de résultats et le hasard les répartit comme il veut...

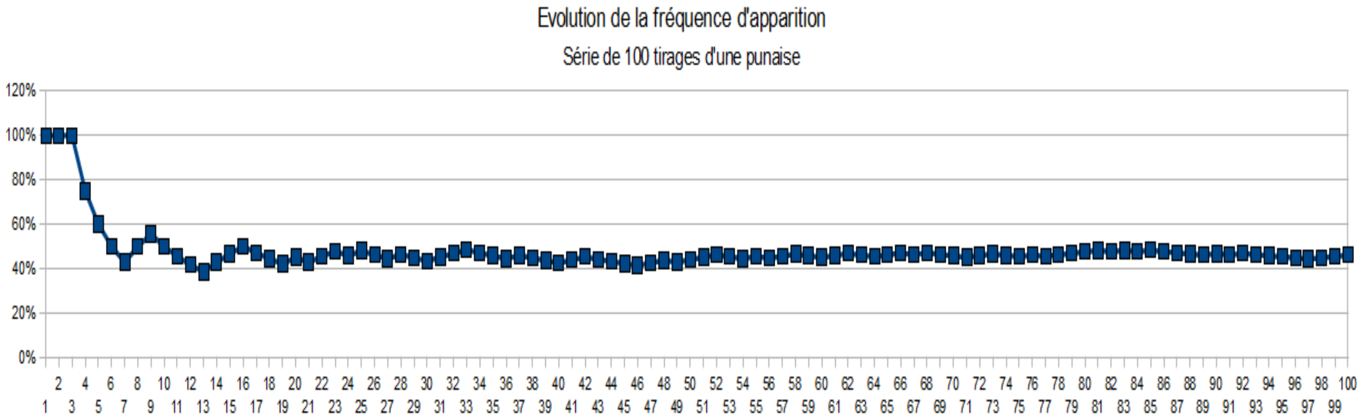
Cette « loi des grands nombres » est parfois la seule façon d'évaluer une probabilité (voir plus loin l'exemple de la punaise), mais on ne dispose pas toujours de la faculté de recommencer une expérience aléatoire un nombre infini de fois, c'est même impossible en réalité. De plus, certaines expériences sont destructives, d'autres sont coûteuses... Il faut donc parfois aborder ce problème important dans la pratique (pour pouvoir faire des prévisions dans des domaines aussi variés que la météo, l'assurance, la santé, les élections, etc.) d'une autre façon. Nous avons déjà envisagé l'échantillonnage (au chapitre des statistiques) qui permet d'évaluer une probabilité théorique à partir de la fréquence expérimentale dans un échantillon de taille réduite : cela est possible moyennant un certain taux de risque assumé. On dit que la probabilité est égale à p, au seuil de 5% (voir à ce sujet la 2ème partie du chapitre 4).

Dans certaines situations, il est possible d'effectuer des calculs pour déterminer directement les probabilités. Il faut pour cela disposer des quelques théorèmes et propriétés fondamentales de ce domaine. Ce sera l'objet de la 2ème partie de ce cours. On comprend déjà comment il est possible d'évaluer la probabilité de tirer un « 6 » avec un dé, ou un « Face » avec une pièce : il suffit de constater que chacune des faces du dé est équiprobable, de probabilité p et de savoir que la somme des 6 éventualités équiprobables est 1. Ainsi, de l'égalité $6p=1$ on obtient $p=\frac{1}{6}$. On procède de même pour la pièce de monnaie et ses 2 faces équiprobables.

Examinons une autre expérience aléatoire pour finir, pas aussi prévisible que le tirage d'une pièce ou d'un dé, une expérience pour laquelle on ne peut pas anticiper la probabilité de chaque éventualité. Au lieu de tirer une pièce régulière et quasi-symétrique, tirons une punaise, un objet clairement dissymétrique à 2faces. On peut ainsi s'interroger sur la probabilité $p_{\swarrow}$ que la punaise retombe sur la tête (pointe en haut) ou sur la probabilité $p_{\nearrow}$ qu'elle retombe sur la pointe. Hormis l'égalité $p_{\nearrow}=1-p_{\swarrow}$, on ne peut rien dire de précis sur $p_{\nearrow}$ et de $p_{\swarrow}$. On ne peut faire d'estimation de ces probabilités car la géométrie de l'objet est complexe à analyser et à convertir en probabilité. À priori les évènements ne sont pas équiprobables, mais lequel est plus probable ? Rien ne vaut alors la répétition de l'expérience, suffisamment longtemps pour obtenir une certaine stabilisation de la fréquence. La loi de répartition des fréquences lors d'un d'échantillonnage vue au chapitre « statistiques », peut nous servir : l'*intervalle de confiance* dans lequel on peut s'attendre à trouver la probabilité p au seuil de 5% est $[f_e-\frac{1}{\sqrt{n}}; f_e+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ où f_e est la fréquence dans l'échantillon. Cet intervalle ayant une amplitude de $\frac{2}{\sqrt{n}}$, nous avons la condition d'arrêt de notre répétition d'expérience : si l'on veut s'approcher de p à moins de 10^{-q}, il nous faut réaliser un nombre n d'expériences vérifiant $\frac{2}{\sqrt{n}}<10^{-q}$, soit $\sqrt{n}>2\times10^{q}$ ou encore $n>4\times10^{2q}$. Par exemple, si l'on veut s'approcher de p à moins de 10^{-2} (au seuil de 5%), il nous faut réaliser plus de $4\times10^{4}=40000$ d'expériences.

Notons les résultats des 100 premiers lancers de cette punaise en notant le nombre de réalisations de l'évènement ↙ (la punaise tombe sur sa tête) et en calculant la fréquence f_e de cet événement, sous la forme d'une fraction irréductible et d'un pourcentage : Si l'on représente ces résultats sur un graphique en mettant en abscisse le nombre de lancers et en ordonnées la fréquence cumulée obtenue, on obtient ceci:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	T	T	P	P	P	P	T	T	P	100%	100%	100%	75%	60%	50%	43%	50%	56%	50%
P	P	P	T	T	T	P	P	P	T	45%	42%	38%	43%	47%	50%	47%	44%	42%	45%
P	T	T	P	T	P	P	T	P	P	43%	45%	48%	46%	48%	46%	44%	46%	45%	43%
T	T	T	P	P	P	T	P	P	P	45%	47%	48%	47%	46%	44%	46%	45%	44%	43%
T	T	P	P	P	P	T	T	P	T	44%	45%	44%	43%	42%	41%	43%	44%	43%	44%
T	T	P	P	T	P	T	T	P	P	45%	46%	45%	44%	45%	45%	46%	47%	46%	45%
T	T	P	P	T	T	P	T	P	P	46%	47%	46%	45%	46%	47%	46%	47%	46%	46%
P	T	T	P	P	T	P	T	T	T	45%	46%	47%	46%	45%	46%	45%	46%	47%	48%
T	P	T	P	T	P	P	P	P	T	48%	48%	48%	48%	48%	48%	47%	47%	46%	47%
P	T	P	P	P	P	P	T	T	T	46%	47%	46%	46%	45%	45%	44%	45%	45%	46%



L'échantillon représenté est de taille 100 alors qu'il faut une taille 400 pour avoir moins d'un dixième d'amplitude pour l'intervalle de confiance (10% de chances). Donc ici, notre fréquence expérimentale n'est pas un bon indicateur. Si on reproduit cette expérience 40 000 fois (c'est long!) on obtient quelque chose de plus concret, car alors la fréquence expérimentale est à moins de 1% de la probabilité théorique. Voici un tableau résumant ces 40 000 tirages. On voit que *p* se situe plutôt aux alentours de 37% (et non 46% comme on l'avait obtenu après 100 tirages, nous aurions pu tout aussi bien obtenir 30% ou 50%...)

