Chapitre 7 : Configurations du plan et Trigonométrie

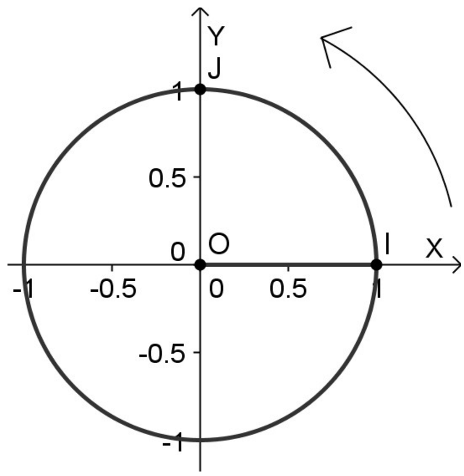
Configurations du plan Triangles, quadrilatères, cercles.	Pour résoudre des problèmes : • Utiliser les propriétés des triangles, des quadrilatères, des cercles. • Utiliser les propriétés des symétries axiale ou centrale.	Les activités des élèves prennent appui sur les propriétés étudiées au collège et peuvent s'enrichir des apports de la géométrie repérée. ◇ Le cadre de la géométrie repérée offre la possibilité de traduire numériquement des propriétés géométriques et permet de résoudre certains problèmes par la mise en œuvre d'algorithmes simples.
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	• On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.

La *trigonométrie* (étude des relations entre les mesures des côtés et celles des angles d'un triangle) a été abordée au collège avec, notamment, en 6ème la définition et la mesure d'un angle, en 5ème les propriétés relatives aux angles, en 4ème la définition du cosinus d'un angle et enfin, en 3ème celle du sinus et de la tangente. Le prolongement de cette étude que nous allons faire en seconde va conduire à la rattacher à l'étude des fonctions. *Sin, cos* et *tan* seront ainsi les *fonctions circulaires*, définies sur $\mathbb{R}$ et utilisant une nouvelle unité de mesure des angles (le *radian*).

1) Mesure d'un angle réel

a) Cercle trigonométrique

Orientation du plan : Pour parcourir un cercle (ou une droite), on a le choix entre deux sens de parcours. *Orienter* le plan c'est choisir un des sens de parcours comme sens *positif* ou *direct* (l'autre étant le sens négatif, indirect ou rétrograde). Le *sens trigonométrique*, traditionnellement choisi en trigonométrie, est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Orienter le plan dans le sens trigonométrique, c'est donc choisir ce sens comme sens positif. Dans la suite de ce cours, et pour toutes les utilisations futures des fonctions circulaires, nous orienterons le plan dans le sens trigonométrique.



Cercle trigonométrique : Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.

Lorsqu'on se donne un repère du plan (*O, I, J*), on obtient un cercle trigonométrique en traçant le cercle de centre *O* passant par *I* et utilisant comme sens positif de parcours, le sens de *I* vers *J* qui emprunte le petit arc de cercle $\widehat{IJ}$. En empruntant cet arc, on fait un quart de tour positif (+90°) autour du centre du cercle. Pour aller de *I* à *J* en empruntant l'autre arc de cercle $\widehat{IJ}$, le grand, on doit faire 3 quarts de tours dans le sens négatif (−270°).

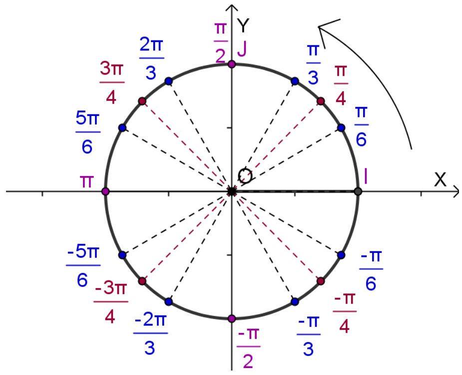
La *longueur* (périmètre) du cercle trigonométrique est 2π (car le rayon *R* vaut alors 1). Parcourir un quart du cercle trigonométrique dans le sens direct, c'est donc effectuer un parcours de longueur $+\frac{\pi}{2}$. Comme on peut parcourir le cercle dans un sens ou dans l'autre, cela va conduire à des mesures *relatives* de la longueur des parcours. On parle alors de mesures des arcs orientés. Ainsi pour aller de *I* vers *J*, on peut parcourir un arc de mesure $\frac{-3\pi}{2}$: on a alors parcouru le grand arc de cercle $\widehat{IJ}$ dans le sens rétrograde.

Un trajet sur le cercle peut dépasser la longueur d'un tour : un point peut tourner autant de fois que nécessaire autour du centre et parcourir un trajet de longueur supérieure à 2π, ou inférieure à −2π.
Par exemple, un point de la surface d'une toupie tournant à la vitesse de 10 tours par seconde, s'il est situé sur un cercle de rayon 1 *cm*, parcourt en 1 *s* un arc de longueur 20π *cm*, soit environ 62,8 *cm*.

b) Le radian

Pour mesurer les angles, l'unité traditionnelle est le *degré* (°). Les angles des figures géométriques (triangles, polygones, etc.) sont mesurés en degrés. Un tour complet mesure 360°, un angle droit 90° et un plat 180°, etc. On distingue les angles saillants (<180°) et les angles rentrants (>180°) mais tous les angles géométriques ont une mesure supérieure à 0° et inférieure à 360°.
D'autres unités de mesure des angles sont possibles pour les angles :

- Le *grade* : unité de mesure pratique, car un angle droit mesure 100 *gra* (on note aussi *gon* cette unité), mais inusitée aujourd'hui sauf peut-être dans quelques secteurs très spécialisés (les travaux topographiques et géodésiques, en France). Le grade est une invention de la révolution qui décimalisa tout ce que l'on peut mesurer. Le grade correspondant à $\frac{1}{400}$ ème de tour et le tour de la Terre mesurant environ 40 000 *km*, un parcours de 1 grade sur la surface terrestre mesure environ 100 *km*. Les cartes Michelin ont utilisé le grade jusqu'aux années 2000 puis sont revenues aux degrés, comme cela a été le cas un peu partout ailleurs. Rappelons que la mesure du temps aussi fut décimalisée par la révolution et ce fut également un échec total car l'usage des divisions traditionnelles du temps était trop bien ancré pour faire la place à un nouveau système, aussi rationnel qu'il puisse être. Les angles de 60° et 30° que l'on trouve dans un triangle équilatéral n'ont par ailleurs, pas une expression simple en grades car 200 n'est pas divisible par 3 comme 180 : $60° = \frac{60\times100}{90} = \frac{200}{3} \approx 66{,}67$ *gra* .
- Le *tour* : unité pratique aussi, qui conduit naturellement à envisager qu'on puisse faire plusieurs tours (donc plus de 360°), un demi-tour ou un quart de tour, dans un sens ou dans l'autre. Le tour est l'unité naturelle de mesure des angles réels (non liés spécifiquement aux figures géométriques) mais son utilisation reste très limitée, sans doute à cause de sa trop grande simplicité.



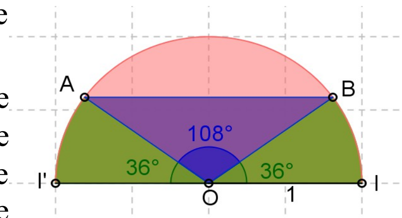
Définition : L'unité de mesure des angles choisie par le monde scientifique pour les angles réels est le *radian* (*rad*). Sa définition est liée à l'usage du cercle trigonométrique : *la mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique* (en plaçant le sommet de l'angle au centre du cercle).

On a vu qu'un angle droit (un quart du cercle trigonométrique dans le sens direct) correspond à une longueur d'arc égale à $\frac{\pi}{2}$. Un angle plat correspond à une longueur d'arc égale à π . On va assimiler ces longueurs d'arc à des mesures en radians de l'angle au centre du cercle trigonométrique. Il va y avoir *proportionnalité* entre les mesures des angles au centre exprimées en radians et les longueurs des arcs correspondants. On retiendra donc que π *rad*=180°, 2π *rad*=360° et $\frac{\pi}{2}$ *rad*=90° ou encore $\frac{\pi}{3}$ *rad*=60°. La figure ci-dessus donne les mesures des principaux angles au centre du cercle trigonométrique.

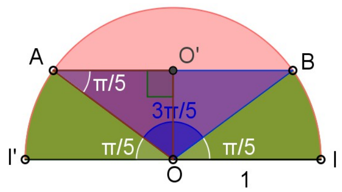
Conversions : Pour convertir des degrés en radians, on doit multiplier par $\frac{\pi}{180}$ et réciproquement, pour convertir des radians en degrés, on doit multiplier par $\frac{180}{\pi}$. Un angle de 1 *rad* correspond à un arc L égal au rayon R, ce qui, exprimé en degrés correspond à un angle de $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}29578$ °. Un angle droit mesure $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$ *rad* tandis que l'angle de 60° vaut $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472$ *rad*.

