Chapitre 5 : Fonctions de Référence

Droites Droite comme courbe représentative d'une fonction affine.	• Tracer une droite dans le plan repéré. • Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite.	
Équations de droites.	• Caractériser analytiquement une droite.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme $y = mx + p$, soit de la forme $x = c$.
Droites parallèles, sécantes.	• Établir que trois points sont alignés, non alignés. • Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes.	On fait la liaison avec la colinéarité des vecteurs.
	• Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.	C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires.
Fonctions de référence Fonctions linéaires et fonctions affines	• Donner le sens de variation d'une fonction affine. • Donner le tableau de signes de $ax + b$ pour des valeurs numériques données de a et b.	On fait le lien entre le signe de $ax + b$, le sens de variation de la fonction et sa courbe représentative.
Variations de la fonction carré, de la fonction inverse.	• Connaître les variations des fonctions carré et inverse. • Représenter graphiquement les fonctions carré et inverse.	Exemples de non-linéarité. En particulier, faire remarquer que les fonctions carré et inverse ne sont pas linéaires.
Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.
Fonctions homographiques.	• Identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique.	Hormis le cas de la fonction inverse, la connaissance générale des variations d'une fonction homographique et sa mise sous forme réduite ne sont pas des attendus du programme.

Dans ce chapitre nous allons étudier 3 types de fonctions : les fonctions affines (déjà vu en 3^ème^), les fonctions polynôme de degré 2 (dont la fonction carré) et les fonctions homographiques (dont la fonction inverse). Les courbes de ces fonctions étant respectivement des droites, des paraboles et des hyperboles, nous aurions pu intituler ce chapitre 'Droites, Paraboles et Hyperboles' sauf que ce serait insister sur l'aspect géométrique (la traduction algébrique en fait partie), alors que le propos du programme est bien l'étude des fonctions (la représentation graphique en fait partie).

1) Fonctions affines

a) Définition et sens de variation

Une fonction f est *affine* si $f : x \mapsto ax+b$ où a et b sont des nombres indépendants de x (qui ne varient pas lorsque x varie). Autrement dit, si une fonction f est telle qu'on a $f(x)=ax+b$, alors f est affine.

Exemples : La fonction $f : x \mapsto 5x-3$ est affine, de coefficient a=5 et b=−3.
De même, la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{2}+3(x-1)$ est affine. En développant et réduisant l'expression de $g(x)$, on trouve en effet $g(x)=\frac{x}{2}+3x-3=x(\frac{1}{2}+3)-3=\frac{7x}{2}-3$ coefficient $a=\frac{7}{2}$ et b=−3.

Remarque : Lorsque le coefficient b d'une fonction affine est nul, la fonction est linéaire. Les fonctions linéaires sont en effet, les fonctions $f : x \mapsto ax$ où a est un nombre indépendant de x.
Le taux d'accroissement d'une fonction affine f entre deux valeurs x_1 et x_2 de la variable x est égal au

coefficient a qu'on appelle aussi *pente de la droite* (la courbe d'une fonction affine est une droite) car $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{a x_2+b-(a x_1+b)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a$. Pour cette raison, le sens de variation d'une fonction affine est constant :

- une fonction affine est croissante lorsque a est positif − c'est le cas pour les fonctions f et g données en exemple plus haut puisque pour f on a a=2, et pour g on a $a=\frac{7}{2}$ − la droite « monte » ce qui est dû au fait que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ et donc, si $x_2-x_1>0$ on a $f(x_2)-f(x_1)>0$ ce qui revient à dire que si $x_1<x_2$, on a $f(x_1)<f(x_2)$.
- une fonction affine est décroissante lorsque a est négatif − c'est le cas pour la fonction h telle que $h(x)=-x+2$ par exemple, pour laquelle on a $a=-1$.

D'une manière générale,

Le *tableau de variation* résume les informations concernant le sens de variation d'une fonction. Pour la fonction f précédente par exemple on tracerait le tableau suivant :

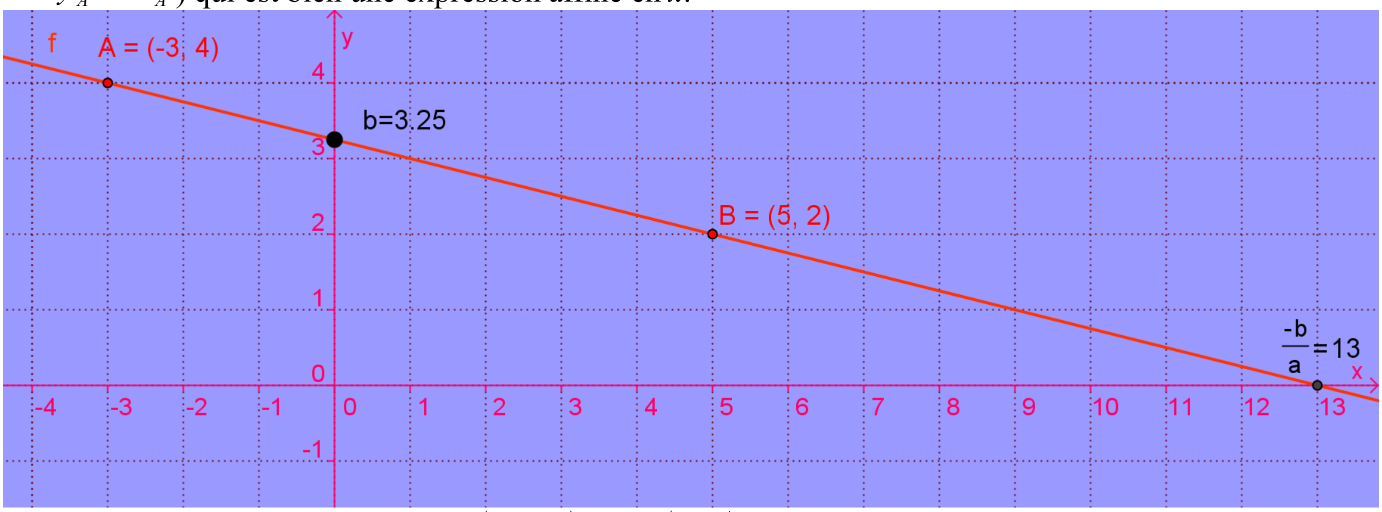
x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$	$+\infty$
$f(x)=5x-3$	↗	0	↗

Dans ce tableau de variation, nous avons ajouté une information qui n'a pas de rapport directe avec le sens de variation : nous avons indiqué l'antécédent de 0 qui est $\frac{3}{5}$. En effet, $f(\frac{3}{5})=5\times(\frac{3}{5})-3=3-3=0$. Pourquoi avons-nous fait cela ? Pour connaître *le signe* (positif ou négatif) de l'expression affine $5x-3$, car f étant croissante, pour $x>\frac{3}{5}$ on aura $f(x)>f(\frac{3}{5})$, c'est-à-dire $f(x)>0$. De même, pour $x<\frac{3}{5}$ on aura $f(x)<f(\frac{3}{5})$, c'est-à-dire $f(x)<0$. Nous avons vu que connaître le signe d'une expression affine était important, par exemple lorsque l'on cherche à résoudre des inéquations du type A×B<0 où A et B sont des expressions affines (on fait dans ce cas un tableau de signes).

b) Représentation graphique et signe d'une expression affine

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non verticale (non parallèle à l'axe des ordonnées) et toutes les droites non verticales représentent une fonction affine particulière.