Nb tirages	4000	8000	12000	16000	20000	24000	28000	32000	36000	40000
effectif T	1548	1504	1544	1452	1512	1466	1459	1563	1525	1518
cumul T	1548	3052	4596	6048	7560	9026	10485	12048	13573	15091
fréquence T	38,700%	38,150%	38,300%	37,800%	37,800%	37,608%	37,446%	37,650%	37,703%	37,728%

2) Le calcul des probabilités

Définition d'une probabilité : la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance de voir l'évènement se réaliser. Elle vaut 0 si l'évènement est *impossible* et 1 si l'évènement est *certain*.

L'ensemble des possibilités étant noté Ω, la probabilité qu'on réalise une des possibilités de Ω est certaine et donc $P(\Omega)=1$. Lorsqu'on tire deux dés, la probabilité de l'évènement « obtenir une somme inférieure ou égale à 12 » est égale à 1, l'évènement est certain ; la probabilité de l'évènement « obtenir un produit supérieur à 36 » est égale à 0, l'évènement est impossible.

Lorsque deux évènements sont *incompatibles* (lorsqu'ils ne peuvent se réaliser en même temps) la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme des probabilités de chacun pris individuellement. En d'autre terme, si A et B sont deux évènements sont incompatibles alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

L'hypothèse d'équiprobabilité : Si toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'elles sont *équiprobables*. Des considérations élémentaires sur l'interchangeabilité des issues permettent souvent de retenir cette hypothèse et de déterminer ainsi la probabilité d'une issue sur les n issues possibles : $\frac{1}{n}$.

Exemples : Lorsqu'on tire un dé à 6 faces, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{6}\approx 0{,}17$ si le dé n'est pas truqué. En effet, si le dé est bien équilibré, tous les résultats sont *équiprobables* (ils ont la même chance de se produire, soit 1 chance sur 6). Avec une roue de loterie comportant n nombres, on peut avoir n résultats possibles et équiprobables (1 chance sur n d'obtenir un des cas possibles), si la roue n'est pas truquée.

Une expérience aléatoire peut avoir des résultats qui ne sont pas équiprobables. Par exemple, la rencontre d'un élève au hasard à la sortie du lycée est une expérience aléatoire. En se postant à la sortie du lycée, on peut rencontrer n'importe quel élève avec la même probabilité, il y a une sorte d'équiprobabilité *à priori*. Mais si on s'intéresse à la réalisation d'évènements particulier comme par exemple, « l'élève est un garçon » ou « l'élève est une fille » il n'y a pas équiprobabilité entre ces deux éventualités. La probabilité qu'advienne un garçon est déterminée par la proportion des garçons parmi les élèves. S'il y a 215 garçons pour 232 filles dans ce lycée, la probabilité de « l'élève est un garçon » est de $\frac{215}{215+232}=\frac{215}{447}\approx 0{,}48$. Lorsqu'on rencontre un élève au hasard, à la sortie du lycée, il y a environ 48% de chances que ce soit un garçon.

Dans la plupart des situations étudiées en probabilité, on utilise ce genre de raisonnement, basé sur un dénombrement des différentes éventualités, pour obtenir, par le calcul, la probabilité d'un événement donné. On identifie et on dénombre les éventualités équiprobables et on dénombre également les éventualités qui réalisent l'évènement considéré.

Méthodologie directe et fondamentale des probabilités :
En appelant « cas favorables » les éventualités qui réalise l'évènement E, et « cas possibles » l'ensemble des éventualités de l'expérience aléatoire, on a $\text{Probabilité de } E=\frac{\text{Nombre de cas favorables à } E}{\text{Nombre de cas possibles}}$.

Exemple : Si je veux savoir, lorsque je tire 2 dés, la probabilité d'obtenir au moins un six, je peux faire la liste des éventualités. Il y en a 36, chacune étant équiprobable. Nous avons mis cela dans un tableau avec, en jaunes, les éventualités qui réalisent l'évènement considéré. On voit dans un tableau qu'il y a 11 éventualités qui réalisent l'évènement considéré sur 36 éventualités équiprobables. La probabilité de cet événement est donc 11 sur 36, soit $\frac{11}{36}\approx 0{,}3055...$ ou encore 30,55% environ.

	1er dé					
2ème dé	1	2	3	4	5	6
1	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
2	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
3	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
4	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
5	NON	NON	NON	NON	NON	OUI
6	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI

Définition : Un *évènement* est un ensemble d'*éventualités* (réalisations particulières, aussi appelées *évènements élémentaires*) donnant un même résultat pour une expérience aléatoire. L'évènement contraire d'un évènement A est l'évènement qui est réalisé lorsque A ne l'est pas. Cet événement contraire de A, est souvent noté non-A ou encore $\overline{A}$. D'après la définition des probabilités, comme $A\cap\overline{A}=\emptyset$ et $A\cup\overline{A}=\Omega$ on a $P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$ et donc $P(A)=1-P(\overline{A})$.

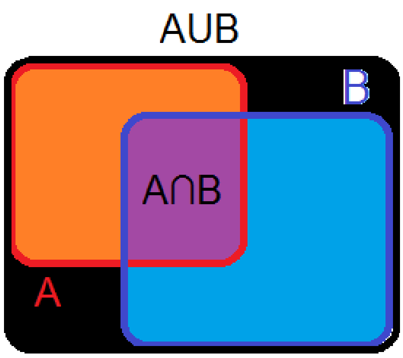
Exemples : L'évènement contraire de « l'élève est un garçon » est « l'élève est une fille ». La somme des probabilités de ces évènements contraires est égale à 1 ou 100%. S'il y a environ 48% de chances que l'élève soit un garçon, il doit y avoir 52% de chances que l'élève soit une fille.

Lorsqu'on tire 2 dés et qu'on s'intéresse à la somme des deux dés, l'évènement E :« la somme vaut 4 » est réalisé pour plusieurs éventualités : le 1^er dé donne 1 et le 2^d donne 3 - le 1^er dé donne 2 et le 2^d donne 2 - le 1^er dé donne 3 et le 2^d donne 1. On a $P(E)=\frac{\text{Nombre de cas favorables à } E}{\text{Nombre de cas possibles}}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083$. L'évènement contraire de l'évènement E est l'évènement $\overline{E}$: « la somme vaut 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 ». On calcule alors facilement $P(\overline{E})=1-P(E)=\frac{11}{12}\approx 0{,}917$.

Lorsqu'on tire 2 dés, l'évènement E : « on tire au moins un chiffre pair » est réalisé pour plusieurs éventualités que l'on peut dénombrer afin de calculer sa probabilité : il y a 36 éventualités équiprobables et celles qui réalisent l'évènement sont $3\times 6+3\times 6-3\times 3=27$ (pair sur dé n°1 ou pair sur dé n°2 et il faut enlever pair sur les 2 dés et il y a 9 possibilités 22,24,26,42,44,46,62,64,66). La probabilité de E est donc $P(E)=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$. Mais il est plus facile de considérer l'évènement contraire de E ou $\overline{E}$ « les deux dés sont impairs ». La probabilité de $\overline{E}$ est simple à déterminer $P(\overline{E})=\frac{3^2}{36}=\frac{1}{4}$ (il y a toujours 9 possibilités qui sont cette fois 11,13,15,31,33,35,51,53,55) et donc $P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Propriété : Lorsqu'un évènement est réalisable d'une façon A ou d'une façon B, A et B n'étant pas forcément incompatibles, on a $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Cela vient du fait que, *card*(A) désignant le nombre d'éléments d'un ensemble A (*card* est l'abréviation de cardinal qui désigne le nombre d'éléments d'un ensemble), on a : $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$. Considérons en effet le schéma ci-contre où les deux ensembles A et B ont une intersection non-vide. Lorsqu'on calcule la somme des cardinaux de A et de B, on compte deux fois les éléments de l'intersection $A\cap B$. Il faut donc retrancher le cardinal de cet ensemble à cette somme pour calculer le cardinal de l'union $A\cup B$.