Propriété : Utiliser cette unité présente des avantages et des inconvénients (comme l'omniprésence du nombre π dans les mesures des angles habituels). Mais on retiendra surtout la simplification apportée au calcul de l'arc de cercle L intercepté par un angle de mesure α, au centre d'un cercle de rayon R : $L=\alpha R$.
L'aire S d'un secteur de disque d'angle α s'exprime simplement à partir du rayon R du disque : $S=\frac{\alpha R^2}{2}$.

Ainsi, lorsqu'on parcourt sur la Terre (R=6 400 *km*) un arc de 100 *km*, on tourne autour du centre d'un angle égal à $\frac{100}{6400}=\frac{1}{64}=0{,}015625$ *rad* et lorsqu'un satellite géostationnaire, à 36 000 *km* environ de la surface terrestre parcourt 100 *km*, il tourne d'un angle égal à $\frac{100}{(6400+36000)}=\frac{1}{424}\approx 0{,}0023585$ *rad*.
Remarque : Lorsqu'on utilisait les degrés pour mesurer les angles, le coefficient de proportionnalité entre L et R, au lieu d'être simplement α, était égal à $\frac{\pi\alpha}{180}$ ce qui était beaucoup moins commode.



La formule donnant l'aire S d'un secteur de disque d'angle α provient d'une simplification par π : $S=\frac{\alpha}{2\pi}\times(\pi R^2)=\frac{\alpha}{2}\times(R^2)=\frac{\alpha R^2}{2}$.
Appliquons cette formule à la situation suivante : OAB est un triangle isocèle de sommet O tel que $\widehat{AOB}=108°$. Nous voudrions déterminer si l'aire S de ce triangle est plus ou moins grande que l'aire de la portion du disque de centre O passant par A, limitée par la corde $[AB]$ (en rose sur notre illustration). Convertissons déjà l'angle $\widehat{AOB}$ en radians : $\widehat{AOB}=\frac{108\times\pi}{180}=\frac{3\times36\pi}{5\times36}=\frac{3\pi}{5}$. Les autres angles du triangle OAB, $\widehat{BAO}$ et $\widehat{ABO}$, valent donc chacun $\frac{\pi}{5}$ radians. D'après la formule, les petits secteurs du disque (en vert sur la figure), AOI' et BOI, ont des aires égales à la moitié de $\frac{\pi}{5}$, soit $\frac{\pi}{10}$. Le secteur restant du demi-disque, AOB, a une aire égale à la moitié de $\frac{3\pi}{5}$, soit $\frac{3\pi}{10}$.



L'aire du triangle AOB se calcule simplement en considérant le triangle rectangle $AO'O$ où O' est le milieu de $[AB]$: les petits côtés de ce triangle mesurent en effet $AO'=\cos\frac{\pi}{5}$ et $O'O=\sin\frac{\pi}{5}$, d'où une aire de $\frac{AO'\times O'O}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}\times\sin\frac{\pi}{5}}{2}$. Comme AOB est le double de $AO'O$, l'aire S de AOB vaut $\cos\frac{\pi}{5}\times\sin\frac{\pi}{5}$. Pour répondre à la question posée, S est-il plus ou moins grand que l'aire de la calotte rose ? Calculons l'aire S' de cette calotte : elle est égale à la différence entre $\frac{3\pi}{10}$ (le secteur de disque AOB) et S, donc vaut $S'=\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}\times\sin\frac{\pi}{5}$. Si $S<S'$ c'est que $2\cos\frac{\pi}{5}\times\sin\frac{\pi}{5}-\frac{3\pi}{10}<0$. Prenons notre calculatrice en mode radian, et calculons $2\cos\frac{\pi}{5}\times\sin\frac{\pi}{5}-\frac{3\pi}{10}\approx0{,}00857872$. Cette quantité étant positive, on en déduit que $S>S'$, l'aire bleue du triangle AOB est donc légèrement supérieure à celle de la calotte rose qu'il délimite dans le disque. L'écart calculé (0,00857872) représente environ 1,8% de l'aire de ce triangle (0,475528).

c) Mesure principale d'un angle

Des angles de mesure α ou α+2π ou α+4π ou … α−2π ou α−4π ou … correspondent tous à une même position sur le cercle trigonométrique. Ajouter ou retrancher un nombre entier de fois 2π à la mesure d'un angle en radians revient à tourner d'un nombre entier de tours autour du centre du cercle trigonométrique. Ainsi on ne change pas de place sur ce cercle. Tout angle réel correspond donc à un angle dont la mesure, la plus proche de 0 possible, se situe dans l'intervalle]−π ; +π]. On appelle *mesure principale* d'un angle, une telle mesure comprise entre −π et +π. Ceci va avoir une grande utilité lorsqu'on prendra le cosinus, le sinus ou la tangente d'un tel angle, car tout se ramènera alors à prendre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle de l'intervalle]−π ; +π].

La figure de la page précédente ne donnait que les mesures principales des principaux angles utilisés en trigonométrie. Voici à titre d'exemples, les mesures principales de quelques angles supérieurs à π :

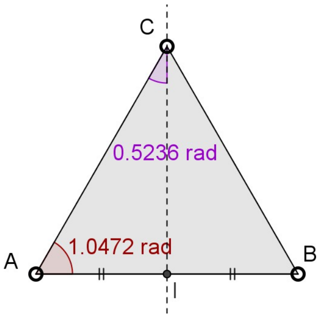
Mesures réelles	$\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$	$\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$	$2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$
Mesures principales	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

d) Valeurs remarquables des fonctions circulaires

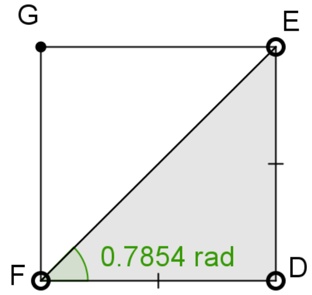
Au collège, on a montré qu'avec le théorème de Pythagore il était possible de calculer quelques valeurs particulières du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle géométrique. Rappelons ces valeurs ainsi que les figures géométriques sur lesquelles on a pu les calculer.

Angles α (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles α (degrés)	0	30	45	60	90
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0{,}866$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0{,}707$	$\frac{1}{2}$	0
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0{,}707$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx0{,}866$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx0{,}577$	1	$\sqrt{3}\approx1{,}732$	∞

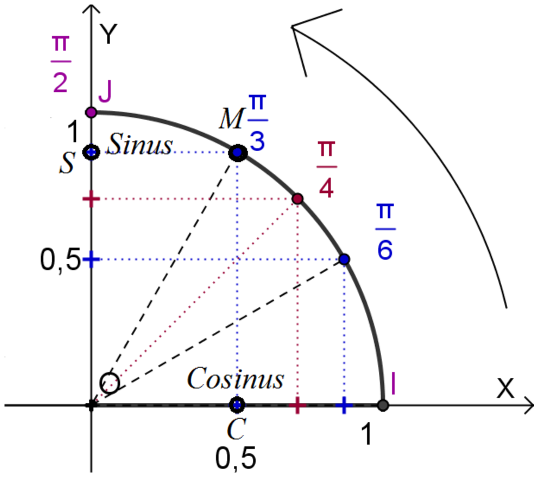
Dans le triangle équilatéral ABC, I étant le milieu de $[AB]$, on a :
$\widehat{IAC}=60°=\frac{\pi}{3} rad \approx 1,0475\, rad$
$\widehat{ACI}=30°=\frac{\pi}{6} rad \approx 0,5236\, rad$



Dans le triangle isocèle rectangle DEF, on a :
$\widehat{DFE}=45°=\frac{\pi}{4} rad \approx 0,7854\, rad$



Quart de cercle trigonométrique : ces quelques valeurs particulières peuvent être placées sur le cercle trigonométrique, dans la partie où les abscisses et les ordonnées sont positives (1^{er} cadran). Si on place un point M sur ce quart de cercle, de manière à avoir, par exemple, un angle $\widehat{IOM}=60°=\frac{\pi}{3} rad$, on voit que le cosinus de cet angle $\widehat{IOM}$ est l'abscisse du point M (0,5 pour cette valeur de l'angle) tandis que le sinus de cet angle est l'ordonnée du point M (environ 0,866 pour cette valeur de l'angle). Ceci est dû au choix du rayon du cercle trigonométrique : le rayon vaut 1 et ici, le rayon du cercle est l'hypoténuse du triangle rectangle que l'on considère. Avec les notations de la figure, le triangle MOC est rectangle en C, et $\cos\widehat{IOM}=\cos\widehat{COM}=\frac{OC}{OM}=\frac{OC}{1}=OC$ et, de même $\sin\widehat{IOM}=\sin\widehat{COM}=\frac{MC}{OM}=\frac{MC}{1}=MC=OS$.

