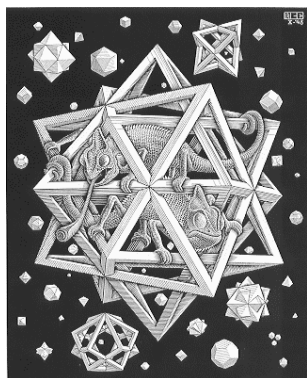


Chapitre 6 : Espace

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Géométrie dans l'espace Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère. Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.	<ul style="list-style-type: none"> Manipuler, construire, représenter en perspective des solides. 	C'est l'occasion d'effectuer des calculs de longueur, d'aire et de volumes. On entraîne les élèves à l'utilisation autonome d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

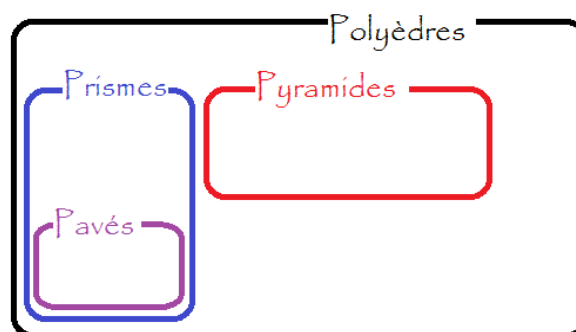
I] Solides de référence

Au collège, on a étudié les parallélépipèdes rectangles (en 6^{ème}), les prismes et les cylindres (en 5^{ème}), les pyramides et les cônes (en 4^{ème}) et la sphère (en 3^{ème}). Dans cette partie, nous rappelons les principales caractéristiques de ces formes élémentaires de l'espace, en les regroupant en 2 catégories : les polyèdres (parallélépipèdes rectangles, prismes, pyramides) et les solides de révolution (cylindres, cônes, sphères).

a) Polyèdres

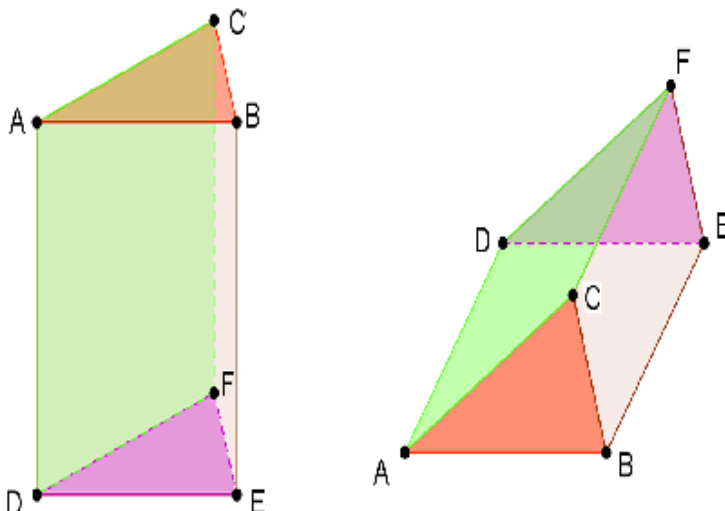
Les polyèdres sont des solides limités par des faces planes polygonales. Les jonctions entre 2 faces adjacentes sont des segments appelés arêtes. Les arêtes se rencontrent, quant à elles, en des points appelés sommets. Les polyèdres étudiés

au collège ne sont qu'une toute petite partie, mais une partie essentielle, de ce vaste ensemble de formes dont on peut se représenter la structure par un schéma tel que celui qui est dessiné à droite.



Les **prismes droits** sont des solides ayant 2 faces parallèles et superposables (les bases), et des faces rectangulaires (les faces latérales) qui joignent les arêtes correspondantes des 2 bases. Les arêtes latérales (celles qui n'appartiennent pas aux bases) ont toute la même longueur et sont perpendiculaires aux bases ; on les appelle les hauteurs du prisme.

Exemple : Ci-dessous est représenté un prisme à base triangulaire ABCDEF, posé sur une de ses bases (la face DEF) à gauche. Les 2 faces triangulaires sont des triangles superposables (c'est-à-dire de même dimension). Les 3 autres faces sont des rectangles, bien qu'une seule puisse être représentée comme telle en perspective (la face ABED). La vue de droite montre le même prisme posé sur cette face latérale.



Remarque : les prismes droits sont un cas particulier de prisme. Dans un prisme quelconque (on dit aussi oblique pour préciser qu'il n'est pas droit), les faces latérales sont des parallélogrammes. Une hauteur d'un prisme quelconque est un segment qui joint les 2 bases perpendiculairement à celles-ci et qui ne peut pas être une arête latérale si le prisme est oblique.

Cas particulier : Lorsque la base d'un

prisme droit est un rectangle, on parle de parallélépipède rectangle (aussi appelé pavé droit ou simplement pavé). Dans ce cas, chaque paire de faces rectangulaires (il y en a de 3 sortes) peut servir de base. Le cube est donc un parallélépipède rectangle, un prisme et un polyèdre à la fois.

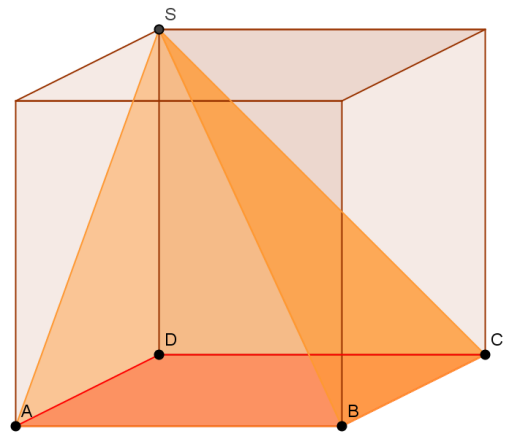
Le volume d'un prisme droit se calcule avec la formule : **volume = base × hauteur**, où « base » désigne l'aire de la base et « hauteur » la longueur d'une hauteur du prisme.

Remarque : Si le prisme a une base triangulaire, son aire vaut **base = $b \times h \div 2$** , où « b » désigne la longueur d'un des côtés de la base et « h » la hauteur correspondant à ce côté. Attention donc à ne pas mélanger base du prisme (une aire) et base du triangle (un côté)! Pour les distinguer nous noterons B la base du prisme et H sa hauteur alors que b et h seront la base et la hauteur d'un triangle.

Une **pyramide** est un solide ayant une base polygonale et des faces latérales triangulaires qui partent de la base et se rejoignent en un point commun appelé le sommet de la pyramide ou *apex*. Le segment qui joint le sommet à la base, perpendiculairement à celle-ci, est appelée hauteur de la pyramide.

Exemple : La pyramide ABCDS de base carrée ABCD a pour sommet S. On pourrait la nommer aussi bien SABCD, la base restant le carré ABCD (c'est le seul polygone qui ne soit pas un triangle). Les faces latérales sont les triangles SAB, SBC, SCD et SDA qui contiennent toutes le sommet S. Ces faces ont une arête en commun avec la base et deux arêtes latérales qu'elles partagent avec les faces adjacentes.

Dans le cas particulier de notre pyramide SABCD, inscrite dans un cube, on voit que la hauteur est une des arêtes latérale : l'arête [SD] qui est perpendiculaire à la base. Pour être perpendiculaire à un plan, une droite doit être perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan, et c'est bien le cas ici, puisque (SD) est perpendiculaire à (AD) et à (DC).



Cas particulier : Une pyramide est **régulière** si sa base est un polygone régulier (inscriptible dans un cercle, avec des côtés et des angles égaux) et ses faces sont des triangles isocèles superposables. La hauteur d'une pyramide régulière passe par le centre de symétrie de la base. Cette hauteur est également un axe de rotation de la pyramide autour duquel elle peut tourner

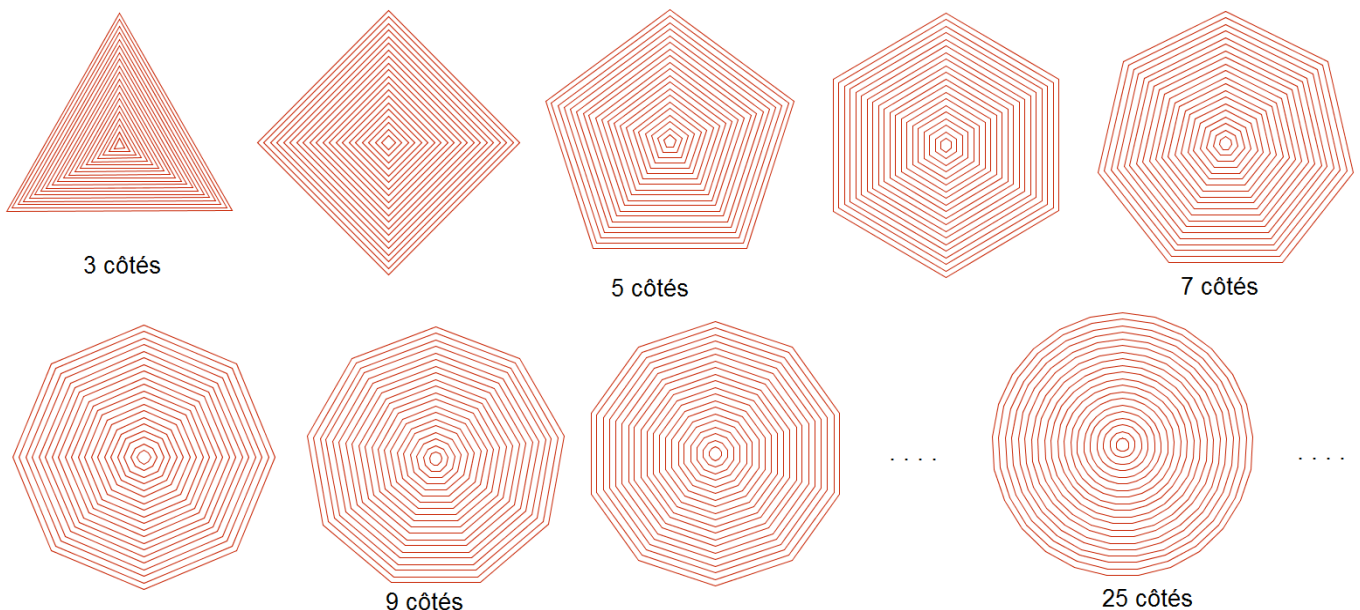
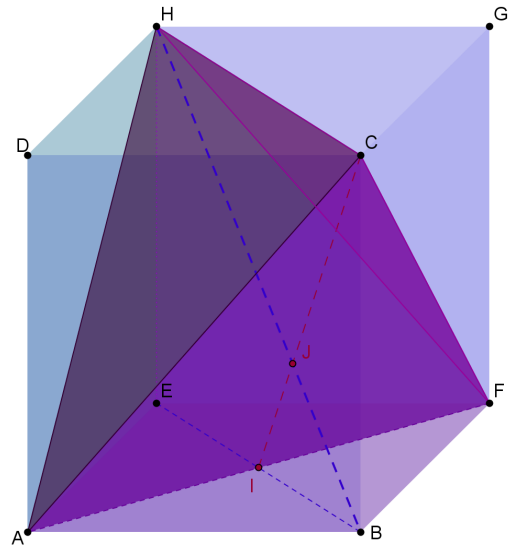


Illustration 1: Pyramides régulières vues par le dessus, représentées comme des empilements de polygones semblables et concentriques.

d'une fraction de tour pour se superposer à elle-même, les points de la base étant alors permutés. Les pyramides d'Égypte ou celle du Louvre à Paris sont des pyramides régulières à base carrée.