Si on connait les coordonnées de 2 points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ avec $x_A\neq x_B$, on peut déterminer l'expression de la droite non verticale (AB). Cette expression peut en effet, toujours se mettre sous la forme réduite $y=ax+b$ où a et b sont des nombres indépendants de x (il suffit de calculer $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et ensuite $b=y_A-a x_A$) qui est bien une expression affine en x.



Sur notre illustration, nous avons $A(-3;4)$ et $B(5;2)$. Pour déterminer les coefficients a et b, on peut calculer ainsi : $a=\frac{2-4}{5-(-3)}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$ et $b=4-\frac{-1}{4}\times(-3)=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}=3{,}25$.

Lorsque $a \neq 0$, la droite d'équation $y = a x + b$ coupe les axes des coordonnées en 2 points $A(\frac{-b}{a};0)$ et $B(0;b)$. Ces 2 valeurs, qui sont faciles à lire sur un graphique, permettent aussi de retrouver les coefficients *a* et *b*. Sur notre illustration, la valeur de *b* se lit sur l'axe des ordonnées : on lit $y_0 = b = 3{,}25$. Pour retrouver *a*, à partir du point d'intersection avec l'axe des abscisses, il suffit d'échanger dans l'expression $x_0 = \frac{-b}{a}$ les valeurs de x_0 et de a : $a = \frac{-b}{x_0}$. Ici, on trouve $a = \frac{-3{,}25}{13} = \frac{-1}{4}$.

Rappelons que pour une valeur nulle de *a*, on toujours une droite : l'expression $y = b$ correspond à l'équation d'une droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) coupant l'axe des ordonnées en le point *B* de coordonnées $(0;b)$. Les droites horizontales représentent des fonctions affines constantes qui donnent pour tout réel, toujours la même image : *b*.
Par contre, l'expression $x = a$, qui correspond à l'équation d'une droite verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) coupant l'axe des abscisses en un point de coordonnées $(a;0)$, ne correspond à aucune fonction (ni affine, ni non affine). Les droites verticales ne représentent pas des fonctions car aucun nombre (à part *a*) n'aurait d'image et le nombre *a* en aurait une infinité...

Pour connaître *le signe* de l'expression affine $a x + b$, nous devons savoir si la fonction sous-jacente est croissante ou décroissante (le signe de *a*) et nous devons connaître l'antécédent de 0 (le nombre $\frac{-b}{a}$). On retiendra la règle suivante :

- $a x + b$ est du signe de *a* lorsque $x > \frac{-b}{a}$
- $a x + b$ est du signe contraire de *a* lorsque $x < \frac{-b}{a}$

Le signe de l'expression affine $a x + b$ est généralement présenté dans un tableau spécial appelé *tableau de signes*. La règle que l'on vient dénoncer conduit au tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	**Signe contraire à *a***	**0**	**Signe de *a***

Pour notre expression affine $5x-3$ par exemple, on peut dresser ce tableau :

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$-\infty$
Signe de $5x-3$	$-$	0	+

2) Fonctions Polynômes de degré 2

a) Fonction carré

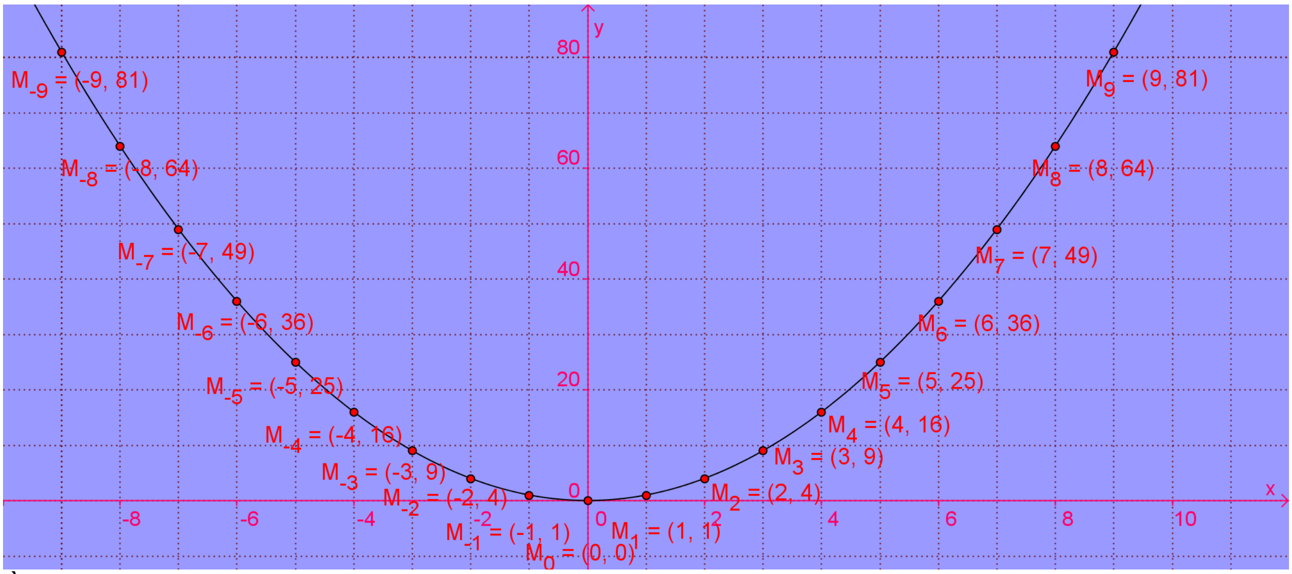
La fonction *carré* est la fonction *f* définie par $f(x) = x^2$.
Cette fonction est définie pour tout réel *x* et l'on a les propriétés immédiates suivantes :
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ avec $f(0) = 0$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0^2$, 0 est le minimum de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = (-x)^2$. La fonction carrée possède ainsi une propriété de « parité » : la fonction carrée est *paire*. Cela se traduit graphiquement par un axe de symétrie verticale pour la courbe représentant la fonction carrée. Les points *M* et *M'* de coordonnées $M(x;x^2)$ et $M'(-x;x^2)$, sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Par exemple, on a sur la courbe de cette fonction les points de coordonnées $(3;9)$ et $(-3;9)$ ou encore les points de coordonnées $(11;121)$ et $(-11;121)$ qui sont symétriques par rapport à l'axe des *y*.