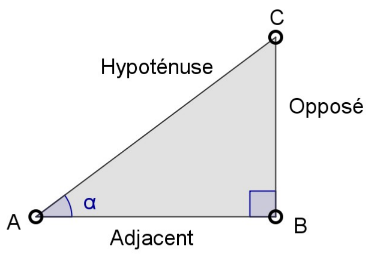


En effet, les cosinus, sinus et tangente d'un des angles géométriques aigus du triangle ABC rectangle en B, par exemple de l'angle $\widehat{A}$, ont été définis en $3^{ème}$ par les rapports :

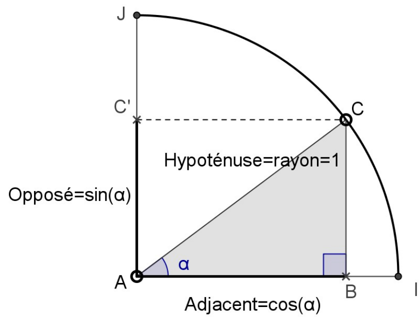
$$\cos\widehat{A}=\frac{\text{côté adjacent à }\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}\ ;\ \sin\widehat{A}=\frac{\text{côté opposé à }\widehat{A}}{\text{hypoténuse}}\ ;\ \tan\widehat{A}=\frac{\text{côté opposé à }\widehat{A}}{\text{côté adjacent à }\widehat{A}}$$

Formules que l'on mémorise facilement grâce au célèbre acronyme *CAHSOHTOA* qui retranscrit les formules précédentes synthétisées en

$$C=\frac{A}{H}\,;S=\frac{O}{H}\,;T=\frac{O}{A}.$$



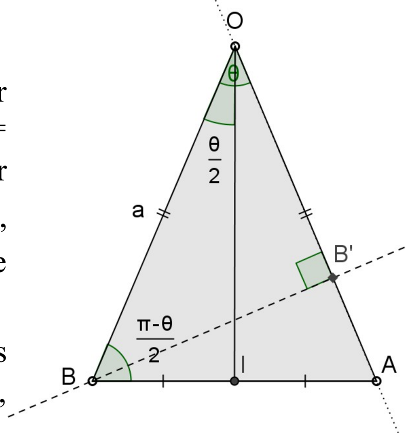
Ainsi, d'une manière générale, on retrouve le cosinus et le sinus de n'importe quel angle aigu $\widehat{A}$ en lisant les coordonnées du point C tel $\widehat{IAC}$ soit égal à cet angle, C étant le point du cercle orienté de centre A et de rayon $AC=1$. Dans le repère direct (A, I, J), le point C a, en effet, pour coordonnées $(\cos\widehat{A}\ ;\ \sin\widehat{A})$.



e) Applications en géométrie

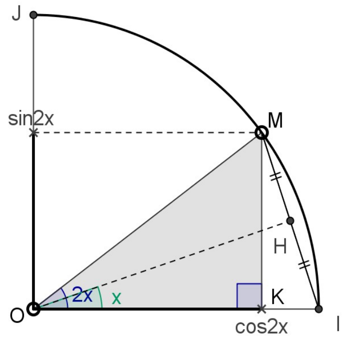
Au collège, on a appliqué ces formules à la résolution de quelques problèmes trigonométriques simples. Nous pouvons prolonger un peu cette étude fondamentale qui donna son nom à la discipline (trigonométrie : mesurer les triangles).

Exemple 1 : Formules de duplication du sinus et du cosinus.
OAB est un triangle isocèle de côté a, son angle principal est θ. La hauteur issue de B mesure $BB'=a\sin\theta$. L'aire S de triangle mesure donc $S=\frac{OA\times BB'}{2}=\frac{a^2\sin\theta}{2}$. D'un autre côté, I étant le milieu de $[AB]$, on peut calculer l'aire S avec la formule $S=\frac{AB\times OI}{2}=IB\times OI$. Or $OI=a\cos\frac{\theta}{2}$ et $IB=a\sin\frac{\theta}{2}$, donc $S=IB\times OI=a^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$. D'où la nouvelle formule, dite de *duplication du sinus* : $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{2}$ qui s'écrit aussi $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ ou encore, en prenant $\alpha=\frac{\theta}{2}$, $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$. Nous verrons plus loin, en utilisant les propriétés des fonctions circulaires, que cette formule,



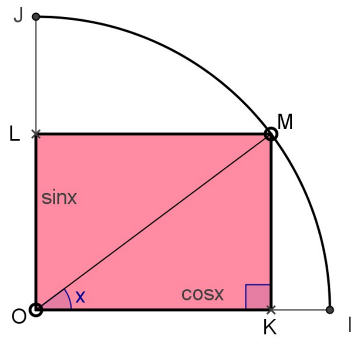
établie pour $\theta\in[0;\pi]$, ou pour $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, est en réalité valable sur tout l'ensemble des réels.

On peut déduire de la formule $\sin 2x=2\sin x\cos x$ une formule de duplication du cosinus. On sait par exemple que $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ est vrai pour tout x réel (voir plus loin), cela est donc vrai aussi pour $2x$ à la place de x : $(\cos 2x)^2+(\sin 2x)^2=1$ et l'on a alors :
$(\cos 2x)^2=1-(\sin 2x)^2=1^2-(2\sin x\cos x)^2=(1-2\sin x\cos x)(1+2\sin x\cos x)$.
Pour simplifier cela, remplaçons 1 par $(\cos x)^2+(\sin x)^2$. Il vient alors :
$(\cos 2x)^2=((\cos x)^2+(\sin x)^2-2\sin x\cos x)((\cos x)^2+(\sin x)^2+2\sin x\cos x)=(\cos x-\sin x)^2(\cos x+\sin x)^2$
et donc $(\cos 2x)^2=((\cos x)^2-(\sin x)^2)^2$. Pour $x\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$, on a $2x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\cos 2x\geq 0$ et $\cos x\geq\sin x$ et donc $\cos 2x=(\cos x)^2-(\sin x)^2$. Cette formule est valable, en fait, sur tout l'ensemble des réels et peut se transformer un peu, si on écrit :
$\cos 2x=(\cos x)^2+((\sin x)^2-(\sin x)^2)-(\sin x)^2=((\cos x)^2+(\sin x)^2)-(\sin x)^2-(\sin x)^2=1-2(\sin x)^2$

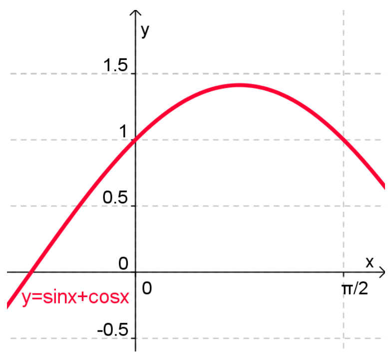


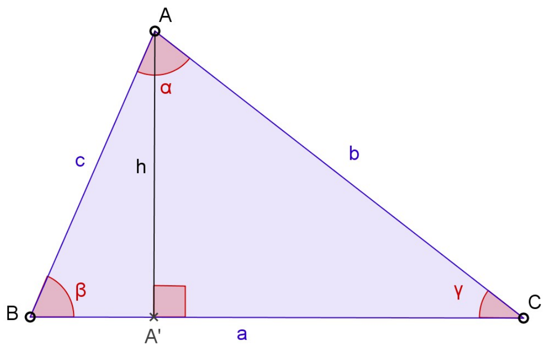
Une autre façon de montrer cette formule : prenons un point *M* du quart de cercle trigonométrique, correspondant à un angle $2x$. Calculons la distance MI^2 de 2 façons différentes :
Avec Pythagore dans le triangle *MIK, K* étant le pied de la hauteur issue de M dans le triangle *IOM*) : $MI^2=MK^2+KI^2=(\sin 2x)^2+(1-\cos 2x)^2$ et donc,
$MI^2=1-(\cos 2x)^2+1+(\cos 2x)^2-2\cos 2x=2-2\cos 2x$.
D'un autre côté, $MI=2HI$, *H* étant le milieu de [*MI*] et donc,
$MI^2=(2HI)^2=4HI^2=4(OI\sin x)^2=4(\sin x)^2$.
On a donc $2-2\cos 2x=4(\sin x)^2$ et, en simplifiant par 2 et en déplaçant les termes, $\cos 2x=1-2(\sin x)^2$ ce qui est la formule trouvée plus haut. Cette formule peut s'écrire de 3 façons différentes $\cos 2x=1-2(\sin x)^2$, $\cos 2x=(\cos x)^2-(\sin x)^2$ et $\cos 2x=2(\cos x)^2-1$.