Un autre cas particulier mérite d'être mentionné : le **tétraèdre** est une pyramide à base triangulaire (*tetra* en grec signifie 4, les tétraèdres n'ont en effet que 4 faces). Un tétraèdre n'ayant que des faces triangulaires, chacune peut être appelée « base » de la pyramide (les 3 autres étant alors les faces latérales). Parmi les tétraèdres, certains sont des pyramides régulières (leur base principale est alors un triangle équilatéral et leurs faces latérales sont des triangles isocèles superposables) et parmi ceux-ci on trouve le « tétraèdre régulier » dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Le tétraèdre régulier est une forme très remarquable à plus d'un titre, ne serait-ce que par sa symétrie, et se range auprès du cube parmi les 5 *solides de Platon* (polyèdres constitués de faces polygonales régulières identiques), les 3 autres étant l'octaèdre (8 triangles), le dodécaèdre (12 pentagones) et l'icosaèdre (20 triangles).

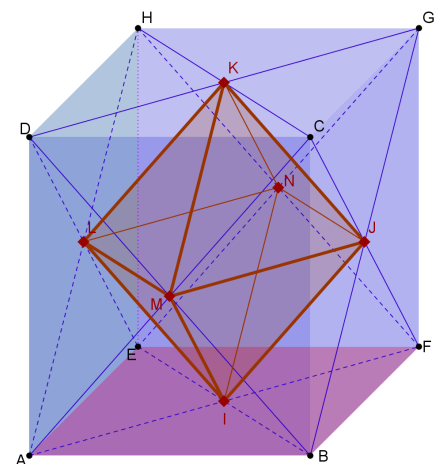


Le volume d'une pyramide est égal au tiers de celui du prisme qui aurait même base et même hauteur qu'elle. Autrement dit, le volume d'une pyramide de base B et de hauteur H est égal à $V = \frac{B \times H}{3}$. Dans le cas d'un tétraèdre, la base étant un triangle de « base » b et de hauteur h , la formule devient $V = \frac{b \times h \times H}{6}$.

Dans le cas du tétraèdre régulier, la base B , la hauteur H de la pyramide et la hauteur h d'une face dépendent du côté c du tétraèdre. On obtient pour le volume du tétraèdre régulier de côté c $V = \frac{\sqrt{2} \times c^3}{12}$ (cette dernière formule n'est évidemment pas à retenir par cœur). Le plus simple pour arriver à ce résultat est de partir du volume d'un cube contenant le tétraèdre comme sur l'illustration du haut : il suffit d'y enlever 4 pyramides telles que $ACDH$ qui ont un volume égal à $V' = \frac{a^3}{6}$ (leur base est un triangle rectangle isocèle de a de côté et leur hauteur mesure aussi a).

Le théorème de Pythagore nous indique que $2a^2 = c^2$. On obtient $a = \frac{\sqrt{2} \times c}{2}$ et donc $V' = \frac{(\frac{\sqrt{2} \times c}{2})^3}{6} = \frac{\sqrt{2} \times c^3}{24}$, le volume du cube étant $V_{cube} = a^3 = \frac{\sqrt{2} \times c^3}{4}$. Le volume du tétraèdre vaut donc $V = V_{cube} - 4V' = \frac{\sqrt{2} \times c^3}{4} (1 - \frac{4}{6}) = \frac{\sqrt{2} \times c^3}{12}$. On peut aussi calculer la base B et la hauteur H du tétraèdre en fonction de sa base c et de sa hauteur h ...

Parmi les autres polyèdres (non étudiés au collège), nous avons cité l'octaèdre qui est un solide de Platon constitué de 8 triangles équilatéraux. Ce solide peut être construit en joignant les 6 centres des faces adjacentes d'un cube (voir figure ci-contre). On peut aussi voir l'octaèdre régulier comme 2 pyramides régulières à bases carrées, dont les faces sont des triangles équilatéraux et qui sont accolées par leurs bases. Ainsi $IJKL$ sur notre figure est un carré qui est la base commune des pyramides $IJKLM$ et $IJKLN$ qui, accolées par cette base commune, forment un octaèdre régulier. On montre facilement que le volume d'un tel octaèdre de côté c est $V = \frac{\sqrt{2} \times c^3}{3}$.



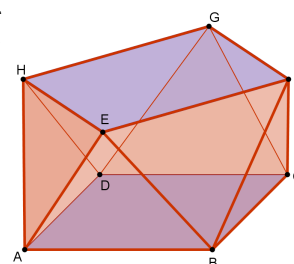
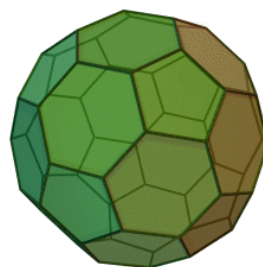
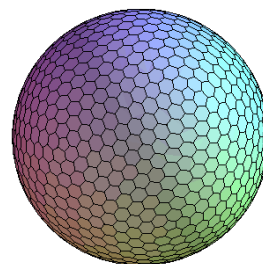
Les polyèdres convexes (on peut joindre 2 points quelconque de leur surface sans jamais quitter l'intérieur du solide) possèdent une propriété très remarquable, car elle est vraie pour tous et relie des nombres de dimensions différentes. Cette relation de Descartes-Euler relie en effet le nombre F de faces, le nombre A d'arêtes et le nombre S de sommets : **$A+2=S+F$** .

Considérons quelques polyèdres sous l'angle de cette propriété :

	S	A	F	S+F-A
Cube	8	12	6	2
Tétraèdre	4	6	4	2
Octaèdre	6	12	8	2
Prisme triangulaire	6	9	5	2

Cette propriété permet d'expliquer pourquoi il est impossible de réaliser une géode (polyèdre inscrit dans une sphère) avec uniquement des hexagones, même irréguliers. Sur l'illustration ci-contre, certains hexagones ont été remplacés par des pentagones (à chaque remplacement d'un hexagone par un pentagone, le nombre d'arête diminue de $\frac{1}{2}$ et le nombre de sommet diminue de $\frac{1}{3}$). La forme polyédrique du ballon de football, l'icosaèdre tronqué, est un autre exemple de géode pseudo-hexagonale où 12 hexagones ont été remplacés par des pentagones. Ce polyèdre comporte 32 faces dont 20 hexagones réguliers et 12 pentagones réguliers. Chaque sommet étant semblable aux autres, il fait partie de la catégorie des solides d'Archimède qui contient aussi, entre autres, le cuboctaèdre (14 faces dont 6 carrés et 8 triangles). Nous avons emprunté ces belles [illustrations dynamiques](#) qui donnent le tournis, au site Wikipédia que nous vous invitons à consulter, entre autres, sur ce sujet.

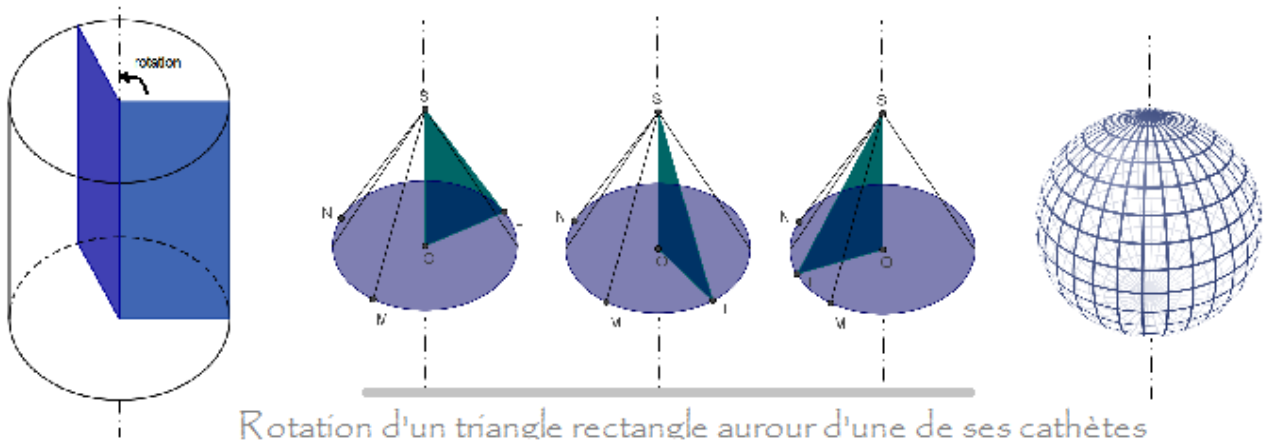
Pour terminer cette revue non exhaustive des polyèdres, citons tout de même les antiprismes qui ressemblent aux prismes, sauf que leurs faces latérales sont des triangles disposés en quinconce : un des côtés d'une base est joint à un des sommets de l'autre base, alternativement. L'octaèdre peut ainsi être considéré comme un antiprisme à base triangulaire qui est donc l'antiprisme ayant le moins de faces possible. Ci-contre nous avons représenté un antiprisme à base carrée où on voit bien que les 2 bases ne sont pas disposées comme dans un prisme (les arêtes correspondantes parallèles) : ici une arête correspond à un sommet et réciproquement. Si on dispose une pyramide à base carrée sur chacune des faces carrées d'un tel antiprisme, on se retrouve avec un très beau deltaèdre (polyèdre dont les faces sont des triangles) à 16 faces : la bipyramide carrée gyroallongée (aussi appelée hexadécadeltaèdre), et si on fait de même avec un antiprisme à base pentagonale, on se retrouve avec l'icosaèdre, un autre deltaèdre, dont la forme régulière est le solide de Platon déjà cité.



b) Solides de révolution

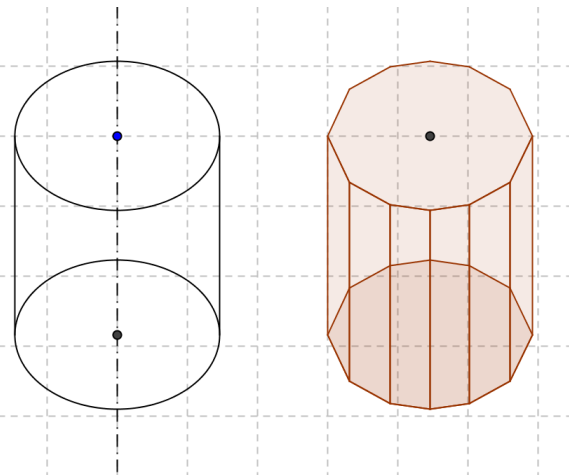
Un solide est dit *de révolution* lorsqu'il peut être engendré par la rotation (on dit aussi la révolution, comme la révolution de la Terre autour du Soleil) d'une forme plane autour d'un axe. Lorsqu'on fait tourner un triangle rectangle autour d'une de ses cathètes (les 2 petits côtés du triangle rectangle, par opposition à l'hypoténuse qui est le grand côté), l'hypoténuse décrit la surface latérale d'un cône droit (aussi appelé cône de révolution) et l'autre cathète décrit la base du cône. Lorsqu'on fait tourner un rectangle autour d'un de ses côtés, les autres côtés décrivent la surface d'un cylindre droit (aussi appelé cylindre de révolution). Bien sûr, on peut considérer aussi que le cône est engendré par la rotation d'un triangle isocèle autour de son axe de

symétrie, et de même, la rotation d'un rectangle autour d'un de ses axes engendre le cylindre. Lorsqu'on c'est un disque que l'on fait tourner autour d'un de ses axes (un de ses diamètres), la circonférence du disque décrit une sphère. L'illustration ci-dessous montre ces 3 solides de révolution étudiés au collège.