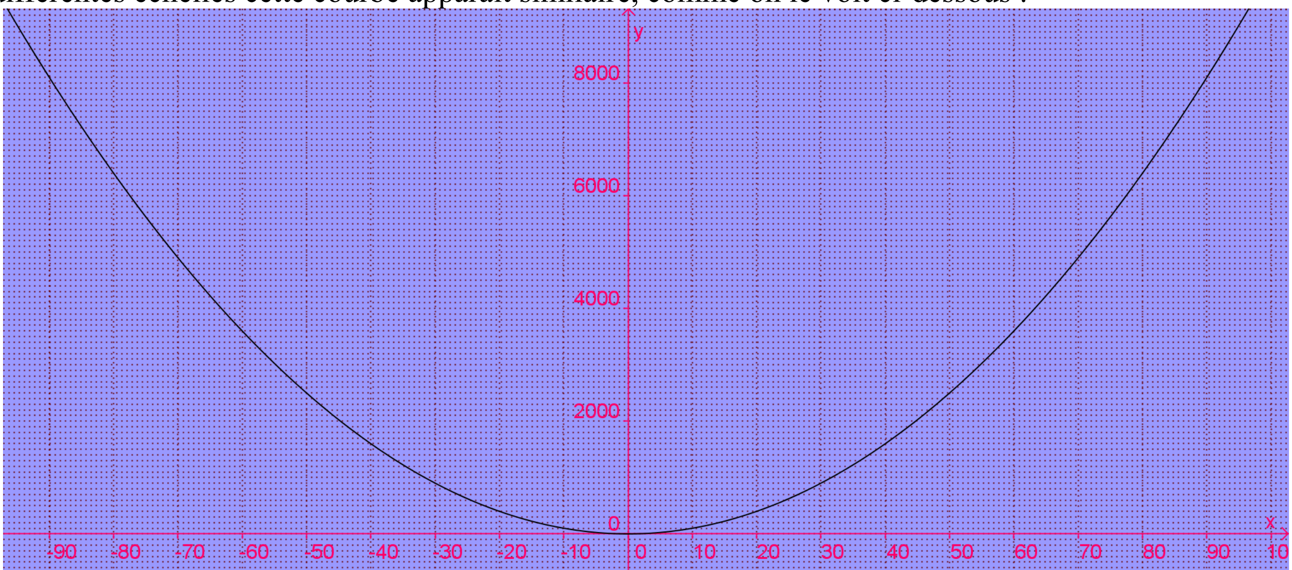
Sens de variation de la fonction carrée : le taux d'accroissement de la fonction carrée entre deux valeurs différentes x_1 et x_2 de la variable *x* est égal à $\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$. Si les 2 valeurs sont prises dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs, ce nombre est positif, la fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$. Au contraire, si les 2 valeurs sont prises dans l'ensemble $\mathbb{R}^-$ des réels positifs, ce nombre est négatif, la fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Le tableau de variation de la fonction carrée synthétise ces informations concernant le sens de variation et le minimum (il ne dit rien concernant la parité et la symétrie subséquente de la courbe) :

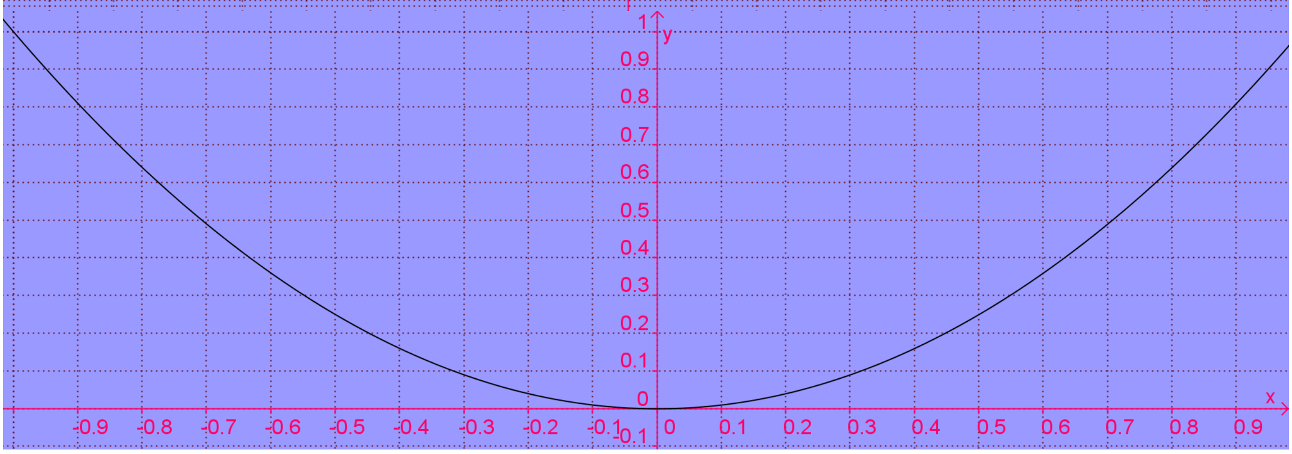
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

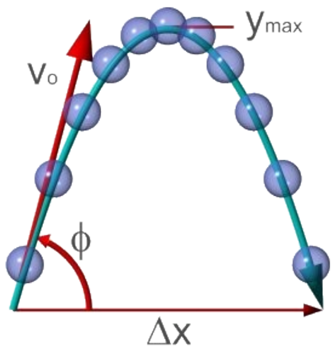
La forme de la courbe de la fonction est appelée *parabole*. On peut tracer cette parabole en reportant dans un graphique les points d'abscisses positives $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;4)$, $(3;9)$, $(4;16)$, $(5;25)$, etc. et ensuite, il suffit de tracer le symétrique de la courbe qui joint ces points à coordonnées entières.