À quoi servent ces formules de duplication ? Déjà à déterminer les lignes trigonométriques (les valeurs de *cos, sin* et *tan*) pour des angles égaux à la moitié ou au double d'angles dont on connaît déjà les lignes trigonométriques. Par exemple, sachant que $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, déterminons $\cos\frac{\pi}{8}$. La formule de duplication du cosinus nous dit que $\cos(\frac{\pi}{4})=2(\cos(\frac{\pi}{8}))^2-1$, donc $(\cos\frac{\pi}{8})^2=\frac{\cos\frac{\pi}{4}+1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$. Comme $\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{8}>0$ et donc $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. Pour le sinus, on peut se servir de la formule de duplication des sinus : $\sin\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$ et donc $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. On en déduit alors la tangente de cet angle de $\frac{\pi}{8}$ qui vaut $\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$



Un autre exemple d'utilisation de la formule de duplication des sinus : On cherche la position du point M sur le quart de cercle trigonométrique, pour que le périmètre du rectangle *OKML* soit maximum. Pour cela on va définir une fonction *f* telle que $f(x)$ soit égale au demi-périmètre de ce rectangle. Soit donc *f*, la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\sin x+\cos x$. Comme $\sin x\geq 0$ et $\cos x\geq 0$ sur cet intervalle, on en déduit que $f(x)\geq 0$. Montrons que *f* admet un maximum pour $x=\frac{\pi}{4}$.
$(f(x))^2=(\sin x+\cos x)^2=(\sin x)^2+(\cos x)^2+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$, mais nous venons de voir que $\sin 2x=2\sin x\cos x$ et donc $(f(x))^2=1+\sin 2x$. Comme on sait que la fonction sinus admet un maximum égal à 1 sur $[0;\pi]$ pour $x=\frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\sin 2x$ sera maximum pour $2x=\frac{\pi}{2}$, soit pour $x=\frac{\pi}{4}$. Il en va de même pour $1+\sin 2x=(f(x))^2$, et comme $f(x)\geq 0$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, il en va de même aussi pour $f(x)$. Conclusion : Le rectangle *OKML* a un périmètre maximal pour $x=\frac{\pi}{4}$, c'est alors un carré (voir la courbe de la fonction *f* ci-contre).





<u>Exemple 2</u> : Formules d'Al-Kashi

Cette formule généralise le théorème de Pythagore aux triangles quelconques. Soit ABC un triangle quelconque et A' le pied de la hauteur issue de A. On a :

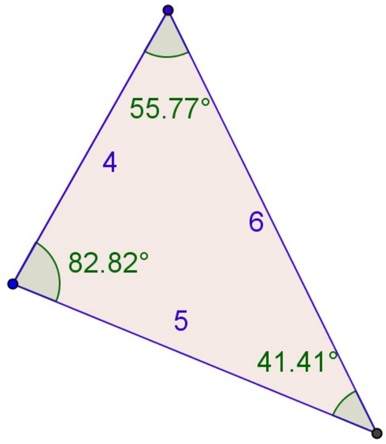
$BA'=c\cos\beta$ et $CA'=b\cos\gamma$, d'où

$a=BA'+CA'=c\cos\beta+b\cos\gamma$. De même on a

$b=c\cos\alpha+a\cos\gamma$ et $c=a\cos\beta+b\cos\alpha$.

Lorsque les côtés *a, b* et *c* du triangle *ABC* sont connus, on va pouvoir calculer ses angles. Les trois inconnues de notre système d'équations sont les cosinus des angles cherchés.

$$\begin{cases} \quad c\cos\beta + b\cos\gamma = a \\ c\cos\alpha \quad\quad\quad\quad + a\cos\gamma = b \\ b\cos\alpha + a\cos\beta \quad\quad\quad\quad = c \end{cases}$$



Pour résoudre ce système, on peut éliminer $\cos\alpha$ par la combinaison des deux dernières équations cL_2-bL_3 :

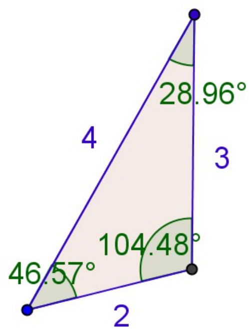
$b(c\cos\alpha+a\cos\gamma)-c(b\cos\alpha+a\cos\beta)=b^2-c^2$.

Il reste $a\,b\cos\gamma-a\,c\cos\beta=b^2-c^2$ que l'on soustrait à aL_1 pour éliminer $\cos\beta$: $a\,b\cos\gamma-a\,c\cos\beta-a(c\cos\beta+b\cos\gamma)=b^2-c^2-a^2$.

On obtient $-2\,a\,c\cos\beta=b^2-c^2-a^2$, soit $2\,a\,c\cos\beta=a^2-b^2+c^2$ ou encore $\cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$.

De même, on trouve : $\cos\alpha=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$ et $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Ces formules conduisent à la détermination des angles α, β et γ du triangle. Par exemple, si *a*=4, *b*=5 et *c*=6 alors on a $\cos\alpha=\frac{36+25-16}{60}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=\frac{36+16-25}{48}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}$ et $\cos\gamma=\frac{16+25-36}{40}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$. Les angles du triangle sont par conséquent $\alpha=\cos^{-1}(\frac{3}{4})\approx 41{,}40962211\,°$, $\beta=\cos^{-1}(\frac{9}{16})\approx 55{,}77113367\,°$ et $\gamma=\cos^{-1}(\frac{1}{8})\approx 82{,}81924422\,°$.

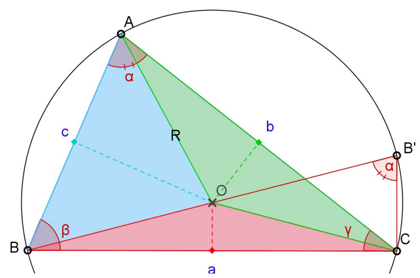


Ces formules fonctionnent aussi pour des angles supérieurs à 90° (triangles obtus). Par exemple, si *a*=2, *b*=3 et *c*=4 alors on a $\cos\alpha=\frac{16+9-4}{24}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$, $\cos\beta=\frac{16+4-9}{16}=\frac{11}{16}$ et $\cos\gamma=\frac{4+9-16}{12}=\frac{-3}{12}=\frac{-1}{4}$. Les angles du triangle sont donc $\alpha=\cos^{-1}(\frac{7}{8})\approx 28{,}955\,°$, $\beta=\cos^{-1}(\frac{11}{16})\approx 46{,}567\,°$ et $\gamma=\cos^{-1}(\frac{-1}{4})\approx 104{,}478\,°$.

On écrit généralement en ligne ces formules, ce qui nous rappelle mieux le théorème de Pythagore : $a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos\alpha$. En effet, si $\alpha=90\,°$, le triangle est rectangle en *A* et, comme $\cos 90\,°=0$, on retrouve $a^2=b^2+c^2$.

<u>Exemple 3</u> : Loi des sinus

Une autre série de formules est très utile en trigonométrie. Avec les notations de l'exemple précédent, calculons la hauteur *h* de 2 façons différentes : $h=AA'=AB\sin\beta=c\sin\beta$ et $h=AA'=AC\sin\gamma=b\sin\gamma$. De l'égalité $h=b\sin\gamma=c\sin\beta$ on tire $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ et, en procédant de la même façon pour une autre hauteur du triangle, on obtiendrait $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.



On peut compléter ces formules en calculant l'aire *S* du triangle *ABC* : $S=\frac{ah}{2}=\frac{ac\sin\beta}{2}$, relation qui, multipliée par $\frac{2}{abc}$ donne $\frac{2S}{abc}=\frac{2ac\sin\beta}{2abc}=\frac{\sin\beta}{b}$. Inversons cette égalité et l'on obtient $\frac{abc}{2S}=\frac{b}{\sin\beta}$.