Le **cylindre de révolution** est un solide possédant deux bases circulaires de même taille, situées parallèlement, l'une au-dessus de l'autre. Une seule face latérale courbe rejoint les arêtes circulaires des bases. Les centres des 2 bases sont situés sur l'axe de symétrie du solide qui est perpendiculaire aux bases. Le segment qui joint ces 2 points est appelé hauteur du cylindre, mais on peut aussi tracer une hauteur d'un cylindre en joignant 2 points homologues de la circonférence des bases ou même de l'intérieur de celles-ci.

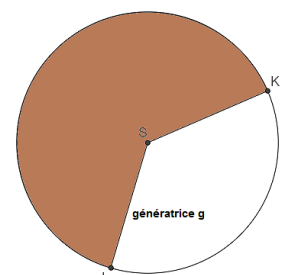
On peut considérer le cylindre de révolution comme une forme extrême de prisme droit : la base étant un polygone régulier ayant un nombre infini de côté... Comparons pour illustrer cette idée, un cylindre et le prisme qui lui ressemblerait ayant une base dodécagonale (12 faces). Si, au lieu de cette base à 12 côtés on mettait 100 côtés, on serait très proche d'un cylindre dans le sens qu'on ne les distinguerait sans doute plus à l'œil.



Le volume d'un cylindre de révolution se calcule avec la même formule que les prismes : **volume = base × hauteur**, mais dans ce cas la « base » du cylindre est un disque et l'on sait qu'un disque de rayon R a une aire égale à **base = $\pi \times R^2$** , donc le volume d'un cylindre de hauteur H et de rayon R est **$V = \pi \times R^2 \times H$** . Précisons que la face latérale consiste en un rectangle de longueur **$L = 2 \times \pi \times R$** (le périmètre de la base) et de largeur H (la hauteur du cylindre), son aire est donc égale à **aire latérale = $2 \times \pi \times R \times H$** . L'aire totale de la surface d'un cylindre mesure donc **aire totale = $2 \pi R \times (R + H)$** .

Un **cône de révolution** est un solide ayant une base circulaire (un disque), un sommet et une face latérale unique et courbe correspondant à la surface balayée par un segment (génératrice dont la longueur est parfois appelée *apothème*) partant du sommet dont l'autre extrémité décrirait la périphérie de la base. Le plan de la base est perpendiculaire à l'axe de symétrie (axe de rotation du triangle qui engendre le cône) du cône qui passe par le sommet et le centre de la base.

La base d'un cône est un disque de rayon r . La face latérale est une portion plus ou moins grande d'un autre disque, de rayon g (longueur de la génératrice). Cette portion de disque est limitée par un arc de longueur

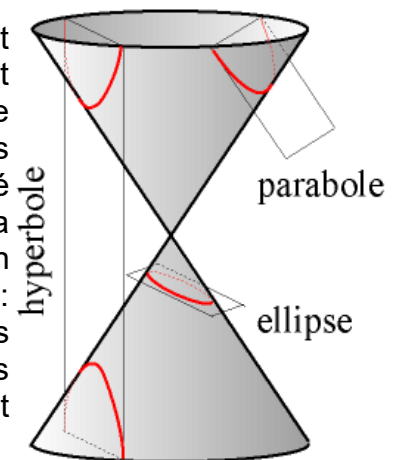


$2\pi r$, le périmètre de la base. Si on veut tracer le patron de cette face latérale, on doit déterminer l'angle au centre de cette portion de disque, afin que les longueurs correspondent. Le périmètre du disque complet est $2\pi g$, tandis que la longueur du grand arc est $2\pi r$. Or, cet arc a une longueur proportionnelle à l'angle au centre α de la portion de disque (voir le tableau de proportionnalité ci-dessous). On a donc $\alpha = \frac{2\pi r \times 360}{2\pi g} = \frac{r}{g} \times 360^\circ$. Bien sûr, on pourra toujours remplacer g par $\sqrt{r^2 + h^2}$ lorsque c'est nécessaire (relation obtenue par le théorème de Pythagore).

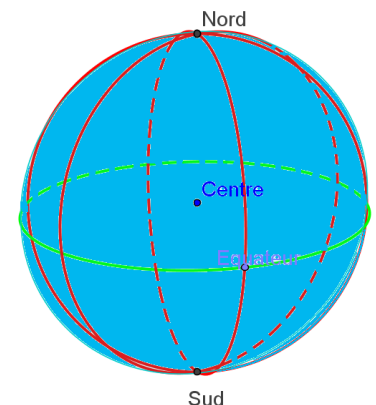
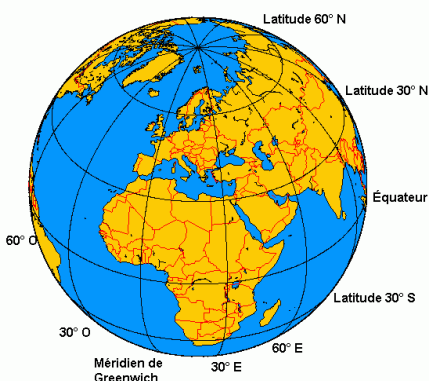
Longueur de l'arc	$2\pi r$	$2\pi g$
Angle au centre	α	360°

Le volume d'un cône est égal au tiers de celui du cylindre qui aurait même base et même hauteur que le cône. Autrement dit, le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est égal à : $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$. On peut voir en effet le cône comme la forme limite d'une pyramide dont la base est un polygone régulier à n côtés, lorsque le nombre n de côtés augmente jusqu'à l'infini. Pour toutes les valeurs de n le volume V de la pyramide est égal à $\frac{B \times h}{3}$. On voit sur l'illustration des pyramides que très rapidement, lorsque n augmente, la pyramide ressemble de plus en plus à un cône (pour $n=25$, on ne distingue plus vraiment les facettes latérales). L'aire latérale d'un cône mesure, quant à elle, (cette formule n'est pas au programme de la classe de 3^{ème}), $A_{latérale} = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$. L'apothème étant égale à $g = \sqrt{R^2 + h^2}$, on peut simplifier cette formule en $A_{latérale} = \pi R g$ et donner du même coup celle de l'aire totale du cône $A_{totale} = \pi R (R + g)$. L'aire du disque latéral complet (dans lequel est découpé la face latérale) mesure en effet $A' = \pi g^2$ et on en prend une fraction égale à r/g , d'où $A_{latérale} = A' \frac{r}{g} = \frac{\pi g^2 \times R}{g} = \pi R \times g$.

Remarque : d'une façon plus générale, les cônes de révolution sont engendrés par une droite passant par un point fixe (le sommet S) et dont un autre point décrit un cercle. La surface conique engendrée par la rotation de cette droite est infinie et ressemble à 2 cônes tels qu'on les a étudié au collège, opposés par le sommet, et prolongé dans les 2 directions. C'est de cet objet qu'il s'agit lorsqu'on définira plus tard les *coniques* comme les courbes obtenues par l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan. Il existe 3 sortes de coniques : les ellipses (sortes de cercles allongés), les paraboles et les hyperboles, dont nous commenceront à voir quelques spécimen lors de la représentation graphique des fonctions carré (parabole) et inverse (hyperbole).



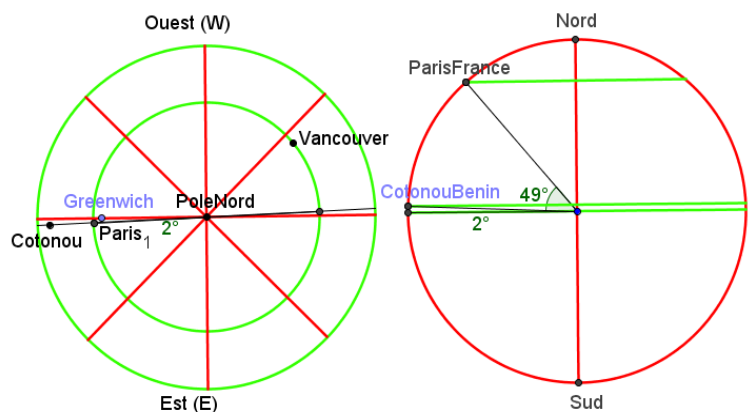
Une **sphère** de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $OM = R$, c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de O. Un *grand cercle* d'une sphère contient tous les points de la sphère contenus dans un plan passant par le centre de la sphère. Dans une sphère, il y a une infinité de grands cercles. Tous ont pour centre, le centre de la sphère et pour rayon, le rayon de la sphère. Si on coupe une sphère par un de ses grands cercles, on obtient deux demi-sphères et si on la coupe par un plan qui ne passe pas par le centre de la sphère, la trace de la coupe est un *petit cercle*. Les deux parties inégales d'une sphère coupées selon un petit cercle sont des *calottes sphériques*.



Depuis quelques siècles les hommes ont la certitude que notre planète, la Terre, a une forme globalement sphérique et tourne autour d'un axe qui passe par le centre de la sphère et traverse celle-ci en 2 points opposés appelés les pôles géographiques. Nous avons pris l'habitude de représenter la sphère terrestre avec des grands cercles : les *méridiens* (grands cercles passant par les pôles) et l'*équateur* (grand cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe des pôles) et aussi des petits cercles : les *parallèles* (petits cercles dont les centres sont situés sur l'axe de rotation de la Terre). Cela ressemble, en perspective, à la figure ci-contre où tous les grands cercles (sauf un) doivent être représentés par des ellipses. Les cercles appelés tropiques et les cercles polaires sont des petits cercles particuliers.

Un point de la surface terrestre peut être caractérisé par 2 nombres qui renvoient à 2 cercles : un petit cercle qui est le parallèle du lieu et qui est repéré par un angle (appelé *latitude*) et un grand cercle qui est le méridien du lieu et qui est aussi repéré par un angle (appelé *longitude*). La latitude varie entre -90° (on note plutôt 90° Sud) et $+90^\circ$ (on note 90° Nord) et la longitude entre 0° et 180° vers l'Est ou vers l'Ouest. On peut ainsi situer Paris par sa latitude $48^\circ 49' N$ (soit $48,833^\circ$) et sa longitude $2^\circ 19' E$ (soit $2,333^\circ$).

Pour effectuer des calculs de géométrie plane (théorème de Pythagore, trigonométrie) on se situe toujours dans des plans de coupe circulaires des sphères considérés. Sur la sphère terrestre, il peut s'agir d'une coupe selon un méridien (vue de droite) ou bien d'une coupe suivie d'une projection sur le plan de l'équateur : on projette les points d'un parallèle parallèlement à l'axe des pôles (vue de gauche).