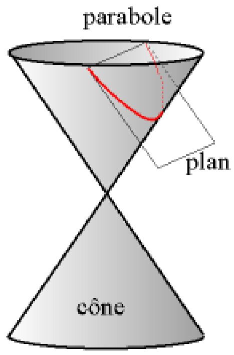
À différentes échelles cette courbe apparaît similaire, comme on le voit ci-dessous :



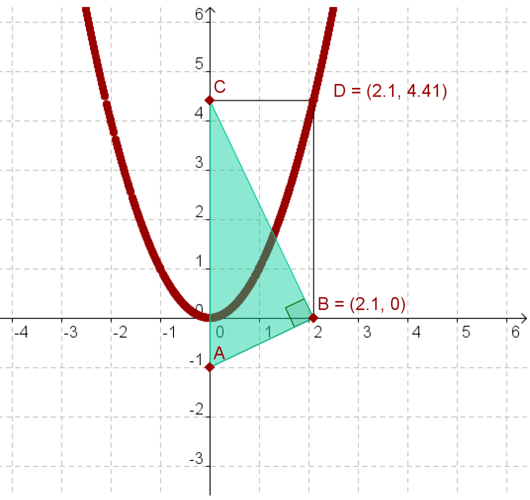




Vous étudierez plus tard les propriétés géométriques de cette courbe, très utilisée en télécommunication (qui ne connait les antennes paraboliques?), qui s'obtient en sectionnant un cône par un plan parallèle à une de ses génératrices comme le montre la figure de droite tirée de Wikipedia.



Lorsqu'on lance en l'air un objet, sa trajectoire suit une forme de parabole, comme on le voit sur l'illustration de gauche qui vient de la même source.



Pour construire géométriquement la parabole de la fonction carrée, on peut procéder ainsi : Placer les points $A(0;-1)$, $B(x;0)$ et $C(0;y_C)$ de manière à ce que le triangle ABC soit rectangle en B. Placer ensuite le point $D(x;y_C)$ c'est-à-dire le 4^ème^ sommet du rectangle $OBDC$. Lorsque B décrit l'axe des abscisses, le point D décrit la parabole d'équation $y=x^2$.
Montrons cela en traduisant l'énoncé par une égalité. Les angles $\widehat{OCB}$ et $\widehat{OBA}$ sont égaux car ce sont les angles complémentaires du même angle aigu $\widehat{OBC}$ dans 2 triangles rectangles différents (OBC et ABC). Les tangentes de ces angles égaux sont égaux, et comme $\tan\widehat{OCB}=\frac{OB}{OC}$ et $\tan\widehat{OBA}=\frac{OA}{OB}$, on en déduit que $\frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OB}$, soit $OB^2=OA\times OC$, soit encore, avec les notations de l'énoncé, $x^2=1\times y_c$. L'ordonnée de C et de D vaut donc x^2.

b) Définition et Propriétés des fonctions polynômes de degré 2

Définition : Les polynômes de degré 2 sont des expressions algébriques de forme $a\,x^2+b\,x+c$ où *a, b* et *c* sont des nombres indépendants de *x* (qui ne varient pas lorsque *x* varie). Autrement dit, si une fonction *f* est telle qu'on a, pour tout réel *x*, $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$, avec $a\neq 0$, alors *f* est une fonction polynôme de degré 2. On définira de la même manière les polynômes de degré 1 (expressions affines), les polynômes de degré 3 ou de degré supérieur. Le *degré* d'un polynôme étant le plus grand exposant de l'expression polynomiale.

Exemples : La fonction $f: x \mapsto x^2+x-1$ est une fonction polynôme de degré 2, de coefficient a=1 et b=1 et c=−1. De même, la fonction $g: x \mapsto \frac{x^2}{3}-3$ est une fonction polynôme de degré 2, de coefficient a= $\frac{1}{3}$, b=0 et c=−3. La fonction $h: x \mapsto 3(2x+1)(1-x)$ est aussi une fonction polynôme de degré 2. En développant et réduisant l'expression de $h(x)$, on trouve en effet les coefficients a= -6 , b=3 et c=3.

Transformation d'écriture : Comme on l'a vu dans le chapitre sur les transformations algébriques, les polynômes de degré 2 peuvent toujours s'écrire sous la forme $\alpha(x+\beta)^2+\gamma$. Par exemple $f(x)=x^2+x-1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$, et on constate qu'alors $\alpha=1$; $\beta=\frac{1}{2}$; $\gamma=\frac{-5}{4}$.
D'une façon générale, on montre facilement que $\alpha=a$ et $\beta=\frac{b}{2a}$:

$$a\,x^2+b\,x+c=a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right).$$

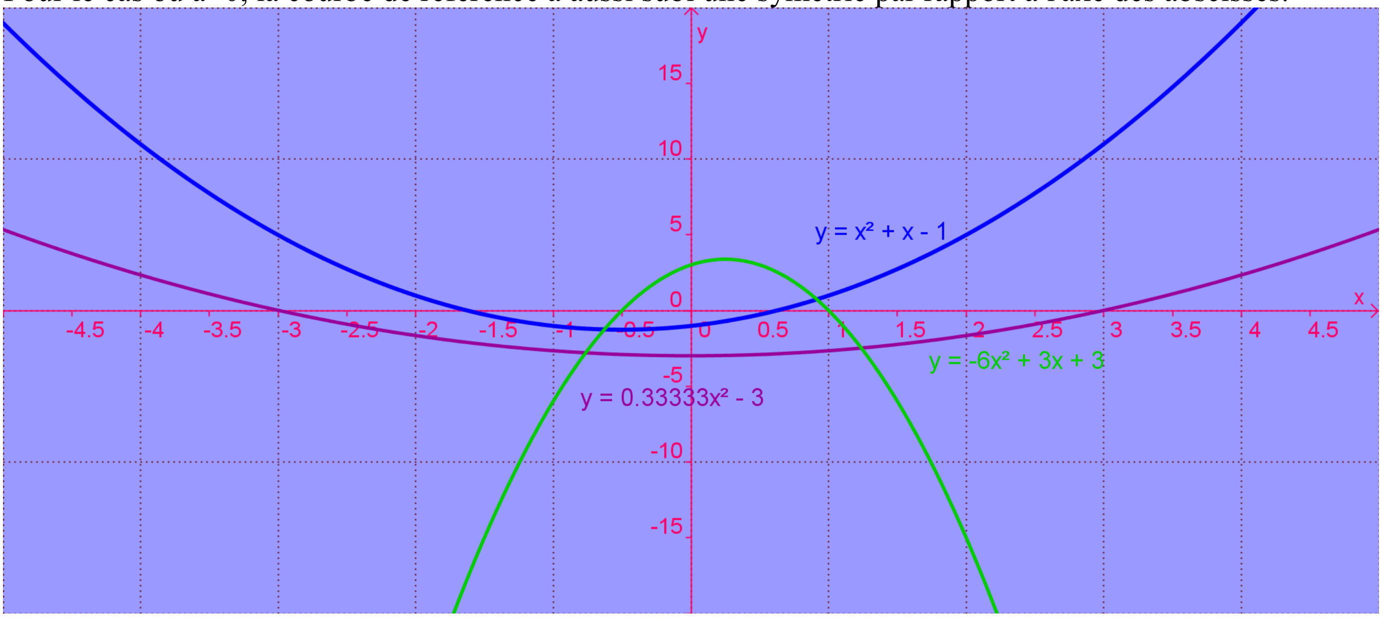
Pour trouver γ, il suffira de réduire l'expression $a\left(-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$. Cette forme permet de factoriser l'expression du 2^d^ degré, lorsque $\gamma<0$. Par exemple, ici $f(x)=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}=(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})$. Nous allons voir que l'on peut aussi, grâce à cette forme, montrer les différentes propriétés d'une fonction polynôme de degré 2. Le grand avantage de cette forme est que la variable *x* n'apparait qu'à un seul endroit (au lieu de 2 dans la forme initiale donnée par la définition).