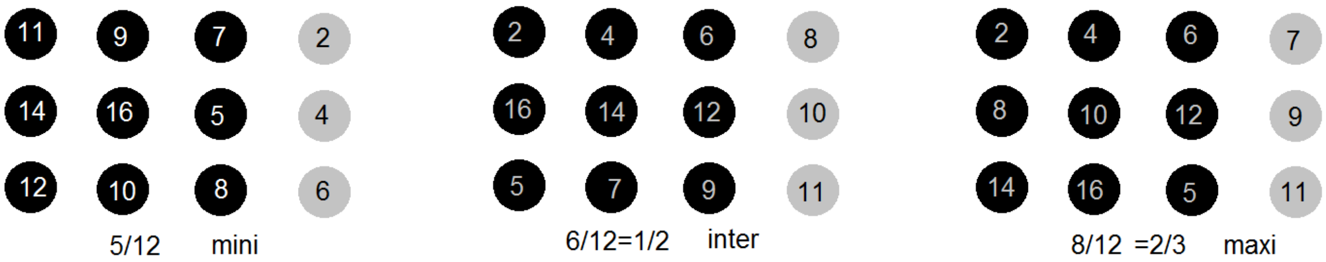


Exemple 1 : On tire 2 dés et on s'intéresse aux évènements A : « les deux dés donnent un produit impair » et B : « on obtient un double ». Notons ces évènements en extension A={(1;1),(1;3),(1;5),(3;1),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5)} et B={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)}.
$A\cup B$={(1;1),(1;3),(1;5),(3;1),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5),(2;2),(4;4),(6;6)} et $A\cap B$={(1;1),(3;3),(5;5)}.
$card(A\cup B)=12$ et $card(A)+card(B)-card(A\cap B)=9+6-3=15-3=12$.
Avec les probabilités $P(A\cup B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ et $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{9}{36}+\frac{6}{36}-\frac{3}{36}=\frac{9+6-3}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$.

Exemple 2 : Dans un village de vacances, 75% des personnes jouent au tennis (T), 60% des personnes font de la planche à voile (P). On rencontre au bar une personne de ce centre. Quelle est la probabilité minimum que cette personne pratique les deux sports ? $P(T\cup P)=P(T)+P(P)-P(T\cap P)$ Donc $P(T\cap P)=\frac{75}{100}+\frac{60}{100}-P(T\cup P)=\frac{135}{100}-P(T\cup P)$. Mais comme $P(T\cup P)\leq 1$, on a $-P(T\cup P)\geq -1$ et

$\frac{135}{100}-P(T\cup P)\geq\frac{135}{100}-1$ et donc $P(T\cap P)\geq\frac{35}{100}$.

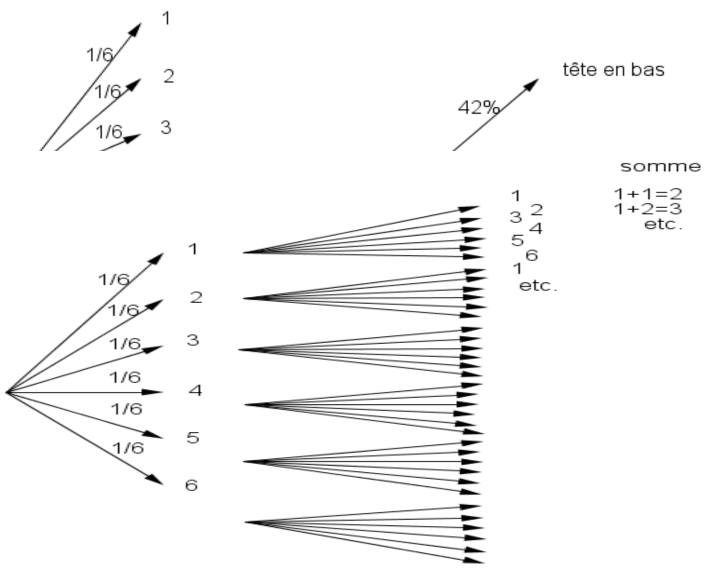
Exemple 3 : Une urne contient des boules blanches et des boules noires, chacune ayant un numéro (n°) écrit dessus. On sait que P(noire)= $\frac{3}{4}$ et P(n° pair)= $\frac{2}{3}$. Montrons que $\frac{2}{3}\geq P$(noire et n° pair)$\geq\frac{5}{12}$. On sait que P(noire et n° pair)=P(noire)+P(n° pair)−P(noire ou n° pair)= $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{8}{12}=\frac{17}{12}-P$(noire ou n° pair), mais comme P(noire ou n° pair)≤1 on en déduit que $-P$(noire ou n° pair)≥−1 et $\frac{17}{12}-P$(noire ou n° pair)≥ $\frac{17}{12}-1$. C'est-à-dire P(noire et n° pair)$\geq\frac{17}{12}-\frac{12}{12}$ ou encore P(noire et n° pair)$\geq\frac{5}{12}$. Pour l'autre inégalité, il suffit d'observer que la plus petite des probabilité étant pour « n° pair », si cet événement est certain quand l'autre « noire » est réalisé, donc si le plus petit (« n° pair ») est inclus dans le plus grand (« noire »), la probabilité de l'intersection « noire et n° pair » est la probabilité du plus petit, donc $\frac{2}{3}$.



3) Arbres, diagrammes et tableaux

Construire un arbre permet de représenter l'ensemble des résultats possibles pour une expérience aléatoire afin de déterminer des probabilités. Généralement, on indique sur chacune des branches de l'arbre leurs probabilités. Lorsqu'on s'intéresse à des expériences aléatoire comportant plusieurs épreuves, la construction d'un arbre facilite le dénombrement des cas favorables et donc, le calcul des probabilités.

Voici comment on représenterai les épreuves : tirage d'un dé à 6 faces (à gauche) et tirage d'une punaise (à droite).



Exemple 1 : on tire 2 dés à 6 faces et s'intéresse à la somme obtenue. L'arbre permet de comprendre qu'il y a 36 évènements élémentaires équiprobables. Chaque branche de cet arbre a une probabilité de $\frac{1}{36}$. Par contre, chaque branche ne conduit pas à un résultat unique. Il y a plusieurs branches qui conduisent au même résultat. Comme précédemment, on peut utiliser un tableau pour résumer l'ensemble des informations recueillies sur notre arbre et effectuer les dénombrements à partir de ce tableau. Mais il se dégage de cette méthode deux règles qui vont nous éviter d'avoir systématiquement recours à des tableaux pour déterminer les probabilités. L'arbre seul suffit à trouver les probabilités si l'on considère que :

- Sur une branche, on multiplie les probabilités depuis la racine jusqu'aux feuilles. Par exemple, on a obtenu $\frac{1}{36}$ en multipliant $\frac{1}{6}$ par $\frac{1}{6}$ qui sont les probabilités des 2 segments formant une branche.
- Entre 2 branches, on additionne les probabilités. Par exemple, pour l'évènement "obtenir une somme égale à 5" on additionne les probabilités des chemins 1-4, 2-3, 3-2 et 4-1 qui ont chacun une probabilité de $\frac{1}{36}$. Donc $P(Somme{=}5)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$.