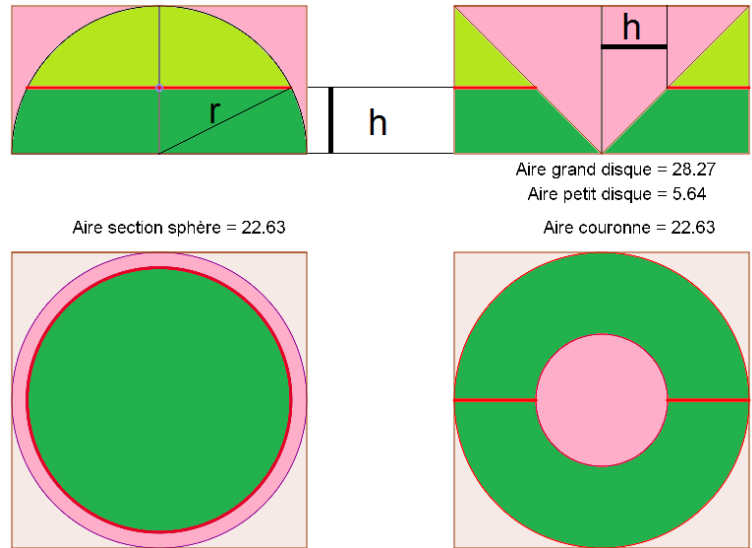


La sphère est une surface qui contient les points situés à une distance donnée (le rayon R) d'un point donné (le centre). L'aire qui mesure cette surface est donnée par une formule (qui ne figure pas au programme de la classe de 3^{ème}) $A = 4\pi R^2$, soit 4 fois exactement celle du disque équatorial. Le volume contenu à l'intérieur d'une sphère de rayon R (on appelle *boule* l'intérieur d'une sphère) est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Application : La Terre a un rayon R égal à 6400 km approximativement. L'équateur mesure donc environ $2\pi \times 6400 \approx 40.212$ km. La surface terrestre vaut $4\pi \times 6400^2 \approx 514.718.540$ km², soit un peu plus de 514 millions de km². La France couvre une aire égale à environ un millième de cette surface (aire de la France continentale : 549 000 km²). Le volume de la Terre est, quant à lui, égal à $\frac{4}{3}\pi \times 6400^3 \approx 1.098.066.210.000$ km³, soit un peu moins de 1 100 milliards de km³. Le petit cercle, appelé « parallèle » de Paris, a un rayon r vérifiant l'égalité $\frac{r}{R} = \cos 49^\circ$, ce qui conduit à la valeur $r = 6400 \times \cos 49 \approx 4200$ km. Par conséquent, ce petit cercle a une longueur de 26 000 km environ. Un point de ce petit cercle décrivant dans l'espace une trajectoire de 26 000 km par jour possède donc une vitesse propre (par rapport au soleil) d'environ 1080 km/h.

Comparaison des volumes de la sphère, du cylindre et du cône : La formule donnant le volume d'une sphère de rayon r peut être justifiée assez simplement si l'on considère le schéma ci-dessous, où sont représentés une demi-sphère (à gauche) et un cône (à droite) à l'intérieur d'un cylindre de même rayon. La sphère et le cône sont coupés par un plan parallèle au plan de base, situé à une distance h de ce plan. Dans le cas du cône, on s'intéresse au solide formé par le cylindre sans le cône (on fait un trou conique dans le cylindre). Les représentations du bas montrent le plan de coupe en vraies grandeurs, tandis que dans celles du haut, la trace du plan de coupe est un segment (2 segments dans le cas du cylindre ayant un trou conique). Le calcul

des aires des surfaces découpées est assez simple : dans le cas de la demi-sphère comme dans le cas du cylindre ayant un trou conique, l'aire vaut $\pi(r^2 - h^2)$. Comme, pour toutes les valeurs de h comprises entre 0 et r , les aires de coupe de la demi-sphère et du cylindre ayant un trou conique sont égales, selon le principe de Cavalieri¹, les volumes de ces 2 solides sont égaux. Or le volume du cylindre ayant un trou conique est égal à $\pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi r^2 h}{3}$. Le volume de la demi-sphère vaut donc $\frac{2\pi r^2 h}{3}$, comme celui du cylindre ayant un



trou conique, et finalement le volume de la sphère complète est le double, soit $\frac{4\pi r^2 h}{3}$.

NB : C'est Archimède (287-212 avant J.-C.) qui montra que le volume d'une sphère vaut 2 tiers de celui du plus petit cylindre la contenant. Considérant que c'était sa plus belle découverte il fit inscrire sur sa tombe le dessin d'une sphère dans un cylindre avec ce rapport caractéristique de 2:3.

II] Plans et droites

a) Axiomes, définitions et propriétés d'incidence

Un axiome est une propriété de base, évidente la plupart du temps et indémontrable, et qui constitue la base sur laquelle sera édifié progressivement les propriétés des objets que l'on aura défini. Une propriété d'incidence se rapporte aux manières qu'ont les plans et les droites de s'entrecouper.

Axiome 1 : Si un plan contient deux points A et B, alors il contient toute la droite (AB).

On pourra donc tracer le segment [AB] joignant les deux points et prolonger ce segment sans sortir du plan contenant les points. Le milieu I d'un segment [AB] en particulier appartient au plan contenant ses extrémités A et B ; le symétrique de A par rapport à B appartient aussi à ce plan. La géométrie du plan (théorèmes de Thalès ou de Pythagore, trigonométrie, polygones et cercles, etc.) s'applique à tous les plans de l'espace, mais comme on doit se limiter à des plans, il faudra parfois projeter des configurations de l'espace sur un plan (voir plus loin).

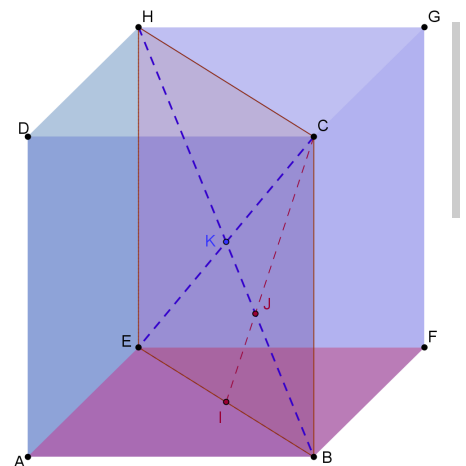
Axiome 2 : Il n'existe qu'un unique plan passant par trois points non alignés A, B et C.

On pourra donc tracer le segment [AB] joignant les deux points et prolonger ce segment sans sortir du plan contenant les points. Ceci est la base qui permet de définir les plans de l'espace :

Un plan est déterminé par l'une des conditions suivantes :

- trois points A, B et C non-alignés
- une droite d et un point A non situé sur cette droite
- deux droites d et d' sécantes
- deux droites d et d' parallèles et disjointes

Les faces du cube ABCDEFGH sont des plans. Par exemple la face (ABC) est définie indifféremment par les points A, B et C, par le point A et la droite (BC) ou par les droites (AB) et (BC). Le plan (BCH) contient K et I les milieux de [CE] et de [BE], H le symétrique de B par rapport à K et J l'intersection de (CI) et (BH), 2 droites du plan (BCH).



1 CAVALIERI Bonaventura Francesco (1548-1647) est un mathématicien italien, élève de Galilée, qui a développé l'idée que si deux solides ont la même hauteur et des sections transversales parallèles identiques, alors ils ont le même volume.

D'un façon générale, le fait d'appartenir au même plan (on dit *coplanaire*) est une évidence pour les sommets d'un polygone ou les points d'un cercle (ce sont des figures du plan), mais ce n'est pas évident que quatre points soient coplanaires, ni que deux droites soient coplanaires... Les droites (AB) et (DH) de notre cube par exemple ne sont pas coplanaires, car H n'appartient pas au plan (ABD). Si H était dans (ABD) on peut facilement en déduire qu'alors tous les points de la figure appartiendraient au même plan et que le cube ... n'est pas un cube.

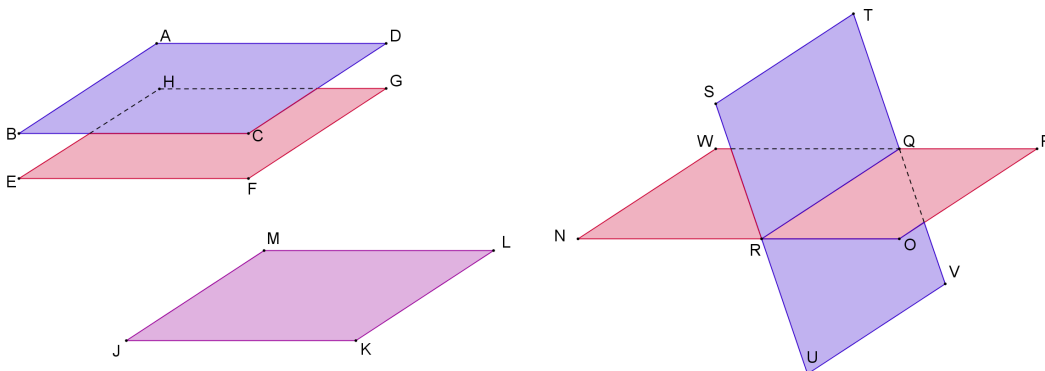
Propriété 1 : Si un plan contient une droite d et un point P , alors il contient aussi la parallèle à d passant par P .

Le 5^{ème} axiome d'Euclide appelé aussi *postulat* d'Euclide (il fonde la géométrie usuelle, mais il n'est pas une nécessité, on pourrait en changer, les géométries non-euclidiennes n'utilisant pas ce postulat) assure que cette droite est unique.

Deux plans sont dits *parallèles* s'ils n'ont aucun point en commun (on dit aussi qu'ils sont disjoints) ou s'ils sont confondus (tous leurs points sont communs).

Si deux plans ne sont pas parallèles, alors ils sont dits *sécants*.

Les plans (ABD) et (DCG) du cube ci-dessus sont sécants car ils ont en commun les points D et C, l'intersection de ces plans est donc la droite (CD). Dans le cube, l'intersection des faces est l'arête [CD]. Ci-dessous nous avons illustré les 2 sortes de parallélisme : les plans (JKL) et (KLM) sont parallèles car confondus tandis que (ABC) et (EFG) sont des plans parallèles et disjoints. À droite, les plans (OPW) et (SUV) sont sécants. L'intersection de ces plans est la droite (RQ) qui est entièrement contenue dans les deux plans.



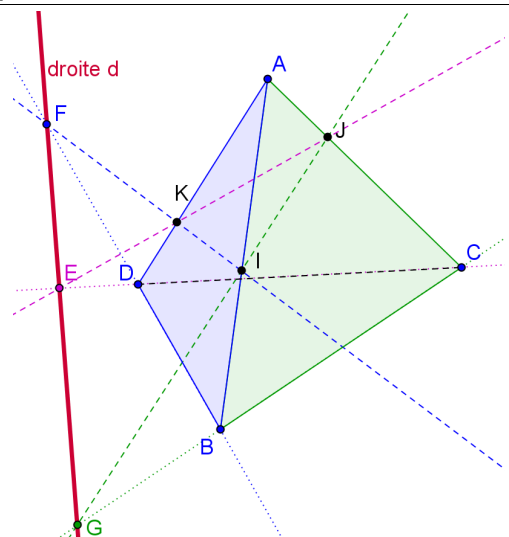
Deux plans de l'espace P et P' sont dans l'une des deux positions suivantes :

- Parallèles, si ils n'ont aucun point en commun ou, à la rigueur, si ils sont confondus.
- Sécantes, ils ont alors une droite en commun.

Propriété 2 : L'ensemble des points d'intersection de deux plans sécants est une droite.

Exemple : ABCD est un tétraèdre. I, J et K sont des points variables sur les segments [AB], [AC] et [AD]. Construisons l'intersection du plan (IJK) avec la base (BCD) du tétraèdre. Pour cela, nous devons tracer l'intersection de deux droites contenues dans un même plan, par exemple l'intersection de (IJ) et de (BC) est un point du plan de la face ABC qui contient un des points de l'intersection cherchée, nous avons noté G ce point.

De la même manière, E est l'intersection de (JK) et (CD) et F est l'intersection de (IK) et (BD). En traçant la droite d passant par ces trois points, nous constatons que deux points d'intersection auraient suffi car le 3^{ème} est nécessairement sur la droite qui joint les deux premiers.