Propriétés (admises) : Les fonctions polynômes $f_{a,b,c}(x)=a\,x^2+b\,x+c$ de degré 2 admettent un minimum γ lorsque $a>0$, un maximum γ lorsque $a<0$. Le sens de variation d'une telle fonction est alors donné par un des 2 tableaux suivants :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$a x^2+b x+c$, avec $a>0$		↘	γ	↗	

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$a x^2+b x+c$, avec $a<0$		↗	γ	↘	

La forme de la courbe représentant une fonction polynôme de degré 2 est une parabole. Elle a la même forme que celle de la fonction carrée, sauf qu'elle a été aplatie ou allongée par l'effet des coefficients *a, b* et *c*. Ces coefficients ont également déplacé le minimum (pour a>0) et l'axe de symétrie vertical de la courbe. Pour le cas où a<0, la courbe de référence a aussi subi une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



La courbe représentant la fonction *f* (en bleu) passe par un minimum pour $x=-\beta=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2}$ et ce minimum est égal à $\gamma=a(-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a})=-(\frac{1}{2})^2-1=\frac{-5}{4}$. La courbe représentant la fonction *h* (en vert, *a*= -6 , *b*=3 et c=3) passe par un maximum pour $x=-\beta=\frac{-3}{2\times(-6)}=\frac{1}{4}$ et ce maximum est égal à $\gamma=(-6)(-(\frac{1}{4})^2+\frac{3}{-6})=(-6)(\frac{-1}{16}-\frac{1}{2})=6(\frac{-1}{16}-\frac{8}{16})=\frac{9\times6}{16}=\frac{27}{8}=3{,}375$.

Bien sûr, on peut aussi calculer la valeur du maxi/minimum en cherchant l'image de la valeur de $x=-\beta=\frac{-b}{2a}$. Pour la fonction *h*, on trouve $\gamma=h(\frac{1}{4})=3(\frac{2\times1}{4}+1)(1-\frac{1}{4})=3(\frac{3}{2})(\frac{3}{4})=\frac{3\times3\times3}{2\times4}=\frac{27}{8}=3{,}375$.

<u>Sens de variation</u> : Si on veut prouver que le sens de variation d'une fonction polynôme de degré 2 est bien celui qu'annonce la propriété admise ci-dessus, il faut revenir au taux d'accroissement de la fonction entre deux valeurs x_1 et x_2 de la variable *x*. C'est là qu'on va utiliser la forme transformée :

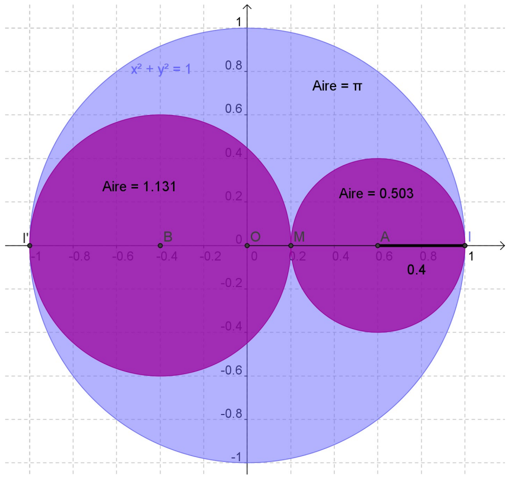
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha(x_2+\beta)^2+\gamma-(\alpha(x_1+\beta)^2+\gamma)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha((x_2+\beta)^2-(x_1+\beta)^2)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha((x_2+\beta+x_1+\beta)(x_2+\beta-x_1-\beta))}{x_2-x_1}=\frac{\alpha((x_2+x_1+2\beta)(x_2-x_1))}{x_2-x_1}=\alpha(x_2+x_1+2\beta) .$$

Par exemple, pour la fonction *f* définie plus haut, on a $f(x)=x^2+x-1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$, le taux de variation est égal à x_2+x_1+1 , tout simplement. On pourra en déduire que si $x_1+\frac{1}{2}>0$ et $x_2+\frac{1}{2}>0$ alors $x_2+x_1+1>0$ ce qui signifie que la fonction *f* est croissante sur l'intervalle $[-\frac{1}{2};+\infty[$, ce que prévoyait notre règle.

La discussion générale sur le sens de variation d'une fonction polynôme de degré 2 repose donc sur le signe de l'expression $\alpha(x_2+x_1+2\beta)=\alpha((x_2+\beta)+(x_1+\beta))$ qui dépend à la fois de α que de β :

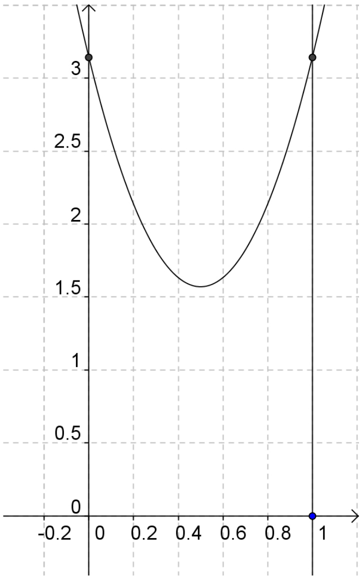
- Lorsque $\alpha>0$, le taux de variation a le signe de $(x_2+\beta)+(x_1+\beta)$ qui, pour x_1 et x_2 choisis dans $[-\beta;+\infty[$ est positif et, pour x_1 et x_2 choisis dans $]-\infty;-\beta]$ est négatif. Donc la fonction polynôme de degré 2 est décroissante sur $]-\infty;-\beta]$, puis croissante sur $[-\beta;+\infty[$ et elle passe par un minimum pour $x=-\beta$.
- Lorsque $\alpha<0$, le taux de variation a le signe contraire de $(x_2+\beta)+(x_1+\beta)$ et donc la fonction est d'abord croissante, puis décroissante, et elle admet un maximum pour $x=-\beta$.

Remarque : la symétrie verticale de la parabole représentant une fonction polynôme de degré 2 peut être exploitée pour déterminer plus simplement l'abscisse x_0 du minimum/maximum : On commence par déterminer les antécédents de *c* par la fonction *f* telle que $f(x)=ax^2+bx+c$ (on pourrait dire aussi qu'on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f représentant *f* et de la droite d'équation $y=c$). Pour cela on doit résoudre l'équation $ax^2+bx=0$, soit $ax(x+\frac{b}{a})=0$ qui conduit aux solutions $x_1=0$ et $x_2=\frac{-b}{a}$. Comme ces 2 solutions sont symétriques par rapport à la droite verticale d'équation $x=x_0$, on en déduit que le milieu entre les points d'abscisses x_1 et x_2 est sur cette droite, et donc que $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.