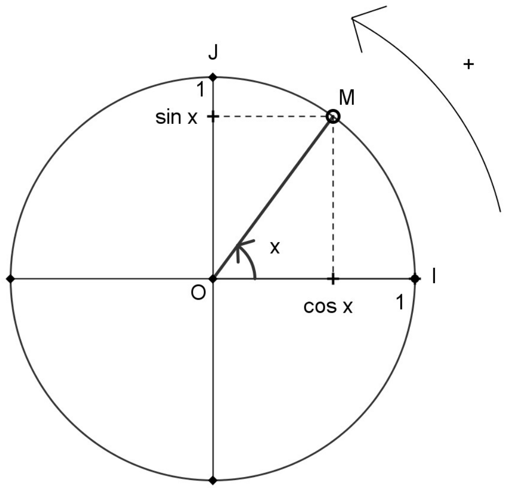
Une dernière égalité vient compléter cette série : on note *R* le rayon du cercle circonscrit au triangle *ABC* et *B*' le symétrique de *B* par rapport au centre *O* de ce cercle. Le segment [*BB*'] est un diamètre du cercle et donc *BB'C* est un triangle rectangle en *C*. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BB'C}$

interceptant le même arc de cercle $\widehat{BC}$, sont égaux et donc $\widehat{BB'C}=\alpha$. Alors on a $\sin\alpha=\frac{BC}{BB'}=\frac{a}{2R}$ et donc $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, ce qui vient compléter notre collection.
Résumons nous : $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{abc}{2S}=2R$. Les applications de cette loi des sinus sont innombrables bien sûr, et variées. Nous n'en citerons qu'une, très simple, ici. Si on a $\alpha=80°$, $\beta=50°$ et $a=4\ cm$, calculons b.
$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}$ et donc $b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{4\sin 50°}{\sin 80°}\approx 3{,}111447654\ cm$.

2) Les fonctions circulaires

a) Cosinus, sinus et tangente d'un angle réel

Pour un angle réel, on va définir le cosinus, le sinus et la tangente comme étant ceux de sa valeur principale, selon le principe que l'on vient de voir sur le quart de cercle trigonométrique.

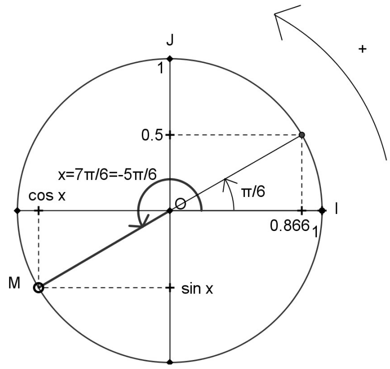


Définition : Dans le repère orthonormé direct (O, *I*, *J*), on appelle cosinus et sinus d'un angle réel x, et on note $\cos(x)$ et $\sin(x)$, les coordonnées du point M du cercle trigonométrique de centre O passant par I tel que la longueur de l'arc orienté $\widehat{IM}$ soit égale à x.

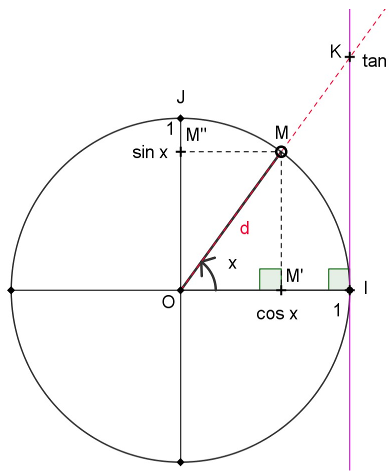
Cette définition permet d'étendre la notion du cosinus et du sinus d'un angle géométrique à un réel quelconque, noté x. Ce réel est, à la fois, la longueur de l'arc orienté $\widehat{IM}$ (exprimé dans l'unité de longueur où $OI=1$) et la valeur de l'angle réel $\widehat{IOM}$ mesuré en radians. La correspondance entre les mesures d'arcs sur le cercle trigonométrique et les mesures d'angles en radians est fondamentale si l'on veut pouvoir confondre les deux notions.

Notre notation de l'angle ($\widehat{IOM}$) est en toute rigueur incorrecte, car elle semble ne pas être orientée. Normalement, on devrait définir la notion d'*angle orienté de vecteurs* avec la notation qui va avec : en notant $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$ l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$, on pourra écrire l'égalité vectorielle qui traduit les coordonnées de M dans le repère orthonormé (*O, I, J*) :

$$\overrightarrow{OM}=\cos(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})\times\overrightarrow{OI}+\sin(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})\times\overrightarrow{OJ}$$

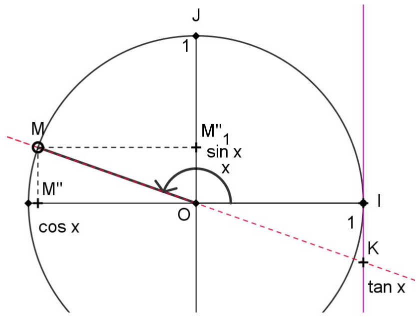


Exemple : Combien valent $\cos\frac{7\pi}{6}$ et $\sin\frac{7\pi}{6}$?
En plaçant cet angle de $\frac{7\pi}{6}$ *rad* sur le cercle trigonométrique, on s'aperçoit que $\frac{7\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\pi$ et donc cet angle correspond au même point du cercle que l'angle de $\frac{-5\pi}{6}$ *rad*, car $\frac{-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}-\pi$. Comme on l'a vu plus haut, $\frac{-5\pi}{6}$ est la mesure principale de l'angle de mesure $\frac{7\pi}{6}$. On constate en outre que $\frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{-5\pi}{6}$ sont des angles associés à une position symétrique par rapport à O de celle occupée par le point associé à l'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$. Les cosinus et sinus de ces angles seront donc opposés (la symétrie de centre O change les signes des deux coordonnées).
Ainsi, $\cos\frac{7\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\approx-0{,}866$ et $\sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-0{,}5$.



b) Tangente d'un angle réel

Définition : La tangente d'un angle réel est définie à partir de cette propriété de la tangente des angles aigus géométriques : $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Remarque : Ainsi, il y a une parfaite correspondance entre les deux notions, les angles aigus géométriques n'étant que la restriction des angles réels à l'intervalle [0 ; $\frac{\pi}{2}$].

<u>Représentation graphique de la tangente sur le cercle trigonométrique</u> : la demi-droite [*OM*) coupe la perpendiculaire à (*OI*) passant par *I* en un point *K* d'ordonnée tan(*x*).
En effet, comme *OI*=1, la tangente de l'angle *x* vaut $\frac{MM'}{OM'}$ et aussi, comme (*MM'*)//(*KI*), $\frac{KI}{OI}=\frac{KI}{1}=KI$, donc $\tan(x)=\frac{MM'}{OM'}=KI$.

Cette propriété reste valable pour toutes les valeurs réelles de l'angle *x*.
En particulier, lorsque *M* est en *J* ou en *J'* (le symétrique de *J* par rapport à *O*), Le point *K* n'est pas défini et la tangente non plus (elle vaut alors +∞ ou −∞). On peut déterminer les valeurs de l'angle réel *x* pour lesquelles la tangente n'est pas définie en résolvant l'équation $\cos x=0$. Dans l'intervalle [$-\pi$; π], cette équation a 2 solutions : $x=\pm\frac{\pi}{2}$, et on trouve les autres en ajoutant un nombre entier de fois 2π . On trouve donc comme valeurs : $-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{\pi}{2}+\pi;\frac{\pi}{2}+2\pi;-\frac{\pi}{2}+4\pi=\frac{\pi}{2}+3\pi;\frac{\pi}{2}+4\pi$; etc. soit $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. En d'autres termes, $\forall\ k\in\mathbb{Z}, \cos(\frac{\pi}{2}+k\pi)=0$ et donc $\tan(\frac{\pi}{2}+k\pi)$ n'est pas définie.

Lorsque le point *M* est dans le 2ème cadran (voir figure ci-contre), le sinus est positif et le cosinus négatif, si bien que la tangente est négative, ce que l'on retrouve bien sur le graphique puisque le point *K* a une ordonnée négative.

<u>Valeurs particulières</u> : de la même manière qu'on a déterminé le cosinus et le sinus de l'angle $\frac{7\pi}{6}$ dans l'exemple de la page précédente, et que l'on peut alors calculé la tangente de cet angle (tan $\frac{7\pi}{6}$ = $\frac{\sin\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6}}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$), on peut déterminer (avec des arguments de symétrie) les cosinus, sinus et tangentes des angles remarquables du cercle trigonométrique. Nous ne donnerons ici que les mesures principales de ces angles sachant nous y reporter dans n'importe quelle situation. Bien entendu, ces valeurs ne sont pas à retenir par cœur, mais il faut pouvoir les retrouver rapidement.