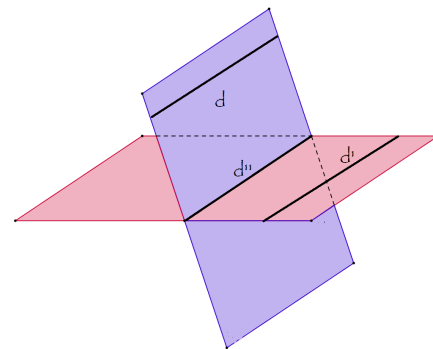
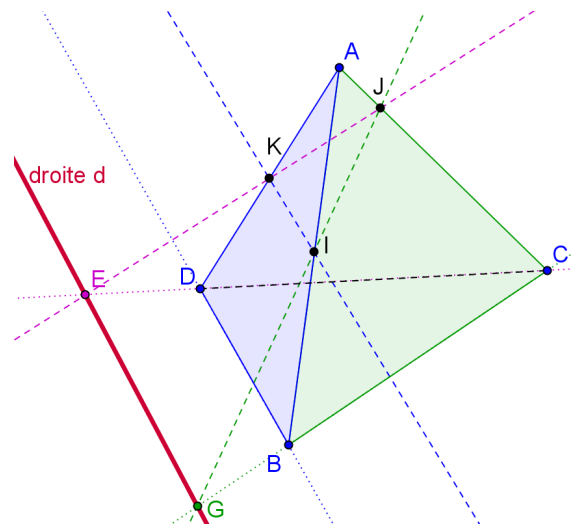
En faisant varier la position de I, J ou K sur les arêtes du tétraèdre, on passe par des positions où les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles (il faut pour cela que les droites (KI)//(DB), (IJ)//(BC) et (JK)//(CD), bien que deux de ces parallélisme suffit, car il entraîne nécessairement le 3^{ème}, voir plus loin).

Dans d'autres situations, la droite d est parallèle à un des côtés de la base BCD. Sur notre figure, ci-contre, nous avons (BD), (EG) et (IK) qui sont parallèles.

Propriété 3 (théorème du toit) : Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, alors leur intersection est parallèle à ces deux droites.

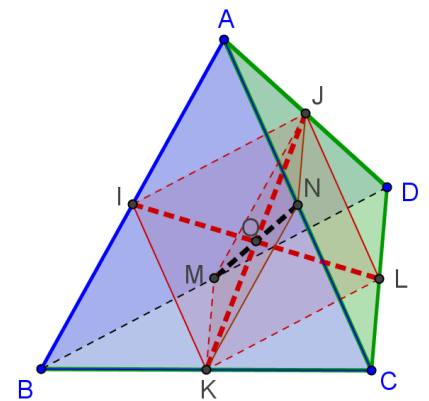
C'est bien le cas ici car (BD) et (IK) sont deux droites parallèles contenues dans le plan de la face ABD. D'après la propriété 1 le plan contenant (IK) et E contient aussi la parallèle à (IK) passant par E, c'est-à-dire la droite (EG) qui est l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

C'est aussi le cas sur l'illustration de droite où deux plans sécants contiennent deux droites parallèles d et d' : leur intersection sera une droite d'' parallèle à ces droites.

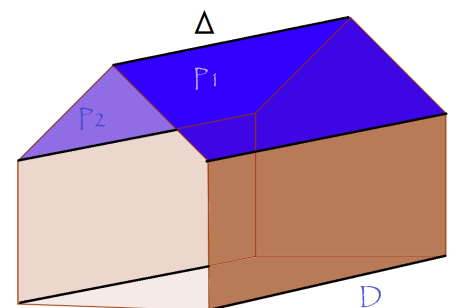


Application : Dans cette configuration, les points I, J, K, L, M et N sont les milieux des arêtes d'un tétraèdre ABCD. Dans le triangle ABC, (IK) est une droite des milieux, parallèle à (AC) et telle que $2IK=AC$. De même, dans le triangle ACD, (JL) est une droite des milieux, parallèle à (AC) et telle que $2JL=AC$.

Par conséquent, $IK=JL$ et $(IK)//(JL)$. Les quatre points I, J, L et K sont coplanaires (deux droites parallèles déterminent un plan) et forment un parallélogramme IJLK de centre O, le milieu de [IL] et de [JK]. On peut recommencer ce raisonnement avec deux autres faces du tétraèdre, par exemple ABC et ABD, et montrer que J, N, K et M sont coplanaires et forment un parallélogramme JNKM de même centre O. Finalement, on retiendra que les trois segments [IL], [JK] et [MN] sont concourants en O.

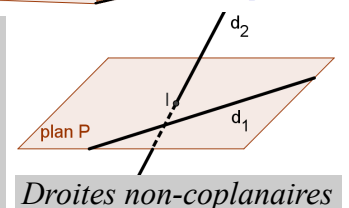


Remarque : cette propriété est appelée *théorème du toit* par référence à cette structure des toits à deux pans dont la ligne de faitage est nécessairement parallèle aux bas du toit (l'emplacement des gouttières). Dans notre illustration, comme P_1 et P_2 sont sécants et que $P_1//D$ et $P_2//D$, alors l'intersection de P_1 et P_2 est une droite Δ parallèle à D.



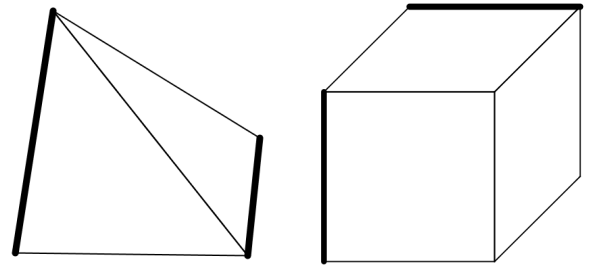
Deux droites de l'espace d et d' sont dans l'une des positions suivantes :

- Parallèles, si elles sont coplanaires et n'ont aucun point en commun ou, à la rigueur, si elles sont confondues.
- Sécantes, si elles ont un seul point en commun (elles sont alors coplanaires).
- Non coplanaires (elles n'ont alors rien en commun).



Droites non-coplanaires

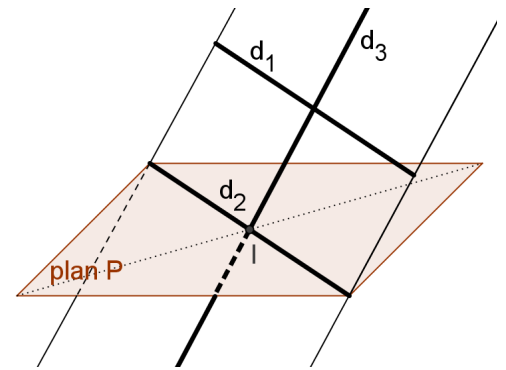
Avertissement : attention à ne pas conclure que deux droites qui n'ont aucun point en commun sont parallèles (elles peuvent être non-coplanaires) et attention aussi à ne pas prendre pour parallèles des droites qui, sur une figure en perspective, semblent l'être mais sont en réalité non-coplanaires ou des droites qui, sur une figure en perspective, semblent être parallèles mais sont en réalité non-coplanaires. Voir sur ces deux derniers points la figure de gauche qui représente un tétraèdre (les deux arêtes en gras ne peuvent pas être parallèles car elles ne sont pas coplanaires!) et celle de droite qui représente un cube (les deux arêtes en gras ne peuvent pas être sécantes car elles ne sont pas coplanaires!).



Une droite d et un plan P de l'espace sont dans l'une des deux positions suivantes :

- Parallèles, si ils n'ont aucun point en commun ou, à la rigueur, si la droite d est contenue entièrement dans le plan P (on dit alors qu'elle est *incluse* dans P).
- Sécantes, si ils ont un seul point en commun (l'intersection est alors un point).

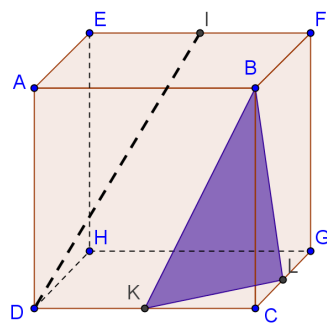
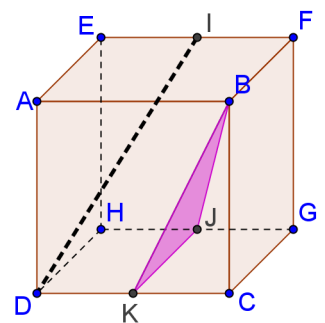
Sur notre illustration, d_1 et d_2 sont parallèles et le plan P contient la droite d_2 (qui est donc incluse dans P). P est percé en un point I par la droite d_3 qui est donc sécante à P . Mais P n'a rien en commun avec d_1 car cette droite est dans un plan qui coupe P selon la droite d_2 et qui est distincte de d_2 , d_1 est donc parallèle à P .



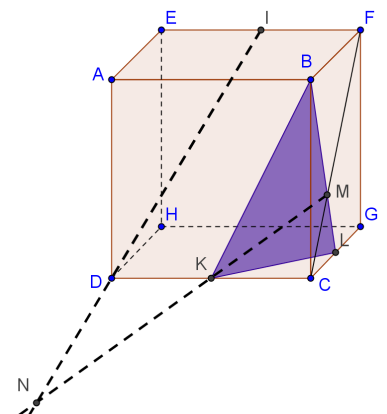
Théorème 1 : Pour qu'une droite d soit parallèle à un plan P , il suffit qu'il existe une droite d' de P qui soit parallèle à d .

Lorsqu'une droite d est parallèle à un plan P , il existe une infinité de droites de P qui sont parallèles à d (toutes ces droites sont parallèles entre elles), mais ce théorème affirme qu'il suffit d'en trouver une pour pouvoir affirmer le parallélisme et donc qu'il y en a une infinité.

Exemple d'application : I , J et K sont les milieux de trois arêtes d'un cube $ABCDEFGH$. (DI) est-elle parallèle au plan (BJK) ? Si oui, il faut pour le prouver, trouver une droite parallèle à (DI) qui soit contenue dans le plan (BJK) . Cette droite est (KF) : elle est bien dans le plan (BKJ) car (BF) et (KJ) sont parallèles (donc coplanaires) et elle est bien parallèle à (DI) car $[DK]$ et $[IF]$ sont parallèles et égaux et donc $DKFI$ est un parallélogramme. Comme $(KF) \parallel (DI)$ et que (KF) est incluse dans (BKJ) , selon ce théorème 1, la droite (DI) est parallèle au plan (BKJ) .



Remarque : pour montrer qu'une droite d n'est pas parallèle à un plan P , il faut prouver qu'elle perce ce plan en construisant le point d'intersection. Dans la configuration précédente, par exemple, en ajoutant L le milieu de $[CG]$, montrons que (DI) n'est pas parallèle au plan (BLK) . La droite (DI) est incluse dans le plan (DCF) , et ce plan coupe le plan (BLK) en K et en un autre point M , situé sur la face (BCG) , à l'intersection de $[BL]$ et $[CF]$. Donc (KM) est l'intersection des plans (BLK) et (DCF) . Les droites (KM) et (DI) étant coplanaires, sont soit parallèles, soit sécantes. Or la parallèle à (DI) passant par K est la droite (KF) de la situation précédente; ce ne peut être (KM) qui est donc nécessairement sécante avec (DI) .

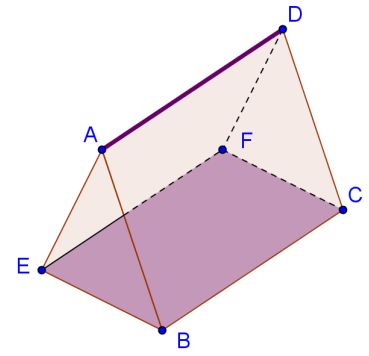


Or la parallèle à (DI) passant par K est la droite (KF) de la situation précédente; ce ne peut être (KM) qui est donc nécessairement sécante avec (DI) .

Théorème 2 : Pour qu'une droite d soit parallèle à un plan P , il suffit qu'il existe un plan P' contenant d qui soit parallèle à P car alors toute droite du plan P' est parallèle au plan P .

Lorsque deux plans sont parallèles, ils n'ont par définition aucun point en commun, une droite de l'un des plans est nécessairement parallèle à l'autre plan.