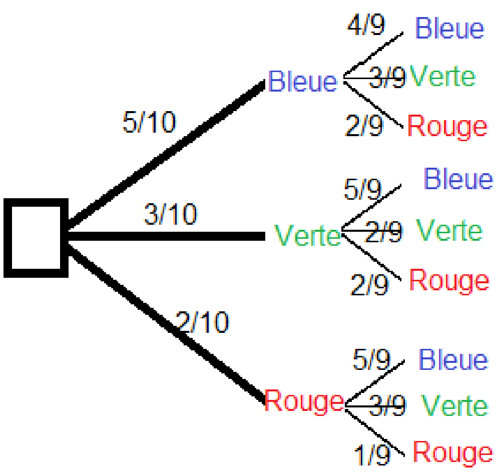
Les tableaux permettent de consigner les résultats, mais aussi de faire quelques calculs. Voici ci-dessous, le tableau qui donne les sommes obtenues au tirage de 2 dés. Remarquons que si l'on envisage de tirer 3 dés ce tableau devrait avoir une 3ème dimension, ce qui n'est pas facile à représenter. La méthode exposée ne convient que pour des expériences à 2 choix.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Si l'on compte le nombre d'évènements élémentaires qui conduisent à une somme donnée, on obtient le tableau suivant qui donne les probabilités sous forme de fractions simplifiées:

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
cas favorables	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Exemple 2 : Lorsqu'on réalise des épreuves successivement, il peut arriver que la 1ère épreuve modifie les probabilités élémentaires. L'arbre des probabilités prend alors encore plus d'intérêt. Par exemple, lorsqu'on tire successivement dans une urne, 2 boules numérotées. Sachant qu'au départ il y a 5 boules bleues, 3 vertes et 2 rouges. Calculons la probabilité que les 2 boules tirées soient de la même couleur.



Nous voyons alors que la probabilité d'obtenir un tirage d'une seule couleur correspond à la réalisation de 3 évènements élémentaires suivants:

- obtenir 2 boules bleues $p_1=\frac{20}{90}$ (20=5×4)
- obtenir 2 boules vertes $p_2=\frac{6}{90}$ (6=3×2)
- obtenir 2 boules rouges $p_3=\frac{2}{90}$ (2=2×1)

Finalement, la probabilité d'obtenir un tirage de la même couleur est $\frac{28}{90}$ (28=20+6+2), soit $\frac{14}{45}$ ce qui correspond environ à 31%, un peu moins d'une chance sur 3.

Nous venons de voir là un exemple un peu complexe qu'il est pourtant facile d'analyser si l'on se représente les différents résultats de l'expérience aléatoire, étape par étape, en y associant à chaque fois les probabilités élémentaires et en appliquant les 2 règles citées plus haut pour le calcul des probabilités sur un arbre.

Principe multiplicatif (principe de dénombrement) : Une tâche comporte plusieurs choix à faire successivement, le premier pouvant être fait de n_1 façons différentes, le deuxième de n_2 façons différentes, etc. Dans ce cas, la tâche peut être faite au final, de $n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots$ façons différentes. Pour se convaincre de cela, il suffit de dresser (même de façon imaginaire) l'arbre des possibilités.

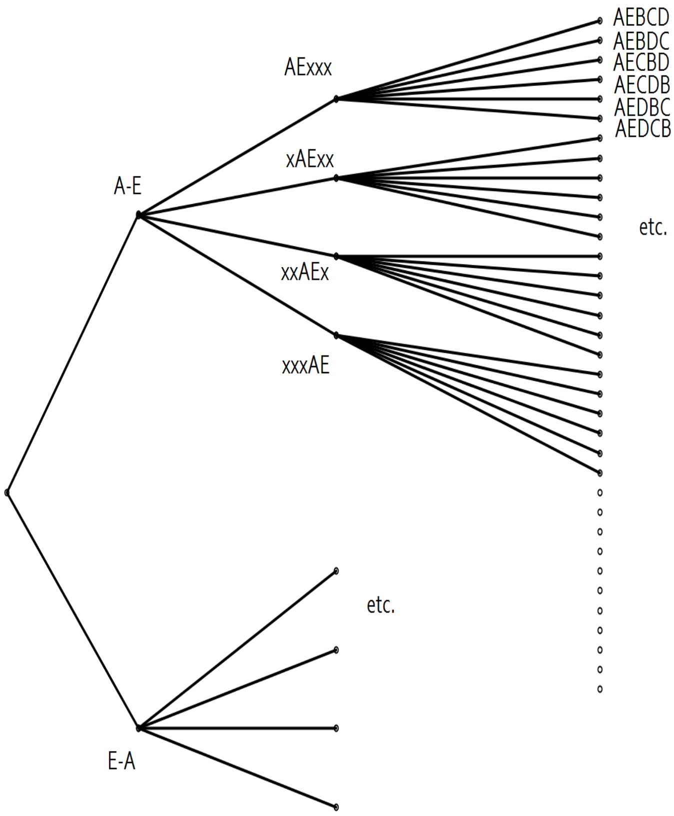
Appliquons ce principe multiplicatif au calcul des probabilités :

Exemple 1 : Quelle est la probabilité de gagner au tiercé, sachant qu'il y a 15 chevaux au départ et que l'on doit trouver les 3 gagnants dans l'ordre d'arrivée. Notre tâche est de dénombrer les tiercés. Il faut « choisir » le premier cheval (celui qui gagnera), il y a 15 façons de faire ce choix. Il faut ensuite choisir le deuxième cheval, il n'y a plus que 14 façons de faire ce choix (le cheval qui a été choisi pour gagner ne peut arriver second). Pour le troisième cheval, il n'y a plus que 13 façons de choisir. Il y a dons 15×14×13=2730 tiercés. Comme un seul gagnera, la probabilité est *à priori* (sans information complémentaire) de $\frac{1}{2730}\approx 0{,}0004$. L'arbre sous-jacent n'est pas tracé ici, il est imaginé.

Exemple 2 : Nous voulons ranger 5 livres dans la bibliothèque, disons *A, B, C, D* et *E*. Nous nous interrogeons sur la probabilité que *A* se retrouve à côté de *E*. Une façon de procéder est d'imaginer l'arbre représentant les classements différents, c'est-à-dire les cas possibles (cet arbre n'est généralement qu'imaginé car le tracé est souvent fastidieux) : On choisit un livre (5 choix possibles) qui se rangera à gauche, puis le livre suivant (4 possibilités), etc. le dernier livre est placé à droite.

Il y a en tout $5\times4\times3\times2\times1=5!=120$ rangements différents possibles.

Si on veut choisir de mettre 2 livres particuliers, disons les livres *A* et *E*, côte-à-côte, il faut choisir lequel se trouvera à gauche (il y a 2 possibilités), puis l'emplacement du binôme (il y a 4 possibilités car les 2 livres occupent 2 places consécutives), puis choisir les places des 3 autres livres (il y a $3\times2\times1=3!=6$ différentes façons d'occuper les 3 places libres). Ces 3 choix successifs sont représentés dans l'arbre (partiel) ci-contre. On a donc finalement $2\times4\times6=48$ rangements possibles des 5 livres avec *A* et *E* côte-à-côte. Un rangement de ce type a donc une probabilité de $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}=0{,}4$, soit 40% de chances d'arriver.



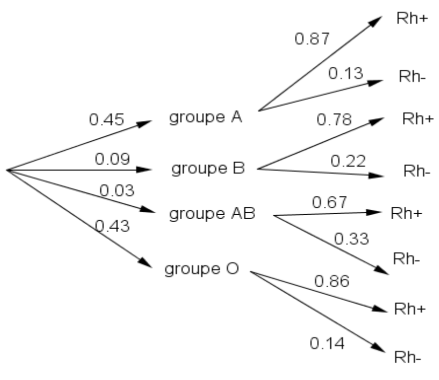
Remarque : Lorsqu'on effectue la multiplication des probabilités sur un branche pour trouver la probabilité d'une branche, on applique une certaine forme de ce principe multiplicatif. Les probabilités sont comme des fréquences de répartition, des fractions d'un tout (donc inférieures à 1). Nous savons (depuis la classe de 5$^{\text{ème}}$) calculer la fraction correspondant à la fraction d'une fraction : en multipliant les fractions entre elles. Par exemple, si 40% des élèves sont des filles et que 20% des filles étudient l'allemand, on a $\frac{40}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{800}{10000}=\frac{8}{100}$, soit 8% des élèves qui sont des filles étudiant l'allemand. C'est cette forme de principe multiplicatif qui est à l'œuvre dans un arbre de probabilité.