Angle α	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin(α)	$-0{,}5$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-0{,}5$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0{,}5$	0
cos(α)	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-0{,}5$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
tan(α)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

c) Propriétés des fonctions circulaires

<u>Ensembles de définition</u> : *sin* et *cos* sont définies sur $\mathbb{R}$ alors que *tan* n'est pas définie pour les valeurs de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi=(k+\frac{1}{2})\pi$, où *k* est un entier relatif. On peut, par conséquent, écrire l'ensemble de définition de *tan* avec la notation { $x\in\mathbb{R}/\forall\ k\in\mathbb{Z}, x\neq(k+\frac{1}{2})\pi$ }. Cet ensemble est la réunion d'intervalles de la forme] $(k-\frac{1}{2})\pi;(k+\frac{1}{2})\pi$ [où *k* prend n'importe quelle valeur entière (positive ou négative). Par exemple, pour *k*=0, *tan* est définie sur l'intervalle] $\frac{-\pi}{2};+\frac{\pi}{2}$ [.

<u>Périodicité</u> : *sin* et *cos* sont périodiques, de période 2π .
Autrement dit, $\forall\ x\in\mathbb{R}, \forall\ k\in\mathbb{Z}, \cos(x)=\cos(x+2k\pi) \text{ et } \sin(x)=\sin(x+2k\pi)$.
Ceci vient du fait que les angles $x+2k\pi$ correspondent au même point du cercle trigonométrique, par définition de celui-ci, quelque soit la valeur de l'entier relatif *k*. Ils ont donc même sinus et même cosinus.
La fonction *tan* est, quant à elle, également périodique, mais sa période est π et on peut donc écrire :
$\forall\ x\in\mathbb{R}, \forall\ k\in\mathbb{Z}, \tan(x)=\tan(x+k\pi)$.
Pourquoi ? $\tan(x+k\pi)=\frac{\sin(x+k\pi)}{\cos(x+k\pi)}$, or $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$ et $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$ (voir plus loin, les

angles associés). Donc si k est impair, on a $\tan(x+k\pi)=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$ et si k est pair, on a $\tan(x+k\pi)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$, donc dans tous les cas, $\tan(x+k\pi)=\tan(x)$. La période de *tan* est π .

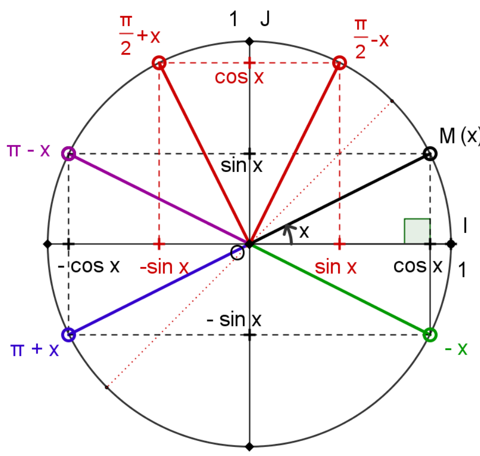
Extremums : *sin* et *cos* admettent des extremums qui sont 1 et -1 .
Autrement dit, $\forall\ x\in\mathbb{R}, -1\leq\cos x\leq 1 \text{ et } -1\leq\sin x\leq 1$. Ceci vient de la définition : tous les points du cercle trigonométrique sont à une distance égale à 1 de l'origine.
Par contre, la fonction *tan* n'admet aucun extremum : les images de toutes les valeurs de chacun des intervalles de définition de cette fonction $]\,(k-\frac{1}{2})\pi\,;(k+\frac{1}{2})\pi\,[$ décrivent, à chaque fois, tout $\mathbb{R}$.

Relations entre *cos, sin* et *tan* : Sachant que ($\cos x\,;\sin x$) sont les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique, on peut écrire la relation de Pythagore entre ces nombres : $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$ ce qui conduit aux relations $\cos x=\sqrt{1-(\sin x)^2}$ lorsque $\cos x\geq 0$ et $\cos x=-\sqrt{1-(\sin x)^2}$ lorsque $\cos x\leq 0$. De même, on peut écrire des égalités semblables pour sin x. Pour *tan*, on peut calculer $\frac{1}{\cos x^2}=\frac{\sin x^2+\cos x^2}{\cos x^2}=\frac{\sin x^2}{\cos x^2}+\frac{\cos x^2}{\cos x^2}=\tan x^2+1$. D'où cette relation qui peut être utile et qui est valable pour tout réel x : $\frac{1}{\cos x^2}=1+\tan x^2$

Sens de variation des fonctions *sin, cos* et *tan* : L'examen des coordonnées d'un point du cercle trigonométrique suffit à comprendre que *cos* est décroissante sur $[\,0\,;\pi\,]$ et, du fait de la périodicité, sur tout intervalle de la forme $[\,2k\pi\,;(2k+1)\pi\,]$. Elle est croissante sur les autres intervalles.
Par contre *sin* est décroissante sur $[\,\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\,]$ et, sur tout intervalle de la forme $[\,\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\,]$. Elle est croissante sur les autres intervalles.
La fonction *tan* est, quant à elle, croissante sur chacun de ses intervalles de définition.
Une preuve ? Le taux de variation de la fonction *tan* est égal à $\frac{\tan x_1-\tan x_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{\sin x_1}{\cos x_1}-\frac{\sin x_2}{\cos x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\sin x_1\cos x_2-\sin x_2\cos x_1}{\cos x_1\cos x_2(x_1-x_2)}$, et il faudrait en étudier le signe sur l'intervalle $]\,\frac{-\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\,[$ pour montrer que celui-ci ne change pas : il reste positif... nous ne pousserons pas plus loin ce raisonnement fastidieux et admettrons le résultat en attendant de pouvoir en donner une preuve plus aisément.

Signes : *sin* est positive sur l'intervalle $[\,0\,;\pi\,]$ et, du fait de la périodicité, sur tout intervalle de la forme $[\,2k\pi\,;(2k+1)\pi\,]$. Elle est négative sur tout le reste de l'ensemble des réels. *cos* est positive quant à elle, sur l'intervalle $[\,\frac{-\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\,]$ et, du fait de la périodicité, sur tout intervalle de la forme $[(2k-\frac{1}{2})\pi\,;(2k+\frac{1}{2})\pi]$. ta*n* est positive sur l'intervalle $[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,]$ et, du fait de la périodicité, sur tout intervalle de la forme [$[\,k\pi\,;(k+\frac{1}{2})\pi\,]$].

Angles associés : L'argument de symétrie par rapport au centre que nous avons développé pour déterminer le cosinus et le sinus de $\frac{7\pi}{6}$ peut être développé pour toute valeur réelle d'un angle x : l'angle associé correspondant à un point symétrique par rapport à l'origine O (le centre du cercle), de mesure $x+\pi$ ou $x-\pi$, est tel que l'on a :
$\cos(x+\pi)=\cos(x-\pi)=-\cos(x)$ et $\sin(x+\pi)=\sin(x-\pi)=-\sin(x)$.
Par voie de conséquence, et comme nous l'avons déjà signalé $\tan(x+\pi)=\tan(x-\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan(x)$, ce qui établit la périodicité de *tan*.



Une autre symétrie, par rapport à l'axe des abscisses cette fois, permet de déterminer le cosinus et le sinus de l'angle $-x$ associé à toute valeur réelle d'un angle *x*. Ainsi, on a $\cos(-x)=\cos(x)$, $\sin(-x)=-\sin(x)$ et, du fait, $\tan(-x)=-\tan(x)$.
Remarque : Cette propriété de la fonction cosinus, $\cos(-x)=\cos(x)$, s'appelle *parité.* Elle se traduit par une symétrie de sa courbe par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie d'axe (*OJ*), voir plus loin la courbe de *cos*). La fonction sinus n'est pas paire, au

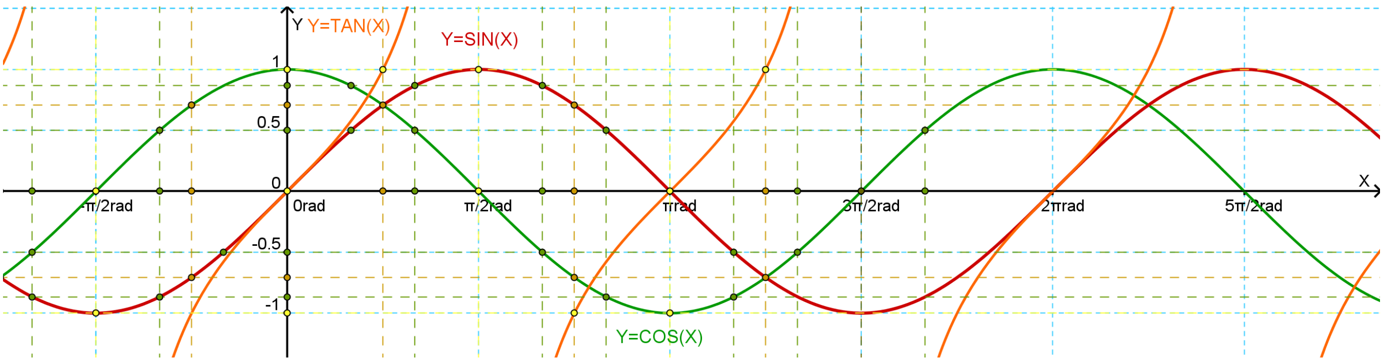
contraire, elle est impaire. L'*imparité*, qui vient de la propriété $\sin(-x)=-\sin(x)$, se traduit par une symétrie de sa courbe par rapport à l'origine (symétrie de centre *O*, voir plus loin la courbe de *sin*).