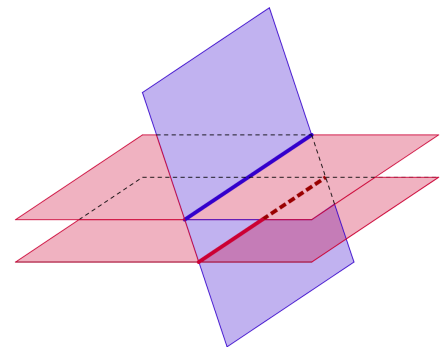
Remarque : Ce théorème revient à dire que si $P//P'$ et que $d \subset P'$ alors $d//P$. Mais, en général, la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. S'il existe une droite d de P' qui soit parallèle à P , alors on n'a pas nécessairement $P//P'$. On est en effet dans la situation du théorème du toit illustré ci-contre : la droite (AD) du plan (ADC) est parallèle au plan (EBC) et pourtant les plans (ADC) et (EBC) ne sont pas parallèles. Ils se coupent selon une droite (BC) parallèle à (AD) .



Propriété 4 : Si deux plans parallèles et disjoints sont coupés par un 3^{ème} plan, alors les intersections des trois plans consistent en deux droites parallèles.

Si ce n'était pas le cas, comme les droites d'intersection sont situées dans le même 3^{ème} plan, alors il faudrait qu'elles soient sécantes et donc il y aurait au moins un point qui appartiendrait aux deux plans parallèles et disjoints, ce qui ne se peut pas.

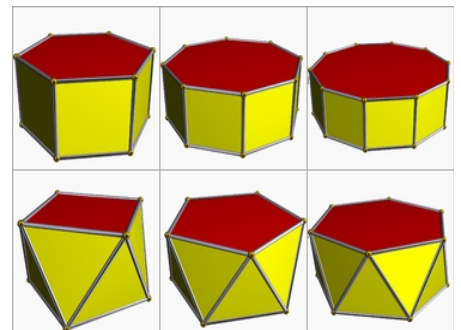
Sur notre illustration les deux droites en gras sont parallèles si les plans sont parallèles ; mais cette condition n'est pas nécessaire (elle est juste suffisante) : les deux droites peuvent être parallèles sans que les plans le soient (il suffit qu'ils soient tous deux parallèles à une même direction pour que leur intersection soit elle aussi parallèle à cette direction, c'est la propriété 3).



Si ce n'était pas le cas, comme les droites d'intersection sont situées dans le même 3^{ème} plan, alors il faudrait qu'elles soient sécantes et donc il y aurait au moins un point qui appartiendrait aux deux plans parallèles et disjoints, ce qui ne se peut pas.

Remarque : cette propriété sera massivement exploitée lorsqu'on cherchera les intersections d'un plan de coupe avec les faces parallèles d'un cube, ou de tout autre objet de l'espace ayant des faces parallèles (prisme, antiprisme, etc.)

Ci-contre, quelques spécimens de la famille des prismes (en haut) et des antiprismes (en bas). Pour l'antiprisme à base carrée, les bases parallèles sont jointes par des triangles (un côté d'un triangle latéral appartient à une base tandis que le sommet opposé de ce triangle appartient à l'autre). L'antiprisme à base carrée a donc 8 faces latérales triangulaires alors que le prisme à base carrée a quatre faces rectangulaires.

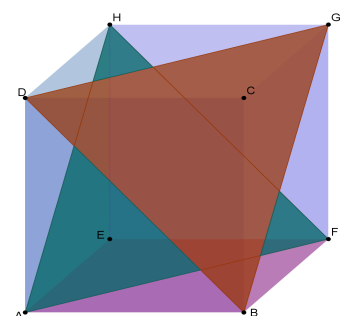
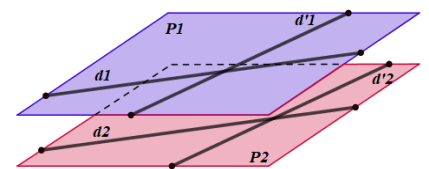


Théorème 3 : Pour que deux plans soient parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes de l'un qui soient parallèles respectivement à deux droites sécantes de l'autre.

En effet, un seul couple de droites parallèles ne suffirait pas à garantir le parallélisme des deux plans, car il subsisterait le cas du théorème du toit (propriété 3) que nous venons d'évoquer.

En prenant deux couples de droites sécantes on s'assure que le parallélisme des plans est vraiment réalisé, et ne se limite pas au parallélisme entre les plans et une seule direction de droite.

Application : Montrons que, dans le cube $ABCDEFGH$, les plans (BDG) et (AFH) sont parallèles. On a (DG) et (AF) qui sont parallèles et, de même, (BG) et (AH) qui sont parallèles. Or (DG) et (BG) d'une part et (AF) et (AH) d'autre part, sont des droites sécantes des plans (BDG) et (AFH) . D'après ce théorème 4, les plans sont donc parallèles.



b) Étude des configurations spatiales

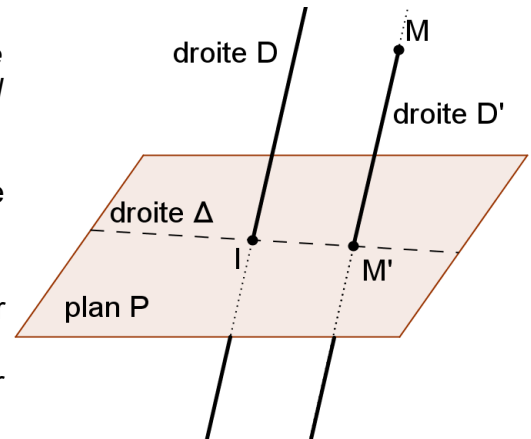
Projection parallèlement à une droite

La notion de projection sur un plan parallèlement à une droite n'est pas au programme explicitement, mais constitue un outil précieux et un complément utile justifiant sa définition.

Pour projeter un point M sur un plan P parallèlement à une droite D on doit

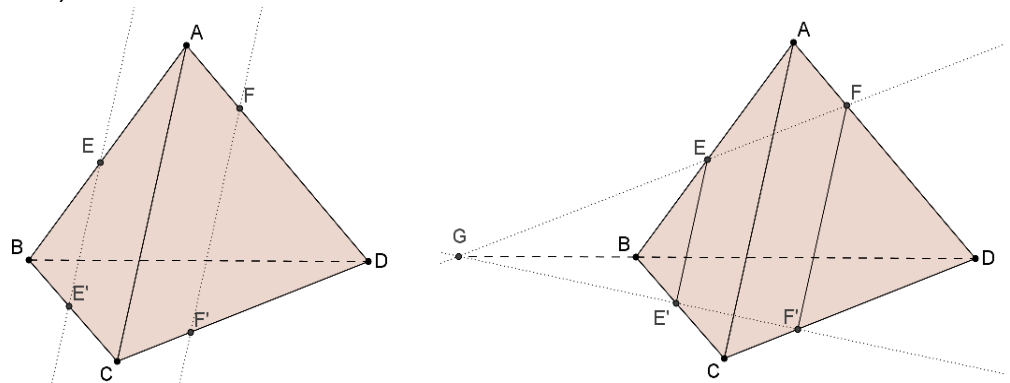
- construire la droite D' parallèle à D passant par M.
- construire M' l'intersection de D' et de P (elle est sur l'intersection Δ de P avec le plan contenant D et M).

Le point M' est le point cherché (M' est le projeté de M sur P parallèlement à D).

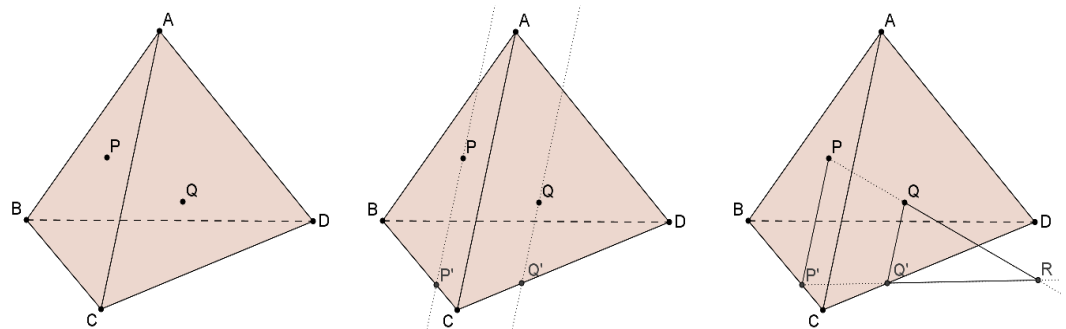


La construction est simple lorsqu'on connaît déjà cette intersection Δ comme dans le cas ci-dessous où le projeté E' de E sur (BCD) parallèlement à (AC) appartient nécessairement à (BC), l'intersection de (ABC), le plan contenant E et (AC), et (BCD). De même, le projeté F' de F sur (BCD) parallèlement à (AC) appartient nécessairement à (CD), l'intersection de (ACD), le plan contenant F et (AC), et (BCD).

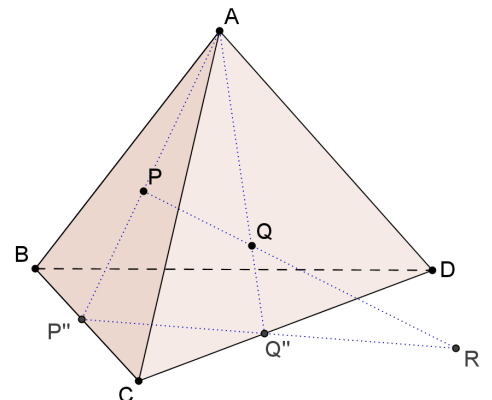
NB : Si l'objet de cette construction était de construire l'intersection G de (EF) avec le plan (BCD), il y aurait un moyen plus simple qui consiste à construire l'intersection de (EF) et (BD) qui est le point G cherché. (BD) et (EF) étant des droites situées dans un plan coupant (BCD) selon la droite (BD), l'intersection G cherchée est nécessairement sur (BD).



Dans le cas ci-contre, les points P et Q appartiennent respectivement aux plans (ABC) et (ACD). Le projeté P' de P sur (BCD) parallèlement à (AC) appartient nécessairement à (BC), l'intersection de (ABC), le plan contenant P et (AC), et (BCD). De même, le projeté F' de F sur (BCD) parallèlement à (AC) appartient nécessairement à (CD), l'intersection de (ACD), le plan contenant Q et (AC), et (BCD).

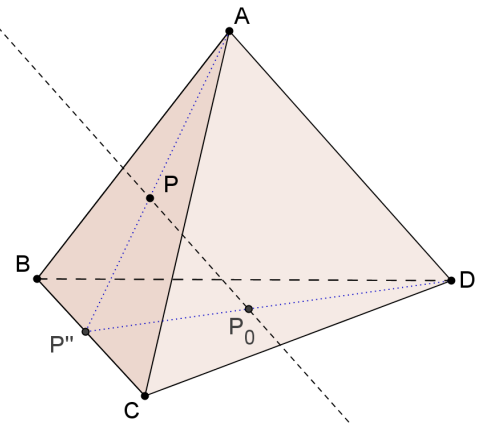


NB : Si l'objet de cette construction était de construire l'intersection R de (PQ) avec le plan (BCD), on ne pourrait pas construire directement l'intersection de (PQ) et de (BCD). On pourrait cependant éviter d'avoir recours à la projection en traçant l'intersection (P''Q'') du plan (APQ) avec (BCD). Il suffirait alors de construire l'intersection de (P''Q'') et (PQ) qui est le point R cherché.