<u>Exemple</u> : La répartition des groupes sanguins dans la population française est la suivante:

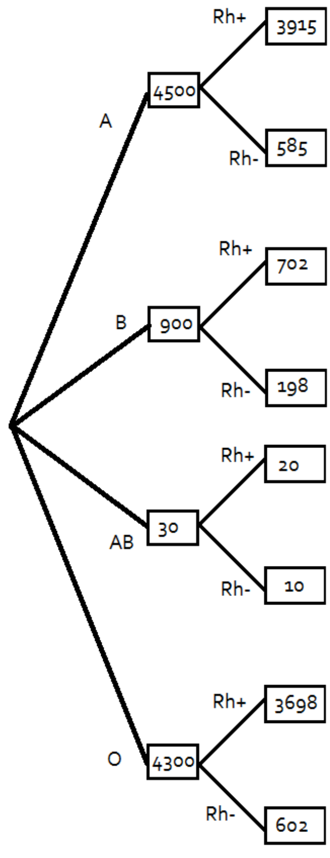
A	B	AB	O
45%	9%	3%	43%

Pour chaque groupe, la possession du facteur Rhésus est la suivante :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	87%	78%	67%	86%
Rh-	13%	22%	33%	14%



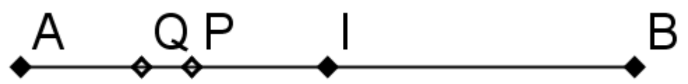
On voudrait savoir la probabilité qu'un français pris au hasard soit de Rhésus *Rh-*. Pour cela on construit l'arbre des probabilités ci-contre et on calcule :
$P(\text{Rh-})=0{,}45\times0{,}13+0{,}09\times0{,}22+0{,}03\times0{,}33+0{,}43\times0{,}14$
d'où $P(Rh\text{-})=0{,}1484$ soit environ 15% des français.



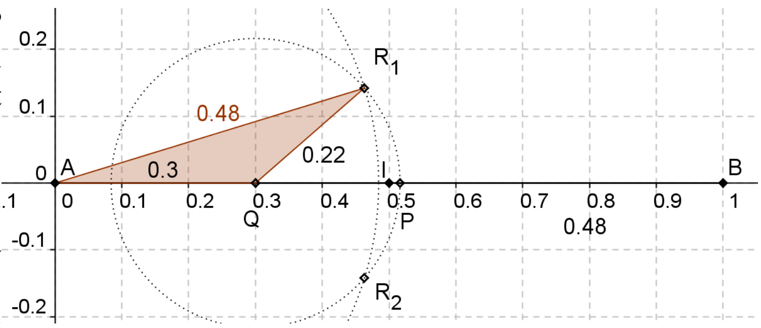
On peut représenter la situation par un arbre donnant la répartition d'un échantillon représentatif de la population française de 10 000 français avec 4 500 du groupe A, 900 du groupe B, 300 du groupe AB et 4300 du groupe O. Dans le groupe A, il y a 0,87×4 500=3915 *Rh*+ et 585 *Rh*-. Selon le même raisonnement pour les autres groupes sanguins, on arrive à la répartition de l'arbre ci-contre (arbre de répartition). Dans cet arbre, effectuer le produit des nombres de chaque segment de branches n'aurait pas de sens.

<u>Déterminer une probabilité dans un cas continu</u>

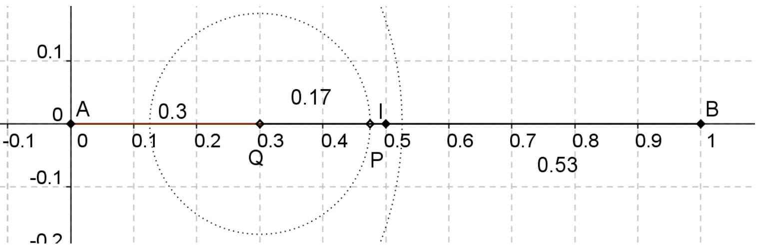
Dans certaines situations, l'ensemble des possibilités est infini. C'est le cas lorsqu'on tire au hasard la position d'un point sur un segment de longueur unité. Imaginons que dans cette situation, nous choisissons deux points au hasard $P(x)$ et $Q(y)$ sur un segment $[AB]$ de milieu I avec $AB=1$. Quelle est la probabilité que P et Q soient tous les deux du même côté par rapport à I ? Cette question est équivalente au tirage de deux pièces et la probabilité que les deux pièces soient toutes les deux « piles » ou toutes les deux « faces ». On sait qu'il y a une chance sur deux pour que cela arrive. Pourtant la position de P et de Q n'est pas connue avec précision, l'abscisse d'un de ces points pourrait valoir n'importe quel nombre entre 0 et 1.



La formule pour ce genre de situation généralise celle qu'on obtient pour un nombre fini d'éventualité : pour calculer la probabilité que P soit sur $[AI]$, on prend le rapport entre la longueur de ce segment réalisant l'évènement et la longueur du segment $[AB]$ entier.



On peut ainsi s'intéresser à des situations comme celle-ci : on tire au hasard la position de deux points P et Q sur $[AB]$ et on cherche à déterminer la probabilité que les trois longueurs ainsi définies soient celles d'un triangle. Vous savez que trois nombres ne sont pas forcément les longueurs d'un triangle. Par exemple 2, 5 et 10 ne peuvent être les longueurs d'un triangle car 10>2+5. Donc ici, en supposant que $x<y$, on doit avoir x, $y-x$ et $1-y$ (les longueurs qui sont les côtés potentiels) qui vérifient les trois inégalités, dites « triangulaires » :



$x < y-x + 1-y$;

$x + y-x > 1-y$;

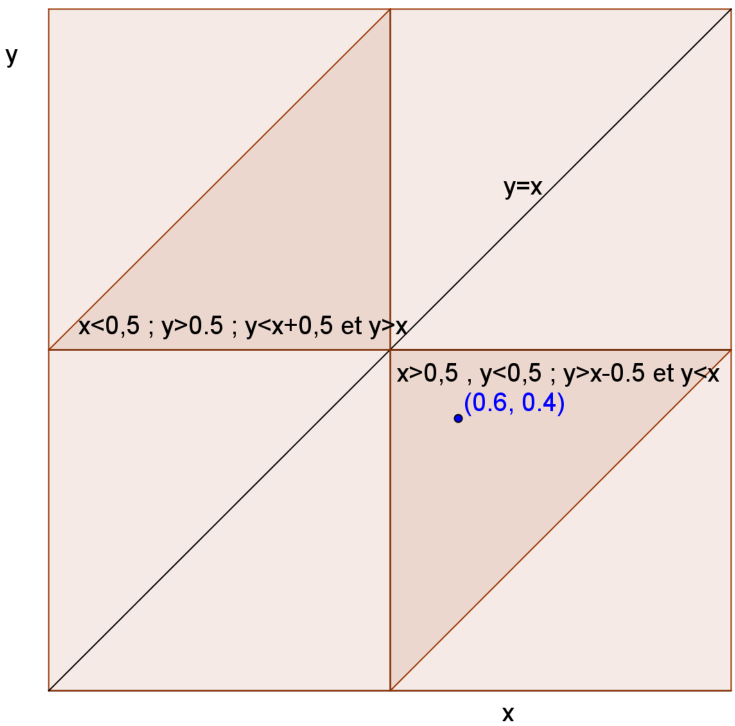
$x +1- y > y-x$

qui se simplifient en :

$2x>1$; $2y<1$; $2(y-x)<1$

et donc :

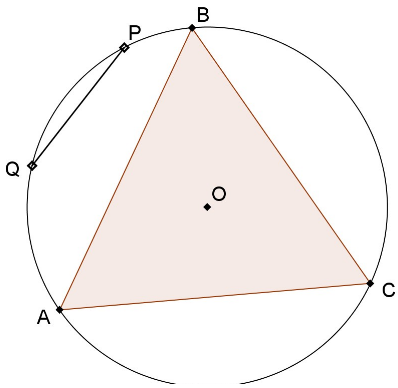
$x<0,5$; $y>0,5$; $y<x+0,5$.