Problèmes contenant une fonction polynôme de degré 2 :

α) Dans un disque de rayon 1, on insère 2 disques tangents entre eux de sorte qu'ils soient dans la configuration de la figure ci-contre où les 3 centres sont alignés. On demande d'étudier les variations de l'aire globale des 2 disques intérieurs lorsqu'on déplace le point de contact *M* entre ces disques.



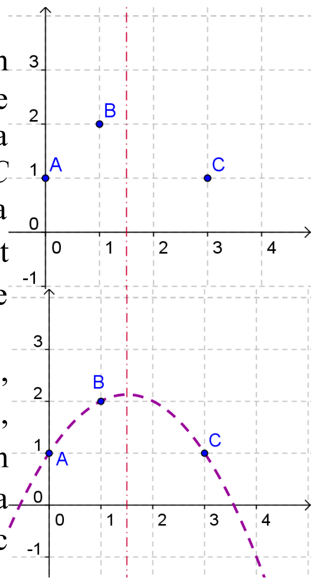
On note $AI=x$, le rayon du disque de centre *B* est donc $BM=(2-2x)\div 2=1-x$. L'aire des 2 disques intérieurs vaut :

$A(x)=\pi x^2+\pi(1-x)^2=\pi(2x^2-2x+1)$.

Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2 que l'on peut mettre sous la forme $A(x)=2\pi(x^2-x+\frac{1}{2})=2\pi((x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})=2\pi(x-\frac{1}{2})^2+\frac{\pi}{2}$.

Le coefficient $\alpha=2\pi$ étant positif, la fonction est décroissante puis croissante, le maximum étant atteint pour $x=-\beta=-(\frac{-1}{2})=\frac{1}{2}=0{,}5$. On peut en conclure que notre aire globale des 2 disques est maximale lorsque *M* est au centre du grand disque, les 2 disques intérieurs étant tangents.

β) On donne 3 points non alignés $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$. Peut-on déterminer une fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique passe par ces 3 points ? Pour se fixer les idées, peut-on déterminer l'équation de la parabole passant par $A(0;1)$, $B(1;2)$ et $C(3;1)$? Ici, c'est facile, car *A* et *C* ont la même ordonnée : ils sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie de la parabole qui a pour équation $x=x_0=\frac{-b}{2a}$. Donc $x_0=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3}{2}$ et $\frac{-b}{2a}=\frac{3}{2}$, soit $b=-3a$. Pour aller plus loin, écrivons les relations liant l'abscisse et l'ordonnée de ces points :



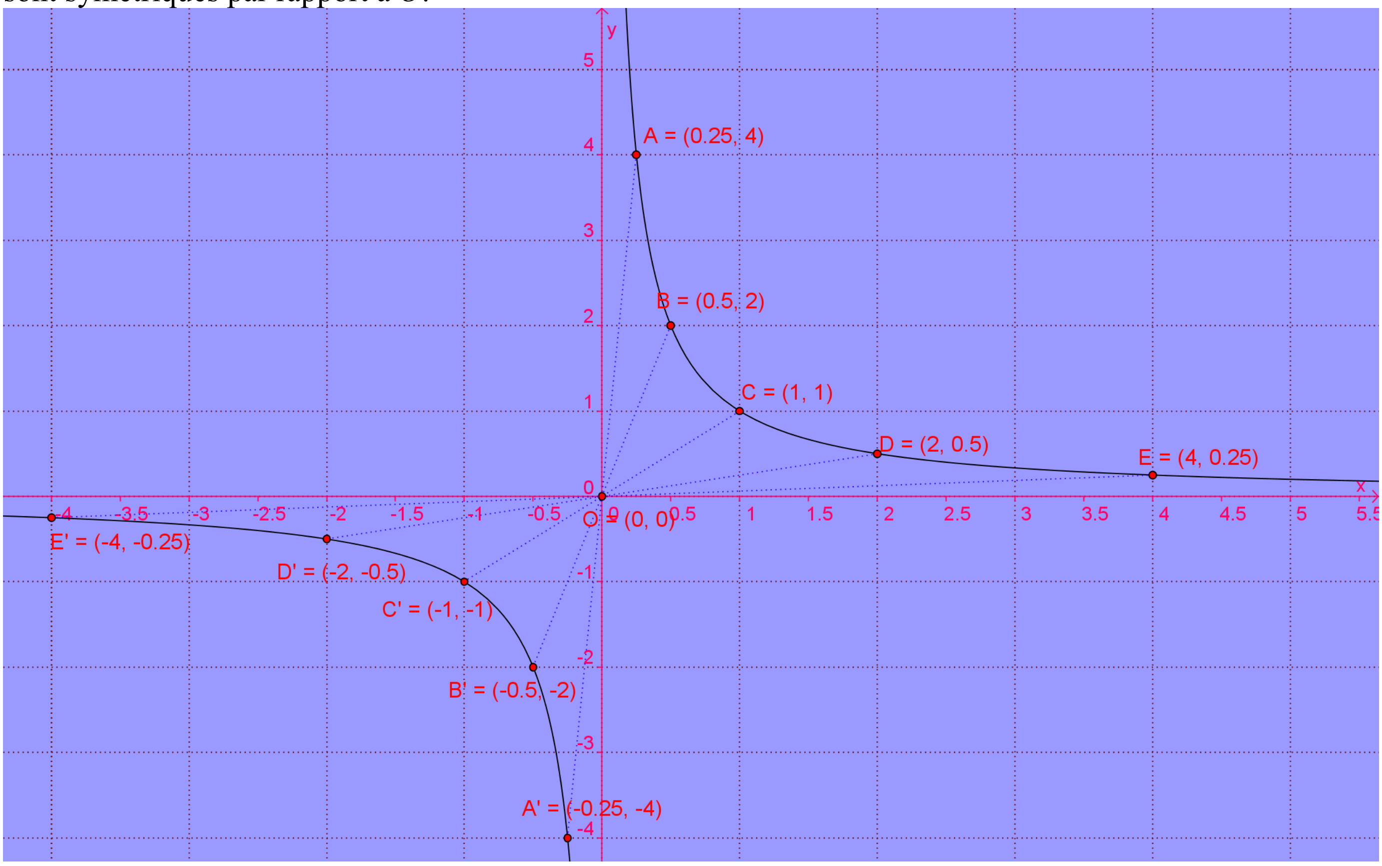
$y_A=ax_A^2+bx_A+c$ s'écrit $1=c$, de même $y_B=ax_B^2+bx_B+c$ s'écrit $2=a+b+c$, et $y_C=ax_C^2+bx_C+c$ s'écrit $1=9a+3b+c$. En remplaçant *c* par 1 et *b* par $-3a$, on obtient avec la 2^ème^ équation : $2=a-3a+1$, soit $a=\frac{-1}{2}$. La 3^ème^ équation donne, quant-à elle : $1=9a+3(-3a)+1$, soit $0=0$ ce qui est toujours vrai. On a donc $a=\frac{-1}{2}$, $b=-3a=\frac{3}{2}$ et $c=1$. L'équation de la parabole est donc $y=\frac{-x^2}{2}+\frac{3x}{2}+1=-0{,}5x^2+1{,}5x+1$.