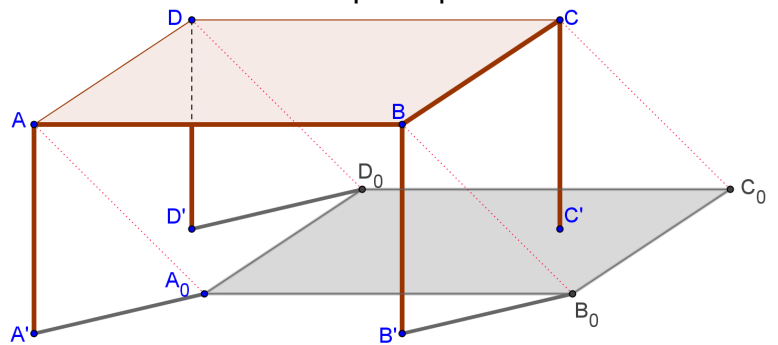


On retiendra de cette dernière remarque que parfois, on peut effectuer une construction intermédiaire pour obtenir la projection d'un point sur un plan parallèlement à une droite. Cela arrive lorsqu'on ne connaît pas l'intersection Δ dont il est question dans la définition.

Dans la configuration ci-contre quelle est la projection P_0 de P sur (BCD) parallèlement à (AD) ? On va devoir utiliser une construction intermédiaire : le plan (APD) contient la parallèle à (AD) passant par P . On trace (AP) qui coupe (BCD) en P'' et la droite $(P''D)$ est l'intersection entre (APD) et (BCD) , c'est donc à l'intersection de $(P''D)$ et de la parallèle à (AD) passant par P que se trouve le projeté P_0 cherché.



Appliquons cela dans un autre contexte : $ABCD$ est le plateau d'une table dont les pieds sont en A' , B' , C' et D' . On connaît la projection A_0 de A sur le plan du sol $(A'B'C')$ et on cherche les projections de B , C et D sur ce plan parallèlement à cette direction de projection. Cette situation revient à dessiner l'ombre de la table sur le sol quand on connaît la direction des rayons du soleil (dont on convient qu'ils sont parallèles). Ici on ne connaît pas l'intersection B_0 de la parallèle à (AA_0) passant par B , mais on se souvient que les intersections de 2 plans parallèles avec un 3^{ème} plan sont des droites parallèles, or $(AA'A_0)$ et $(BB'B_0)$ sont des plans parallèles, car $(AA'A_0)$ contient deux droites sécantes, (AA') et $(A'A_0)$, qui sont parallèles respectivement à 2 droites sécantes de $(BB'B_0)$, (BB') et $(B'B_0)$. Il suffit donc de tracer $(B'B_0)$ parallèlement à $(A'A_0)$ et de construire l'intersection B_0 de ces droites. Le reste de la construction se fait selon le même principe.



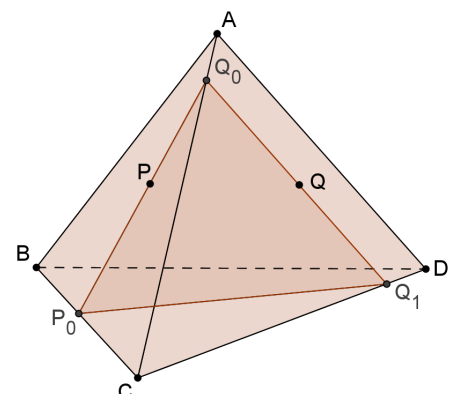
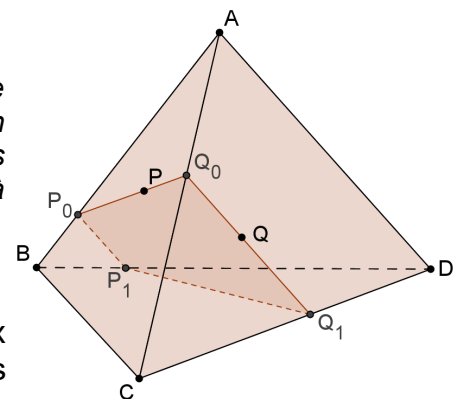
Sections de solides

Les sections de solides ont, en principe, été étudiés au collège. Mais le programme du collège n'envisage que quelques sections (section d'un prisme ou d'une pyramide par un plan parallèle à une base, etc.) Nous envisageons ici des sections quelconques mais nous limiterons à effectuer les constructions sans dégager aucune propriétés générales.

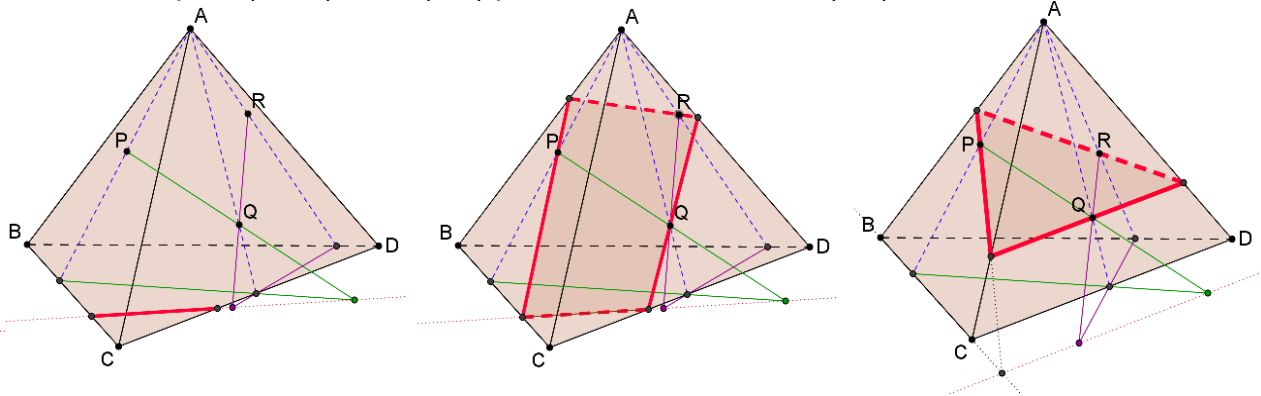
1. Section d'un tétraèdre

P et Q étant des points qui appartiennent respectivement aux plans (ABC) et (ACD) d'un tétraèdre $ABCD$, traçons sur les faces du tétraèdre les intersections du plan passant par P et Q parallèle à (AD) . Pour cela on commence par construire la parallèle à (AD) passant par Q , on trouve ensuite les points Q_0 et Q_1 où cette droite perce les faces ABC et BCD . On construit alors la droite passant par P et le point Q_0 . Cette droite perce (ABD) en P_0 . On trace la parallèle à (AD) passant par P_0 qui coupe BCD en P_1 . Le quadrilatère $P_0P_1Q_1Q_0$ est la section cherchée.

Bien sûr, la section d'un tétraèdre n'est pas toujours un quadrilatère. Ce peut être un triangle comme dans le cas ci-contre.

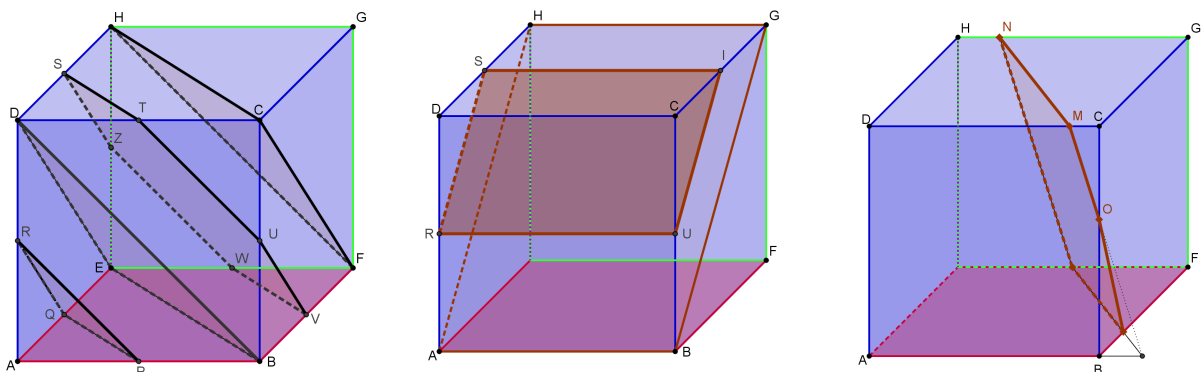


Construisons maintenant l'intersection des faces du tétraèdre avec le plan (PQR) P, Q et R étant des points qui appartiennent respectivement aux plans (ABC), (ACD) et (ABD). On peut commencer par construire l'intersection du plan (PQR) avec le plan de base (BCD) du tétraèdre. Pour cela on trace successivement l'intersection des plans (APQ) et (BCD) qui nous donne un 1^{er} point (en vert) et l'intersection des plans (ARQ) et (BCD) qui nous donne un 2^{ème} point (en violet). La droite qui passe par ces points est l'intersection cherchée. Il suffit d'en prendre la partie qui traverse la face BCD. Le reste de la construction ne pose pas de difficulté : on construit pas à pas la trace du plan (PQR) sur les faces du tétraèdre. Cette intersection est un quadrilatère (à gauche) ou un triangle (à droite), selon les cas. Il faudra parfois construire un autre point supplémentaire, comme nous l'avons fait sur la figure de droite où nous avons dû tracer l'intersection du plan (PQR) avec (BC) pour obtenir celle avec (AC).



2. Section d'un parallélépipède rectangle

Les sections d'un parallélépipède rectangle peuvent être un triangle, un quadrilatère, un pentagone ou bien un hexagone. Examinons par exemple ces sections du cube ABCDEFGH par des plans parallèles au plan (PQR) où P, Q et R sont les milieux des arêtes [AB], [AE] et [AD] du cube (on dira qu'on « enlève » un sommet). Nous avons tout d'abord des triangles, puis des hexagones, comme cet hexagone régulier STUVWZ. Examinons maintenant des sections du cube par des plans parallèles au plan (SRU) où S, R et U sont les milieux des arêtes [DH], [AD] et [BC] du cube (on dira qu'on « enlève » une arête). Nous n'avons alors que des quadrilatères. Entre ces deux situations que pouvons-nous avoir ? Des polygones ayant de 3 à 6 côtés comme il a été dit. Sur la figure de droite nous avons tracé une section pentagonale en choisissant 3 points M, N et O sur des arêtes non coplanaires. Les tracés en dehors du cube sont nécessaires pour obtenir quelques points d'intersections utiles. Il ne faut pas oublier que dans tous ces tracés relatifs au cube (ou à n'importe quel parallélépipède rectangle), les faces opposées sont parallèles, ce qui assure d'avoir des intersections avec un 3^{ème} plan parallèles.



On peut prolonger cette découverte des sections du cube en imaginant ce qui se passerait si on enlevait simultanément tous les sommets (ou toutes les arêtes). Cette opération conduit à des polyèdres intéressants car elle conserve une partie des symétries du cube et surtout elle révèle progressivement un octaèdre, en passant par le très équilibré cuboctaèdre (au milieu sur la figure ci-contre).



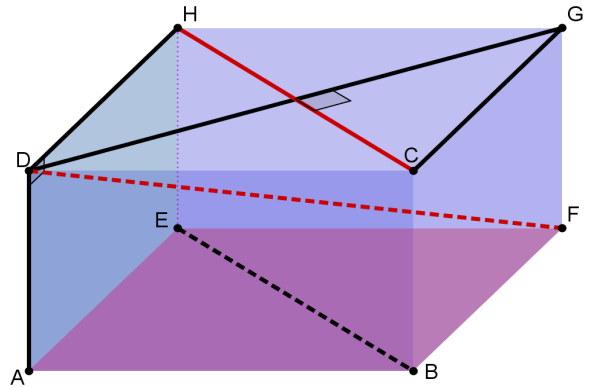
Orthogonalité

Dans le programme ne figurent par la notion d'orthogonalité qui est pourtant nécessaire à la compréhension de certaines situations comme, par exemple, la détermination de la hauteur d'une pyramide (on doit trouver une droite perpendiculaire au plan de la base).