En plaçant les point qui conviennent dans un repère orthonormé, alors que les conditions $0<x<1$ et $0<y<1$ conduisent à considérer tous les points du carré de côté 1, on ne retient que les points d'un petit triangle isocèle-rectangle de côté 0,5 et d'aire $\frac{1}{8}$. Il faut envisager l'autre cas, où $x>y$ qui conduit à un autre petit triangle symétrique par rapport à la 1ère bissectrice (voir figure). La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$. Une fois sur quatre, on obtiendra un triangle.

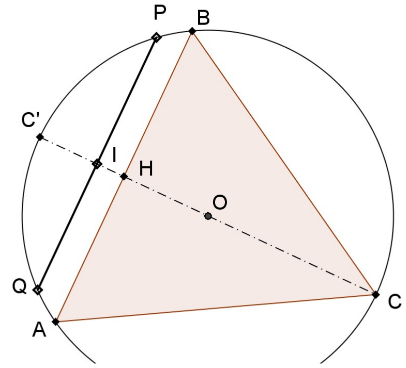
Difficultés inattendues dans le cas d'une grandeur continue

Ce que nous venons de dire conduit au calcul de probabilités dans bien des situations mais on doit pourtant s'attendre à certaines difficultés liées au fait qu'il n'est pas toujours évident de distinguer, dans le cas d'un univers infini, des éventualités équiprobables. Examinons ce cas d'école appelé « paradoxe de Bertrand[1] » : un triangle équilatéral *ABC* inscrit dans un cercle. On choisit *P* et *Q*, deux points au hasard sur le cercle et on s'interroge sur la probabilité que la corde [*PQ*] soit plus courte que le côté [*AB*] du triangle.



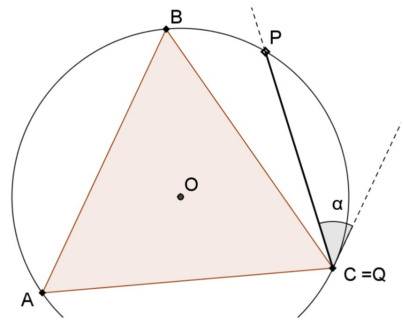
1ère manière d'envisager la situation :

On suppose que la corde est parallèle à un côté du triangle (cela ne change pas le problème), disons que (*AB*)//(*PQ*). Le milieu *I* de la corde se déplace donc sur la médiatrice de [*AB*]. Ce n'est pas difficile de montrer que dans ce cas, *H* étant le milieu de [*AB*] et *C′* le point diamétralement opposé à *C* sur le cercle, C'H=HO et donc il y a *une chance sur deux* de choisir *I* de façon à ce que la corde soit plus petite que le côté du triangle. Il faut que $I\in[C'H]$ lorsque $I\in[OC']$ et symétriquement par rapport à *O* lorsque $I\in[OC]$.



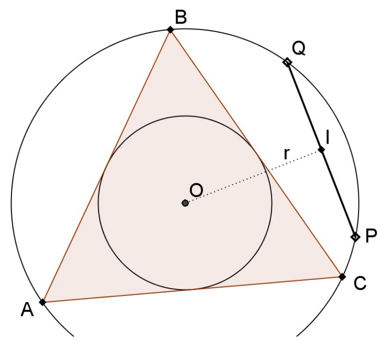
2ème manière d'envisager la situation :

On suppose que la corde parte d'un sommet du triangle (cela ne change pas le problème), disons que *C*=*Q*. Traçons la parallèle à (*AB*) passant par *C*, la tangente au cercle en *C*. La corde [*PQ*] fait alors un angle α avec cette tangente, orientée comme le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Cet angle prenant toutes les valeurs possibles entre 0 et π rad, la corde sera plus petite que le côté du triangle lorsque $\alpha\in[0\,;\frac{\pi}{3}]$ ou $\alpha\in[\frac{2\pi}{3}\,;\pi]$, donc on a *une chance sur trois* de réaliser cet événement quand on choisit un angle au hasard dans l'intervalle continu $[0\,;\pi]$…



3ème manière d'envisager la situation :

On suppose que le milieu *I* de la corde soit choisit au hasard dans le cercle. Pour chaque point *I* on peut déterminer la corde [*PQ*] de façon unique. Pour que la corde soit plus courte que le côté du triangle, il suffit que *I* soit à l'extérieur du cercle de centre *O* et de rayon $\frac{1}{2}$. Comme l'aire de ce cercle vaut $\pi r^2=\pi\times(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{4}$ alors que l'aire du grand vaut π, la probabilité cherchée vaut $\frac{\pi}{4}\div\pi=\frac{1}{4}$. On a donc *une chance sur quatre* de réaliser cet événement quand on choisit un point *I* au hasard.

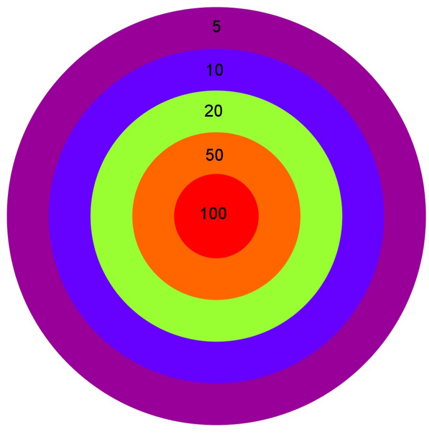


Conclusion : il faut être prudent dans la façon de définir les évènements équiprobables qui nous servent de base au calcul des probabilités car il se peut qu'on soit dans un cas comme celui-ci, où la façon de choisir la méthode influence le résultat obtenu. Lequel est correct ?

4) Jeux et probabilités

a) Jeux d'adresse et jeux de hasard

Le dénombrement qui conduit au calcul de la probabilité peut être un calcul d'aire (ou le calcul d'une autre grandeur, donc pas exactement un dénombrement d'objets identifiés) comme par exemple avec cette cible. Si les rayons des différents cercles sont 1, 2, 3, 4 et 5, alors les aires des anneaux correspondants aux différentes zones de cette cible



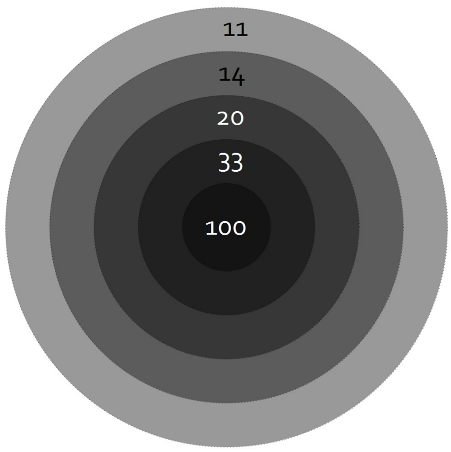
1 Joseph Bertrand (18222-1900), mathématicien parisien, publie en 1888 un livre intitulé « Calcul des probabilités ».

sont : $(1^2-0^2)\pi=1\pi$ pour l'anneau rouge (gain=100),
$(2^2-1^2)\pi=(4-1)\pi=3\pi$ pour l'anneau orange (gain=50),
$(3^2-2^2)\pi=(9-4)\pi=5\pi$ pour l'anneau vert (gain=20),
$(4^2-3^2)\pi=(16-9)\pi=7\pi$ pour l'anneau bleu (gain=10) et
$(5^2-4^2)\pi=(25-16)\pi=9\pi$ pour l'anneau violet (gain=5).