3) Fonctions Homographiques

a) Fonction inverse

La fonction *inverse* est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Cette fonction est définie pour tout réel non nul x et l'on a les propriétés immédiates suivantes : $\forall x>0, \frac{1}{x}>0$ et $\forall x<0, \frac{1}{x}<0$. 0 est donc à la fois un minimum jamais atteint sur $\mathbb{R}^+$ et un maximum jamais atteint sur $\mathbb{R}^-$.

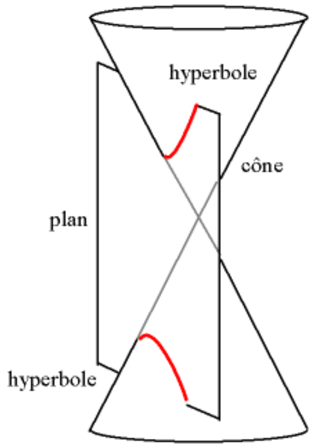
$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$. Pour cette raison, on dit que la fonction inverse est *impaire* : 2 nombres opposés ont des inverses opposées. Cela se traduit sur la courbe par un centre de symétrie : l'origine du repère, le point O de coordonnées (0;0) est le centre de symétrie de cette courbe en deux morceaux qu'on appelle une *hyperbole*. Les points M et M' de coordonnées $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$ et $M'\left(-x;-\frac{1}{x}\right)$ sont symétriques par rapport à O ou encore le milieu de $[MM']$ est le point O. Par exemple, on a sur la courbe de cette fonction les points de coordonnées $(2;0{,}5)$ et $(-2;-0{,}5)$ ou encore les points de coordonnées $(10;0{,}1)$ et $(-10;-0{,}1)$ qui sont symétriques par rapport à O.



<u>Sens de variation</u> de la fonction inverse : le taux d'accroissement de la fonction inverse entre deux valeurs différentes x_1 et x_2 de la variable x est égal à $\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{\frac{(x_1-x_2)}{x_1 x_2}}{x_2-x_1}=\frac{-1}{x_1 x_2}$. Si les 2 valeurs sont prises dans l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs, ce nombre est négatif, la fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ comme on le voit sur la courbe. Si les 2 valeurs sont prises dans l'ensemble $\mathbb{R}^-$ des réels négatifs, ce nombre est toujours négatif (car le produit de 2 nombres négatifs est positif), la fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Le tableau de variation de la fonction inverse synthétise ces informations concernant le sens de variation et le minimum/maximum (il ne dit rien concernant l'imparité et la symétrie subséquente de la courbe) :

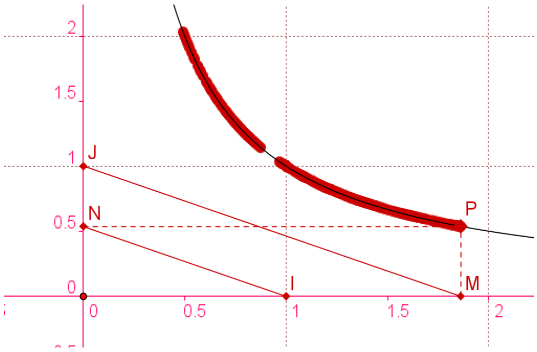
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

Remarque sur les extrémités des branches de l'hyperbole (il y en a 4) : la courbe se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x augmente vers des valeurs infiniment grandes (ou petites). Mais jamais elle ne touchera cet axe car l'inverse d'un nombre infiniment grand est un nombre infiniment proche de zéro, supérieur à 0 et jamais égal à 0. On a, par exemple $\frac{1}{10}=10^{-1}=0{,}1$; $\frac{1}{100}=10^{-2}=0{,}01$; $\frac{1}{1000}=10^{-3}=0{,}001$; $\frac{1}{10^6}=10^{-6}=0{,}000001$. On dit que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale pour résumer cela (asymptote ; droite vers laquelle se rapproche de plus en plus la courbe à une des bornes ouverte de l'ensemble de définition). Il y a une autre asymptote, verticale celle-là, lorsque x se rapproche de 0. La variable ne peut jamais prendre la valeur 0 (c'est une borne ouverte de l'ensemble de définition). Mais quand x se rapproche de 0, par valeur inférieure (négative) ou supérieure (positive), la courbe se rapproche de l'axe des ordonnées, la droite d'équation x=0. Ainsi les deux axes de coordonnées sont des asymptotes pour la courbe de la fonction inverse.



Pour information, on rencontre une hyperbole lorsqu'on coupe un cône par un plan coupant les 2 cônes opposés (voir figure) à condition de ne pas être parallèle à une génératrice (car alors la trace du cône serait une parabole, voir plus haut).

Pour construire géométriquement les branches de l'hyperbole de la fonction inverse, on peut procéder ainsi : Placer les points $I(1;0)$, $J(0;1)$, $M(x;0)$ et $N(0;y_N)$ de manière à ce que les *droites* (*IN*) et (*JM*) soient parallèles. Placer ensuite le point $P(x;y_N)$ c'est-à-dire le 4^ème^ sommet du rectangle *NOMP*. Lorsque M décrit l'axe des abscisses, le point P décrit l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$.