Définition : Deux droites D et D' sont orthogonales si on peut mener une parallèle à D (ou à D') qui soit perpendiculaire à D' (ou à D).

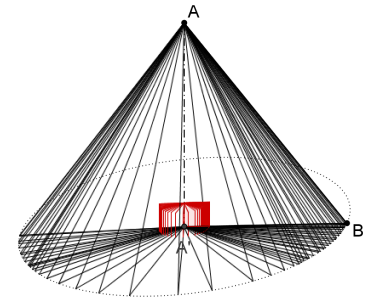
Notons que pour deux droites coplanaires on parle de perpendicularité ou d'orthogonalité (les deux termes sont alors synonymes), mais lorsqu'on se situe dans l'espace, deux droites peuvent être orthogonales sans être coplanaires. Dans ce cas, on ne peut pas dire qu'elles sont perpendiculaires.

Exemple : Dans le pavé ABCDEFGH, comme (AD) et (DH) sont perpendiculaires, étant des arêtes consécutives d'un parallélépipède rectangle, et que $(DH) \parallel (CG)$, on en déduit que (AD) et (CG) sont orthogonales (on ne peut pas dire qu'elles sont perpendiculaires car elles ne sont pas coplanaires). De même, (DG) et (EB) sont orthogonales car (EB) est parallèle à (HC) qui est perpendiculaire à (DG) , étant les diagonales d'un losange.



Définition : Une droite D et un plan sont orthogonaux si la droite D est orthogonale à toute droite du plan P .

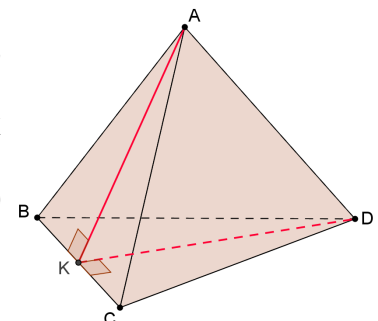
On peut voir une illustration de ceci dans la génération des solides de révolution comme le cône ou le cylindre : l'axe de rotation est orthogonal à un rayon de la base en mouvement. Il est orthogonal à tous les rayons de cette base qui forment ainsi un disque, donc un plan, orthogonal à cet axe. C'est pour cette raison que la hauteur du cône est mesurée entre le sommet et le centre de la base. Une illustration plus concrète d'une droite orthogonale à un plan est fournie par l'axe de rotation d'une porte et le plan du sol (le bord vertical de la porte décrivant une portion de la face latérale d'un cylindre).



Cette définition ne semble pas très opérationnelle (comment montrer une infinité d'orthogonalités ?). Heureusement, nous avons cette propriété qui va nous simplifier la tâche :

Propriété : Une droite D est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan P . Réciproquement : si une droite est orthogonale à deux droites sécantes alors elle est orthogonale au plan défini par les droites sécantes.

Exemple : ABCD étant un tétraèdre régulier (ses faces sont des triangles équilatéraux) ses arêtes opposées, comme (AD) et (BC) , sont orthogonales. En effet, (BC) est orthogonale aux deux hauteurs (AK) et (DK) et donc cette droite est orthogonale au plan (ADK) les contenant. Or, (ADK) contient (AD) et donc, comme (BC) est orthogonale à toute droite de (ADK) , elle est orthogonale à (AD) .



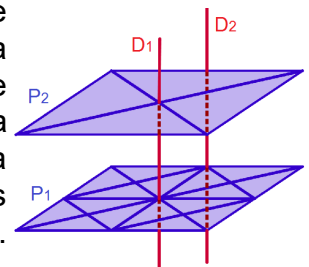
Autre exemple : Nous voulons montrer que dans le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessus, les droites (HC) et (DF) sont orthogonales. Pour cela montrons que le plan (ADG) est orthogonal à (HC) : on sait que (DG) est orthogonale à (HC) , il faut encore montrer que (DA) est orthogonale à (HC) . Or (DA) est orthogonale à (DH) et à (DC) qui sont des côtés consécutifs, donc (DA) est orthogonale au plan (DCG) et donc à toutes les droites de ce plan, donc à (HC) . Finalement (HC) étant orthogonale à 2 droites du plan (ADG) est orthogonale à toutes les droites de ce plan, donc à (DF) .

Pour montrer qu'une droite **n'est pas orthogonale** à un plan, il suffit de montrer qu'il existe une droite de ce plan qui n'est pas orthogonale à cette droite. Par exemple, dans le pavé ABCDEFGH ci-dessus, la droite (DG) est orthogonale à (DA), une droite du plan (ABC) mais elle n'est pas orthogonale à ce plan, car elle n'est pas orthogonale à (DC), une autre droite de ce plan (en effet, (DG) et (DC) sont coplanaires et se coupent en D sans former d'angle droit).

Conséquences : Si deux droites sont orthogonales à un même plan P, alors elles sont parallèles. Et si deux plans sont orthogonaux à une même droite D, alors ils sont parallèles.

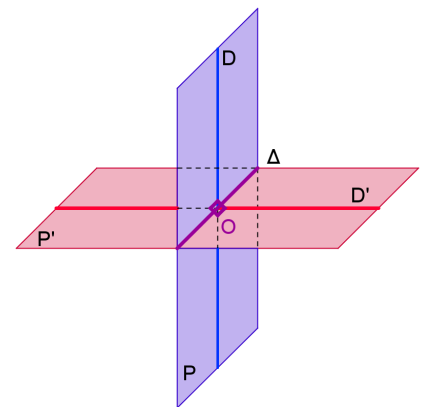
Par exemple, si $D_1 \perp P_1$ et si $D_2 \perp P_1$ alors $D_1 \parallel D_2$. De plus, si $D_1 \perp P_1$ et si $D_1 \perp P_2$ alors $P_1 \parallel P_2$.

Ces conséquences semblent justifier à elles seules la définition de l'orthogonalité (car ainsi on peut prouver des parallélismes). Mais la principale application que nous pourrons faire de l'orthogonalité est tout de même les calculs de volumes, celui d'une pyramide par exemple où l'on a besoin de déterminer la hauteur. La notion de hauteur est intimement liée à celle d'orthogonalité et pourtant ni au collège ni même au lycée depuis l'arrivée des nouveaux programmes, on n'est censé étudier cette dernière...



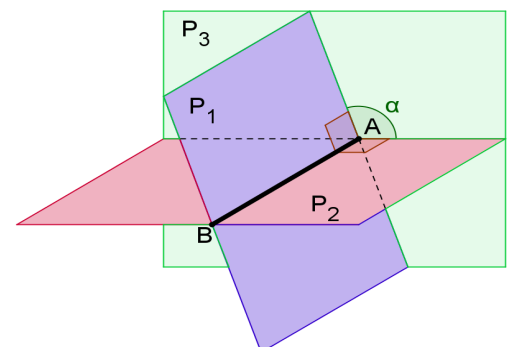
Définition : Deux plans P et P' sont perpendiculaires lorsque l'un des deux contient une droite D orthogonale à l'autre.

Remarquons le rôle *symétrique* de P et P' dans cette définition: cela vient du fait que si P contient une droite D orthogonale à P' alors P' contient une droite D' orthogonale à P. En effet, si D est orthogonale à P', alors D est orthogonale à toute droite de P'. Mais comme D perce P' en un point O, l'intersection de P et P' est une droite Δ contenant O et perpendiculaire à D. Le plan P' contient la droite Δ sur laquelle se situe le point O. Appelons D' la perpendiculaire à la droite Δ passant par O. D' est donc perpendiculaire à deux droites du plan P : Δ et D, elle est donc orthogonale au plan P.



Exemple : Dans le pavé ABCDEFGH, les plans des faces voisines sont perpendiculaires. Les plans des faces (ABC) et (ABF) par exemple se coupent selon la droite (AB) pour former l'arête [AB] du pavé. (BC) est orthogonale à (ABF) tandis que (BF) est orthogonale à (ABC). Notons qu'évidemment, il n'y a pas qu'une seule droite d'un plan qui soit orthogonale à l'autre plan : la droite (AD) est aussi orthogonale au plan (ABF).

Cette notion de perpendicularité entre deux plans se prolonge dans celle d'*angle-dièdre*. L'angle-dièdre entre deux plans P_1 et P_2 est l'angle α mesuré sur une coupe effectuée orthogonalement à l'intersection de ces deux plans. Le plan de coupe P_3 est perpendiculaire à chacun des plans P_1 et P_2 car ces plans contiennent une droite orthogonale au plan P_3 . Il s'agit de leur intersection, sur notre illustration la droite (AB). Dire que deux plans sont perpendiculaires revient à dire qu'ils forment un angle-dièdre droit.



Dans l'exemple du tétraèdre régulier ABCD ci-dessus, pour mesurer l'angle-dièdre entre deux faces, on peut se situer dans le plan (ADK) orthogonal à (BC), l'intersection entre les plans (ABC) et (DBC). On détermine alors la mesure de cet angle par des considérations de géométrie plane (théorème de Pythagore et trigonométrie). Dans le cas du tétraèdre régulier, l'angle-dièdre entre deux faces mesure environ 70° (la valeur exacte est $2 \sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) \approx 70.529^\circ$).

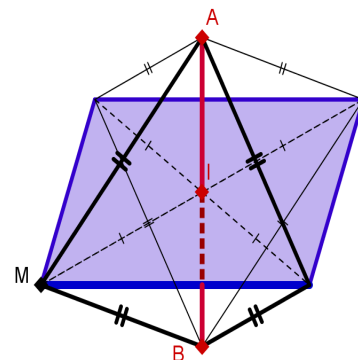
Une autre application de la notion d'orthogonalité est la détermination de la *hauteur* d'une

pyramide. Lorsqu'on utilise la formule calculant le volume d'une pyramide étudiée au collège, on a besoin de la mesure de la hauteur de cette pyramide. Mais, dans l'espace, une hauteur se détermine sur une droite orthogonale à un plan. Il faut donc, pour ce genre de problème, savoir traiter les questions d'orthogonalité. De même, on aura besoin de se poser des questions d'orthogonalité à chaque fois que l'on mesurera la distance entre des plans parallèles (il faudra se situer sur une droite orthogonale aux deux plans) ou bien la distance entre un plan et une droite parallèle à ce plan (il faudra se situer dans un plan orthogonal à la droite qui sera, du coup, perpendiculaire au plan).

Définition 1 : Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points situés à égale distance des extrémités A et B du segment.

Le milieu du segment étant équidistant des extrémités du segment, appartient en particulier au plan médiateur. De plus, si un point M appartient au plan médiateur de $[AB]$, alors MAB est un triangle isocèle de base principale $[AB]$ et donc $[MI]$ est une hauteur du triangle (c'est son axe de symétrie). La droite (AB) étant perpendiculaire aux droites du plan médiateur qui passent par I (et il y en a au moins deux), elle est orthogonale à ce plan. D'où cette deuxième définition qu'on pourrait donner du plan médiateur (et qui rappellera celle de la médiatrice du plan) :

Définition 2 : Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan qui passe par le milieu I du segment et qui est orthogonal à la droite qui contient le segment.



Nous pourrions, parfois, avoir intérêt à reconnaître un plan médiateur, car cela évite les démonstrations, un peu lourdes et répétitives, d'orthogonalité.