La probabilité de toucher une zone particulière va être estimée égale au rapport entre l'aire de cette zone (assimilée au nombre de cas favorables, chacun des mm² de cette aire) et l'aire de la cible (assimilée au nombre de cas possibles). La zone centrale de cette cible a donc une probabilité de $\frac{\pi}{5^2\times\pi}=\frac{1}{25}$. Les autres probabilités sont calculées de façon identiques. On obtient les probabilités suivantes :

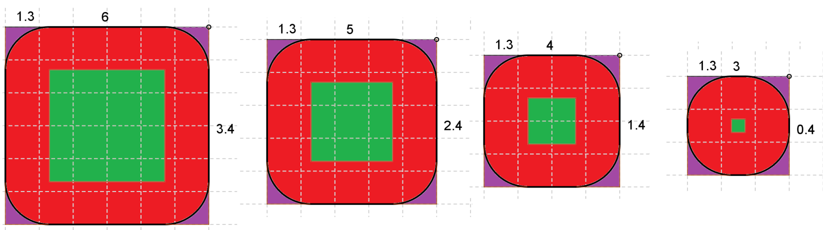
Zone « 100 »	Zone « 50 »	Zone « 20 »	Zone « 10 »	Zone « 5 »
$\frac{1}{25}=\frac{4}{100}$	$\frac{3}{25}=\frac{12}{100}$	$\frac{5}{25}=\frac{20}{100}$	$\frac{7}{25}=\frac{28}{100}$	$\frac{9}{25}=\frac{36}{100}$

On peut s'interroger, dans cette situation sur la moyenne qu'on obtiendra en atteignant la cible au hasard : $100\times\frac{4}{100}+50\times\frac{12}{100}+20\times\frac{20}{100}+10\times\frac{28}{100}+5\times\frac{36}{100}=\frac{400+600+400+280+180}{100}=18{,}6$. Mais bien évidemment, si l'on tire sur la cible, on a des chances de la rater. La probabilité de cet événement est plus difficile à calculer! En effet, l'aire de la surface extérieure à la cible est potentiellement très élevée. De toutes les façons, ce jeu est un exemple de jeu d'adresse où le hasard joue un rôle de plus en plus réduit au fur-et-à-mesure que l'adresse du joueur croît. La réflexion probabiliste consistant à supposer qu'une flèche atteignant une zone de la cible a une probabilité proportionnelle à l'aire de cette zone est fondée cependant et devrait servir de base à l'établissement des gains par zone. Les tireurs maladroits ne devraient pas être récompensés lorsqu'ils atteignent le centre de la cible par hasard. Quelles valeurs donner aux gains par zone pour que chacune des zones contribue de façon homogène au gain d'un joueur maladroit ? Il faudrait avoir une contribution égale pour chaque zone et la contribution c_i de la zone de gain g_i atteinte avec une probabilité p_i est égale à $c_i=p_i\times g_i$. D'où, pour que $c_i=c_j, i\neq j$, il faudrait que $p_i\times g_i=p_j\times g_j, i\neq j$. En prenant $g_1=100$ pour le gain de la zone centrale (zone 1), cela conduit à prendre dans la zone adjacente (zone 2) un gain g_2 vérifiant $100\times\frac{4}{100}=g_2\times\frac{12}{100}$, soit $g_2=4\times\frac{100}{12}=\frac{100}{3}\approx 33$. De la même façon, on détermine ainsi $g_3=4\times\frac{100}{20}=20$, $g_4=4\times\frac{100}{28}=\frac{100}{7}\approx 14$ et $g_5=4\times\frac{100}{36}=\frac{100}{9}\approx 11$. Ainsi pondérées, les zones de la cible participent toutes de la même façon au gain d'un joueur malhabile qui s'établirait en moyenne à 20 (au lieu de 18,6 avec le système de gains indiqué sur la cible qui récompense mieux les tirs sur la zone « 50 » que sur la zone « 100 »).



Les jeux d'adresse demandent la maîtrise d'un geste pour réussir au mieux une épreuve. Le jeu des fléchettes (cible ci-dessus), le tir à l'arc ou au pistolet, les pétanques, le billard, sont des jeux d'adresse ; le jeu de franc carreau (voir plus loin) en est un aussi, jusqu'à un certain point. Si la cible est très proche, on peut viser et donc le joueur utilise son adresse pour réussir au mieux l'épreuve. Lorsqu'on éloigne la cible du joueur, le jeu devient de plus en plus aléatoire, sensible à des variations si minimes des conditions de tir et de l'environnement (vitesse du vent par exemple) que l'adresse ne suffit plus, comme au jeu de golf. Cela reste pourtant un jeu où l'adresse a sa part et le hasard la sienne. Les joueurs expérimentés anticipent alors la réaction de l'environnement et contrôlent la force et la précision de leurs gestes avec plus d'efficacité.

b) <u>Jeux favorables et jeux défavorables</u>

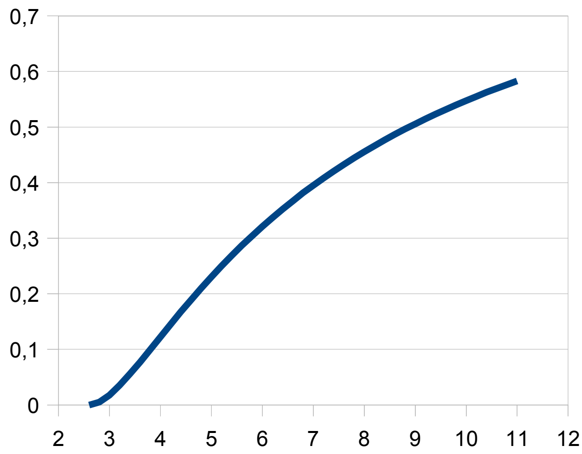


Le jeu de franc carreau consiste à lancer un palet circulaire sur un carrelage. On gagne « franc carreau » si le palet ne touche pas les bords du carrelage. Calculons la probabilité p de faire un « franc carreau » lorsqu'on joue à ce jeu

avec une pièce de 2 euros sur un carrelage dont les carreaux font x cm de côtés.
Le diamètre d'une pièce de 2 euros est 2,6 cm. Les zones contenant la pièce « franc carreau » a l'allure donnée par la figure ci-dessous. En vert la zone où le centre de la pièce doit être, en rouge et violet la zone où il ne doit pas être. Les zones rouge et verte sont les endroits atteints par une partie de la pièce « franc carreau », la zone violette n'étant jamais atteinte pour un « franc carreau ». En fait, la probabilité cherchée est égale au rapport entre l'aire de la zone verte et le carreau. Le côté de la zone verte est $x-2{,}6$, et donc la probabilité p vaut $\frac{(x-2{,}6)^2}{x^2}$. Le tableau ci-dessous nous donne les valeurs de p lorsque x varie.

x	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5	5,4	5,8	6,2	6,6	7	7,4	7,8	8,2	8,6
p	0	0,02	0,06	0,1	0,15	0,19	0,23	0,27	0,3	0,34	0,37	0,4	0,42	0,44	0,47	0,49

À partir de quelle taille de carreau ce jeu est-il favorable au joueur (un jeu est favorable si l'on a plus d'une chance sur 2 de gagner) ? Nous pourrions répondre, au vu du graphique ci-contre (ou du tableau) que c'est à partir de 8,8 environ.
Le calcul nous donne pour $x=8{,}8$ une probabilité p égale à $\frac{(8{,}8-2{,}6)^2}{8{,}8^2}=(\frac{6{,}2}{8{,}8})^2=(\frac{31}{44})^2=\frac{961}{1936}\approx 0{,}496384$.