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se traduit par un angle $\pi-x$ associé à toute valeur réelle d'un angle *x*. Et l'on a $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$, $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ et, du fait, $\tan(\pi-x)=-\tan(x)$.

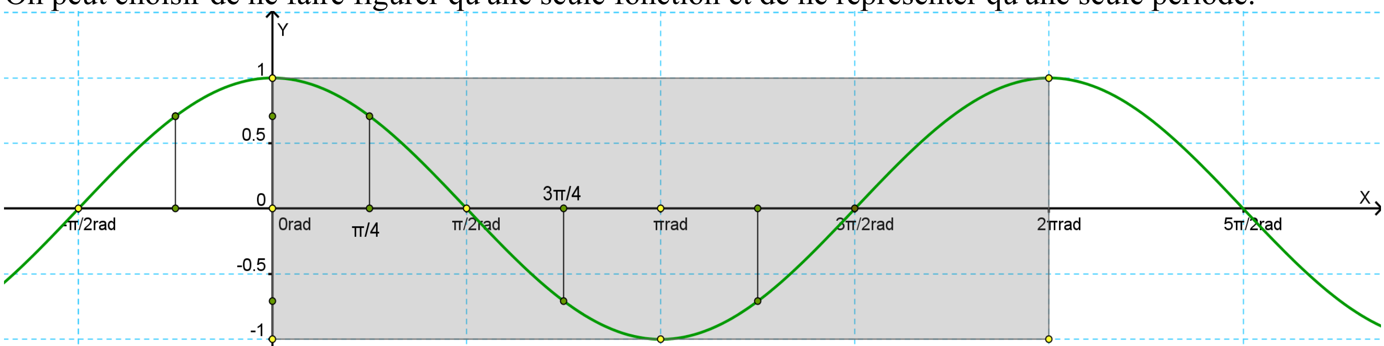
Une dernière symétrie, par rapport à la 1ère bissectrice des axes de coordonnées (la médiatrice de [*IJ*]), se traduit par un angle $\frac{\pi}{2}-x$ associé à toute valeur réelle d'un angle *x* et une interversion du sinus et du cosinus des angles associés (voir le cercle trigonométrique ci-contre où cet axe de symétrie est tracé en rouge). On a ainsi des formules qui permettent de relier ces angles : $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$ et, du fait, $\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{\tan(x)}$.

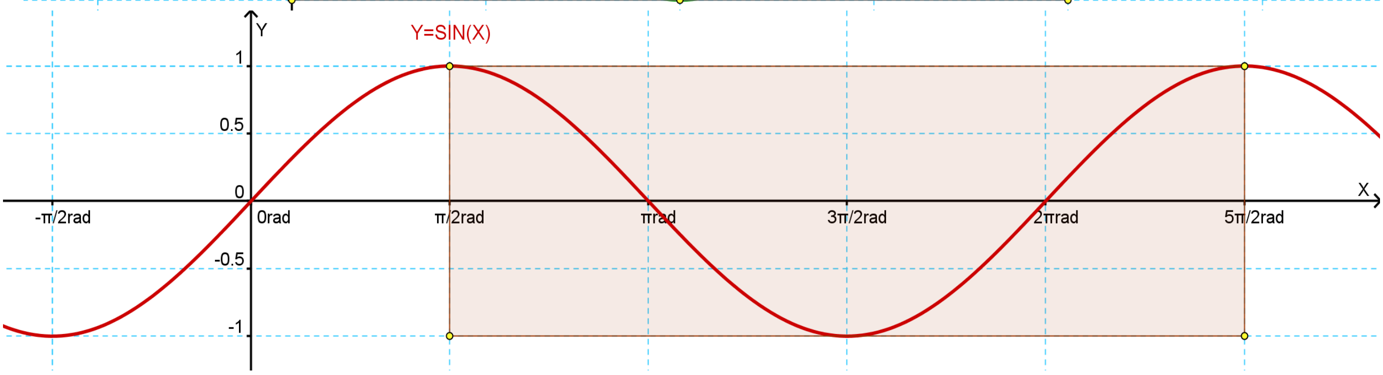
Une autre transformation du point *M*, une rotation d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct) se traduit par un angle $\frac{\pi}{2}+x$ associé à toute valeur réelle d'un angle *x* et des formules : $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$ et, du fait, $\tan(\frac{\pi}{2}+x)=\frac{-1}{\tan(x)}$.

<u>Représentations graphiques des fonctions circulaires</u> : Les courbes des fonctions *sin* et *cos* sont obtenues par translation l'une de l'autre : elles ont rigoureusement la même forme, mais sont décalées l'une par rapport à l'autre. Il y a un écart invariable égal à $\frac{\pi}{2}$ sur l'axe des abscisses, qui sépare les deux courbes et qui s'explique par la relation $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$. On peut tracer toutes les courbes sur un même graphique en y faisant figurer toutes les valeurs particulières que nous avons mentionné, mais le résultat est assez illisible car trop complexe.

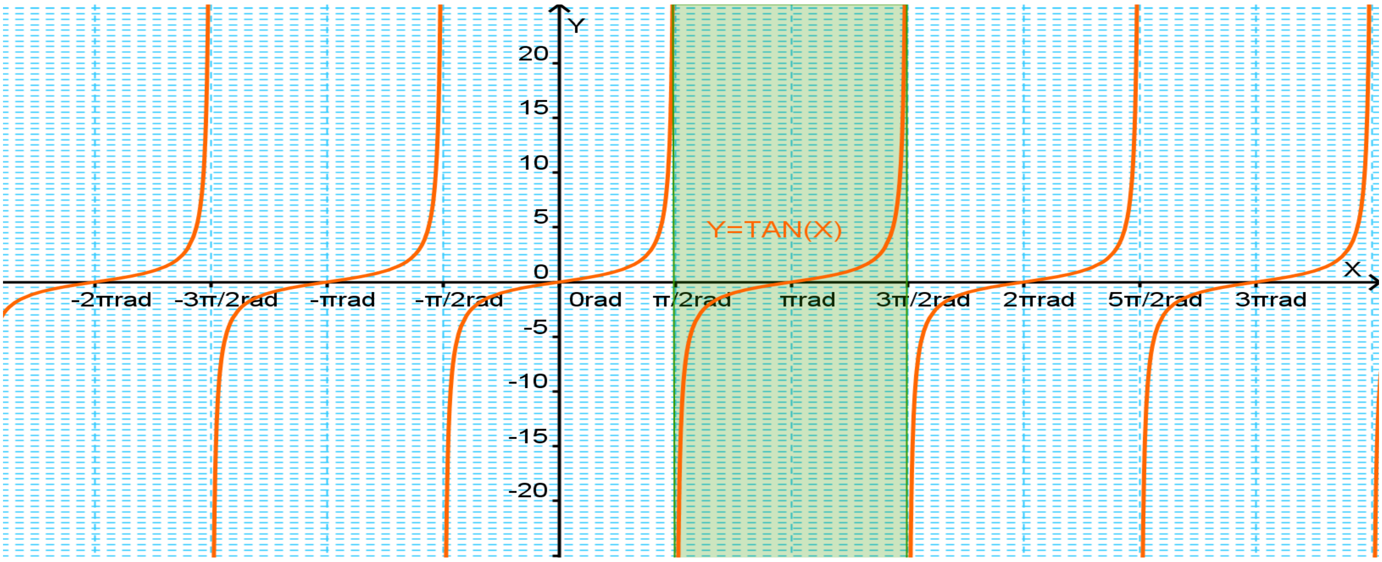


On peut choisir de ne faire figurer qu'une seule fonction et de ne représenter qu'une seule période.





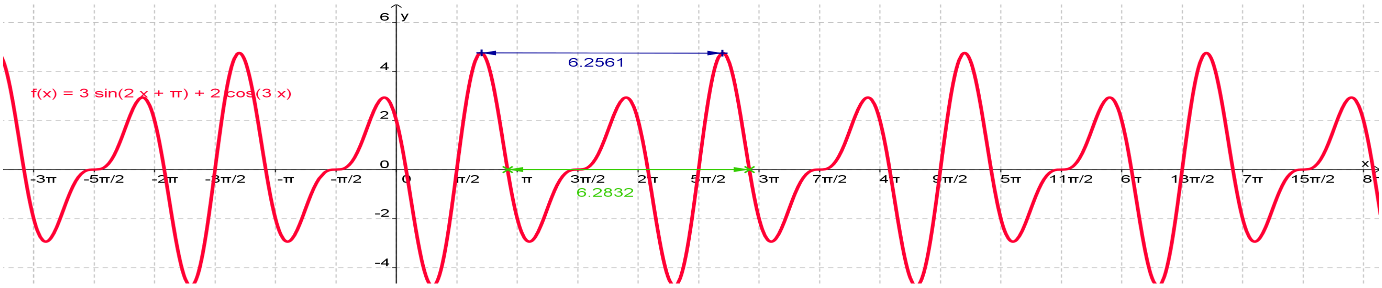
On peut choisir de ne pas faire figurer de valeurs particulières ce qui simplifie encore le graphique.
On peut enfin modifier l'échelle du graphique et même, modifier les unités sur les deux axes.



d) Applications : étude d'autres fonctions périodiques

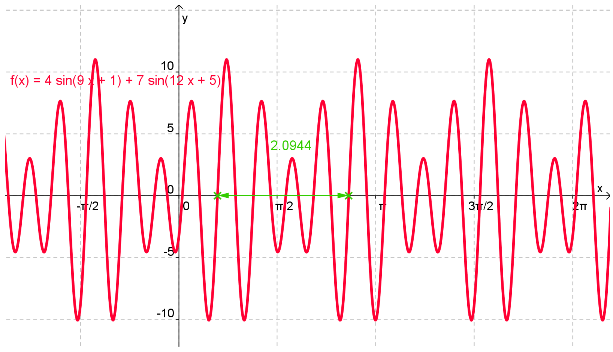
Exemple 1 : On a vu que pour $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ (formule de duplication des sinus). Montrons que cette formule est valable sur $\mathbb{R}$.
Pour cela montrons que la fonction $f\,:\,x \mapsto \sin 2x - 2\sin x \cos x$ est périodique, de période π.
$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) - 2\sin(x+\pi)\cos(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) - 2(-\sin(x))(-\cos(x))$, et donc
$f(x+\pi) = \sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x) = f(x)$.
Montrons maintenant que f est impaire, c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$.
$f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x)\cos(-x) = -\sin(2x) - 2(-\sin x \cos x) = -\sin(2x) + 2\sin x \cos x = -f(x)$
Nous connaissons déjà la valeur de $f(x)$ pour $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$, c'est $f(x) = 0$ (du fait de la formule).
L'imparité de f sur $\mathbb{R}$ nous assure que $f(x) = 0$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}\,;0]$.
Donc la formule est valable sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire un intervalle d'amplitude π. Mais comme la fonction est périodique, de période π justement, elle répète inlassablement la même valeur nulle sur tous les intervalles $[-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi]$, donc sur tout $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Comment déterminer par le calcul la période d'une fonction construite à partir des fonctions circulaires ? Par exemple, la fonction f définie par $f(x)=3\sin(2x+\pi)+2\cos(3x)$ illustrée ci-dessous par sa courbe, semble périodique. Pour déterminer la période graphiquement, il faut mesurer la différence entre les abscisses de 2 points particulier qui appartiennent à 2 motifs consécutifs (en bleu sur le graphique). Ici, la valeur approximative entre 2 pics, donnée par GeoGebra, est de 6,2561 : cela ressemble à 2π. Mais est-ce 2π vraiment, car les points correspondant aux maximums ont été placés manuellement ? On peut affiner l'évaluation de cette période en construisant des points d'intersection, par exemple avec l 'axe des abscisses (en vert sur le graphique). Dans ce cas, on trouve 6,2832 qui est très exactement la valeur approchée à 10^{-4} près la plus proche de 2π.

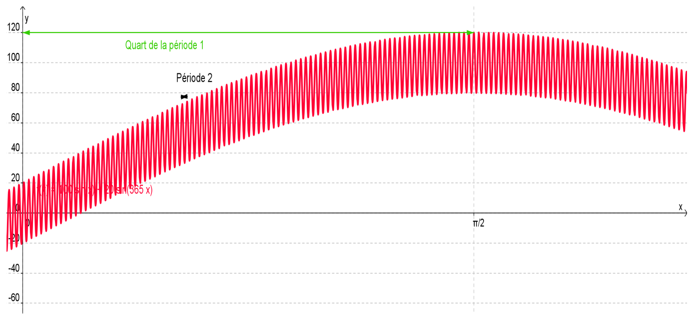


Vérifions par le calcul :
$f(x+2\pi) = 3\sin(2(x+2\pi)+\pi) + 2\cos(3(x+2\pi)) = 3\sin(2x+5\pi) + 2\cos(3x+6\pi) = f(x)$. On utilise pour se faire la périodicité des fonctions circulaires de référence. Au passage, la définition de f peut être

simplifiée en $f(x)=2\cos(3\,x)-3\sin(2\,x)$.
D'une façon plus générale, quelle est la période d'une fonction f définie par $f(x)=\sin(ax+b)$ où a et b sont des nombres réels quelconques mais indépendants de x ? Cette question est fondamentale en électricité ou dans tous les domaines de la physique où l'on étudie la propagation des ondes. On parle en physique de b comme étant la phase à l'origine (notée souvent φ) et de a comme étant la pulsation de l'onde (notée souvent ω), x étant bien sûr le temps (noté souvent t). La réponse est simple : la période de cette fonction f (on dit signal) est égale à $\frac{2\pi}{a}$.
Calculons, en effet $f\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)=\sin\left(a\left(\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)\right)+b\right)=\sin(a\,x+2\pi+b)=\sin(a\,x+b)$.
Pourquoi la fonction définie par $f(x)=2\cos(3x)-3\sin(2x)$ a t-elle une période de 2π ? Parce qu'en ajoutant 3 périodes égales à $\frac{2\pi}{3}$ et 2 périodes égales à $\frac{2\pi}{2}=\pi$, on revient au point de départ. De la même façon la fonction g définie par $g(x)=\cos(5x)+\sin(7x)$ aura une période de 2π (car 5 et 7 sont premiers entre eux).



Par contre, si on cherche la période de la fonction h définie par $h(x)=4\cos(9x+1)+7\sin(12x+5)$, il faut déterminer le plus petit multiple commun à $\frac{2\pi}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}$. Ce multiple commun est $3\times\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$, la période de cette fonction h est donc égale à $\frac{2\pi}{3}$. Voici une évaluation de cette période par GeoGebra : 2,0944 alors que $\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}094395102$ (valeur donnée par ma calculatrice).



Ce n'est pas notre propos d'aller beaucoup plus loin ici, mais, juste pour le plaisir, observons le graphe d'une fonction formée de 2 ondulations, l'une de courte période et l'autre de grande période. Ici, nous avons pris une fonction f définie par $f(x)=100\sin(x)+20\sin(365x)$, comme si il y avait une variation annuelle à laquelle s'additionne une variation quotidienne. Ceci pourrait servir de modèle à une modélisation d'un phénomène tel que l'évolution de la température extérieure : le cycle annuel correspond à l'alternance des saisons (période 1 = 1 an) alors que le cycle quotidien correspond à l'alternance des jours et des nuits (période 2 = 1 jour).

Comme il reste un peu de place dans la page, voici une courbe d'un genre nouveau il s'agit d'une courbe de Lissajou. Les coordonnées des points de cette courbe vérifient une simple définition utilisant le sinus : $x(t)=\sin 12t$; $y(t)=\sin 11t$. Ce n'est pas plus compliqué que cela et le résultat est visible à droite (courbe tracée avec Xcas). Il y a beaucoup d'autres variété de courbes de Lissajou, ne serait-ce que celles contenant les points de coordonnées $x(t)=\sin(pt)$; $y(t)=\sin(qt+\varphi)$ lorsqu'on fait varier les coefficients p et q dans l'ensemble des entiers ainsi que le déphasage φ. Pour $p=2$, $q=3$ et $\varphi=0$, on trouve ce beau nœud à gauche et si p=q et $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on trouve … un cercle! Et oui, c'est la définition des points du cercle trigonométrique lorsque t varie dans l'intervalle [0 ; 2π] : $x(t)=\sin t$; $y(t)=\cos t$.