Pour trouver la valeur exacte de x qui sépare les jeux favorables des jeux défavorables, il faut résoudre l'équation $\frac{(x-2{,}6)^2}{x^2}=0{,}5$ qui revient à :
$(x-2{,}6)^2=0{,}5\,x^2$ et donc à $(x-2{,}6)^2-0{,}5\,x^2=0$.
Factorisons le membre de gauche :
$(x-2{,}6)^2-(\sqrt{0{,}5}\,x)^2=(x-2{,}6-\sqrt{0{,}5}\,x)(x-2{,}6+\sqrt{0{,}5}\,x)=0$.
Le 1er facteur s'annule pour $x(1-\sqrt{0{,}5})=2{,}6$ c'est-à-dire pour $x=\frac{2{,}6}{(1-\sqrt{0{,}5})}\approx 8{,}876955$ qui est la valeur cherchée ; le 2^{d} facteur s'annule, quant à lui, pour $x(1+\sqrt{0{,}5})=2{,}6$ c'est-à-dire pour $x=\frac{2{,}6}{(1+\sqrt{0{,}5})}\approx 1{,}5230$ qui est une valeur inférieure à 2,6 donc impossible.

c) Stratégie gagnante à un jeu défavorable (?)
Certains jeux sont défavorables au joueur et pourtant celui-ci trouve de l'intérêt à y jouer. Ainsi en est-il du Loto où les chances de gagner sont faibles (voir TD n°2) mais la somme attribuée au gagnant du gros lot est si importante que certains se laissent tenter. Une prise de risque modique (une grille coûte 2 euros) et un espoir de gain fabuleux (huit millions d'euros gagnés par une personne lors du super-tirage de la Saint-Valentin le 16 février 2013), voilà la recette du Loto et de ces nombreux autres avatars de jeux de pur hasard. Existe t-il des stratégies pour de tels types de jeu ? Certains joueurs veulent y croire mais en général, une situation défavorable au joueur ne conduit pas à l'enrichissement du joueur.
On peut prouver qu'une stratégie est gagnante lorsqu'elle conduit à un gain positif certain au bout de n essais. Voici un exemple de jeu défavorable au joueur pour lequel une stratégie gagnante est possible : on tire deux pièces à pile ou face, le joueur mise sur l'arrivée simultanée de deux « pile ». Il a donc une chance sur quatre de gagner. Supposons qu'il mise un euro et s'il gagne, il continue à miser un euro. S'il perd il double sa mise. Imaginons qu'il perde 5 fois de suite. Il a misé 1, puis 2, puis 4, puis 8, puis 16 euros et il a toujours perdu. Il a donc perdu 1+2+4+8+16=31 euros. Il mise maintenant 32 euros : s'il gagne, il empochera 32 euros, compensant l'ensemble de ses pertes, plus un gain de un euro. S'il perd, il aura perdu 31+32=63 euros mais il misera alors 64 euros et la situation est identique à la précédente. Comme il finira bien par obtenir deux fois pile, il aura toujours l'assurance de ne rien perdre. C'est un exemple de stratégie gagnante s'il décide de s'arrêter après avoir gagné. Pourtant la situation est toujours défavorable au joueur : celui-ci misant m gagne en moyenne $m\times\frac{1}{4}=\frac{m}{4}$ et perd en moyenne $m\times\frac{3}{4}=\frac{3m}{4}$. Qu'est-ce qui « cloche » dans ce raisonnement ? Car un jeu défavorable *ne peut pas* avoir une assurance de gain certaine. On suppose la possibilité de joueur infinie (pas de limite dans le temps) et surtout on suppose les possibilités de parier du joueur infinies (pas de limite au capital initial du joueur) et aussi on suppose infinie la capacité à honorer un gain par la banque. Hors, toutes ces suppositions sont erronées. Le joueur ne peut joueur autant qu'il le veut, sa richesse et celle de la banque ne peuvent être infinies.

d) Jeu favorable (!)
Certains jeux sont favorable au joueur et cependant celui-ci hésite à y jouer. N'est-ce pas curieux. Imaginons que l'on joue à pile ou face jusqu'à obtenir un « pile ». Si cet événement arrive au bout de n tirages, la banque nous donne 2^n euros. Ce jeu est connu sous le nom de « jeu de Saint-Petersbourg ». Ce jeu est favorable au joueur quelque soit la somme demandée par la banque pour jouer. Imaginons que la banque demande 10 euros pour jouer à ce jeu, y joueriez-vous ? Montrons d'abord que ce jeu vous est favorable :
La chance d'obtenir « pile » au premier tirage est $\frac{1}{2}$ et le gain est alors de $2^1=2$ euros.
La chance d'obtenir « pile » au deuxième tirage est $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ et le gain est alors de $2^2=4$ euros.
La chance d'obtenir « pile » au troisième tirage est $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ et le gain est alors de $2^3=8$ euros.
Etc. la chance d'obtenir « pile » au $n^{\text{ième}}$ tirage est $\frac{1}{2^n}$ et le gain est alors de 2^n euros.
Vous allez forcément finir par obtenir « pile » et donc ce jeu est bien fini. Vous pouvez espérer gagner à ce jeu $2^1\times\frac{1}{2^1}+2^2\times\frac{1}{2^2}+2^3\times\frac{1}{2^3}+...=1+1+1+...$ Cette probabilité est théoriquement infinie, car rien n'assure que vous obtiendrez un « pile » en n coup, n étant très grand. Il reste toujours une probabilité très faible de l'obtenir en plus de n coups. Donc vous pouvez joueur à ce jeu. Vous perdrez, la plupart du temps, mais vous pouvez y gagner une somme importante. En y jouant tout le temps et en disposant de capitaux infinis vous êtes forcément gagnant. Mais le problème vient encore de l'impossibilité à chacun d'honorer cette stratégie : le joueur ne peut perdre plus d'une certaine somme et la banque aussi, elle ne peut honorer tous les gains possibles (en théorie infinis).

Un dernier exemple (le problème du chevalier de Méré) : nous sommes en 1654, l'écrivain Antoine Gombaud alias le chevalier de Méré, s'adresse à Pascal[2] approximativement en ces termes « lorsque l'on tire quatre fois un dé à 6 faces, obtenir au moins un 6 est un événement favorable, par contre il semblerait que lorsque l'on tire vingt-quatre fois deux dés à 6 faces, obtenir au moins un double 6 est un événement défavorable. Cette observation vous semble t-elle correcte ? »
Les deux observations du chevalier sont correctes. Pour la première, calculons la probabilité qu'en tirant quatre fois un dé, on n'obtienne aucun six est égale à $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5^4}{6^4}=\frac{625}{1296}\approx 0{,}48225$.
Donc la probabilité d'obtenir au moins un 6 vaut $1-\frac{625}{1296}\approx 0{,}5177$. Cet événement est bien favorable à celui qui parie dessus. Lorsqu'on tire vingt-quatre fois deux dés, on n'obtiendra aucun double six avec la probabilité $(\frac{35}{36})^{24}\approx 0{,}508586$ et donc la probabilité d'obtenir au moins un double 6 vaut $1-0{,}508586\approx 0{,}4914$. Cet événement est bien défavorable à celui qui parie dessus. Ce qui paraît étonnant au chevalier de Méré est que l'évènement « obtenir un double 6 en vingt-quatre tirages » semble être 6 fois la répétition de l'évènement « obtenir un 6 en quatre tirages » car 24=6×4. Il faut, encore une fois, se méfier de ce qui semble vrai, sans réelle certitude, et voir au-delà des apparences.

2 Blaise Pascal (1623-1662), philosophe, mathématicien, physicien et théologien célèbre entre autres pour son *pari* : « Examinons donc ce point et disons : Dieu est, ou il n'est pas. Mais de quel côté pencherons-nous ? La raison n'y peut rien déterminer. Il y a un chaos infini qui nous sépare. Il se joue un jeu, à l'extrémité de cette distance infinie, où il arrivera croix ou pile : que gagerez-vous ? [...] Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : *si vous gagnez, vous gagnez tout ; si vous perdez, vous ne perdez rien*. Gagez donc qu'il est sans hésiter ! »