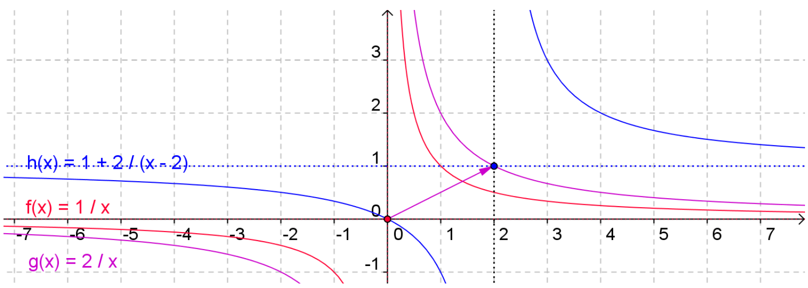
Montrons cela en traduisant l'énoncé par une égalité. Le théorème de Thalès permet d'affirmer que les rapports $\frac{OI}{OM}$ et $\frac{ON}{OJ}$ sont égaux. Par conséquent, $OI \times OJ = OM \times ON$ et donc, avec les notations de l'énoncé, $1=x\times y_N$, soit $y_N=\frac{1}{x}$. L'ordonnée de N et de P vaut donc $\frac{1}{x}$. Notons encore ce fait remarquable : les coordonnées (x;y) d'un point quelconque de la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$ ont un produit constant. Autrement dit, l'hyperbole de la fonction inverse est l'ensemble des points dont le produit des coordonnées vaut 1.

b) Fonctions homographiques

Une fonction f est dite homographique si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des nombres indépendants de x et c est non nul (car sinon, la fonction f est affine). Cette fonction est définie pour tout réel différent de la valeur qui annule le dénominateur de cette « fraction » soit pour x solution de $cx+d=0$, c'est-à-dire pour $x=\frac{-d}{c}$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ que l'on note aussi $]-\infty;-\frac{d}{c}[\cup]-\frac{d}{c};+\infty[$.

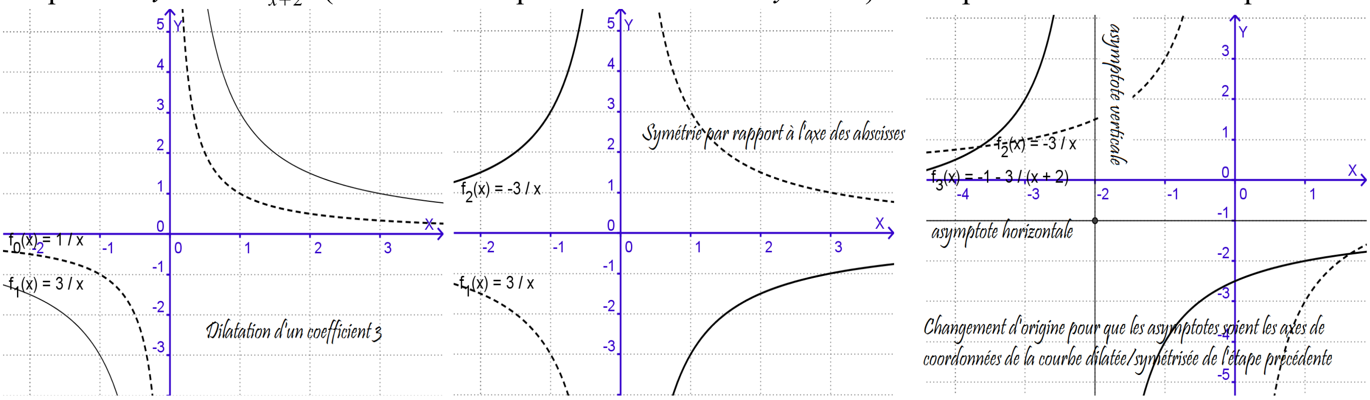
Exemples : la fonction $f : x \mapsto 1+\frac{2}{x-2}$ est une fonction homographique qui n'est pas définie pour x=2. On peut écrire en effet $f(x)=\frac{x-2}{x-2}+\frac{2}{x-2}=\frac{x-2+2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$. Les coefficients a, b, c et d sont 1, 0, 1 et -2 .
La fonction inverse est aussi, bien sûr, une fonction homographique de coefficients 0, 1, 1 et 0.

Changement d'origine : Les fonctions homographiques entretiennent avec la fonction inverse une relation de parenté car, moyennant quelques transformations, on peut retrouver les caractéristiques de la fonction inverse dans les fonctions homographiques. La fonction f de notre exemple est représentée par une courbe d'équation $y=1+\frac{2}{x-2}$, relation qui peut s'écrire $y-1=\frac{2}{x-2}$ et, si l'on note $X=x-2$ et $Y=y-1$, on obtient l'équation $Y=\frac{2}{X}$ qui est

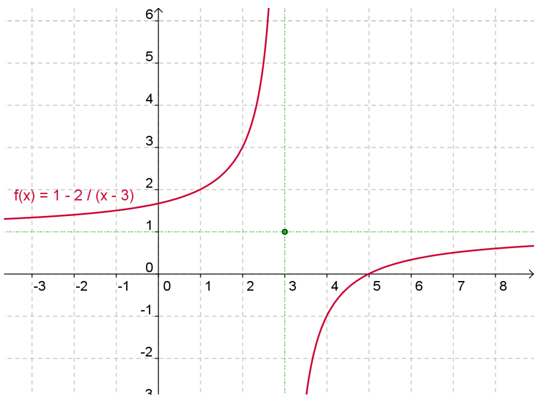


très proche de la courbe représentant la fonction inverse. Les transformations $X=x-2$ et $Y=y-1$ correspondent à une translation : au lieu que le centre de symétrie soit le point de coordonnées (x=0;y=0), ce sera le point de coordonnées (X=0;Y=0), c'est-à-dire (x=2;y=1). On a ainsi effectué un changement d'origine. C'est comme si les axes de coordonnées s'étaient déplacés de leur position habituelle, pour prendre la place des asymptotes de la courbe (ces droites vers lesquelles se rapproche la courbe aux bornes de l'ensemble de définition). On verra cela un peu plus loin, mais les deux asymptotes de notre courbe ont pour équations : y=1 pour l'asymptote horizontale (Y=0 avec la nouvelle origine) et x=2 pour l'asymptote verticale (X=0 avec la nouvelle origine).
La 2ème transformation, qui permet de passer de la courbe d'équation $Y=\frac{2}{X}$ à celle d'équation $Y=\frac{1}{X}$ est un réduction de coefficient $\frac{1}{2}$ concernant les ordonnées uniquement (on ne touche pas à l'abscisse). Dans l'autre sens (de $Y=\frac{1}{X}$ à $Y=\frac{2}{X}$) il s'agit d'une dilatation des ordonnées (augmentation) de coefficient 2. Voyez plutôt la figure ci-dessus qui montre l'hyperbole de la fonction inverse en rouge (d'équation $y=\frac{1}{x}$) dilatée verticalement d'un coefficient 2 pour donner la courbe mauve (d'équation $y=\frac{2}{x}$), puis translatée pour donner la courbe bleue (d'équation $y-1=\frac{2}{x-2}$) qui représente la fonction f.

<u>Autre exemple</u> : On peut ainsi, à partir de la courbe de la fonction inverse, moyennant une certaine dilatation verticale de coefficient λ, tracer simplement et sans aucun calcul la courbe de n'importe quelle fonction homographique. Par exemple, supposons que nous voulions tracer la courbe de la fonction f définie par $f(x)=-1-\frac{3}{x+2}$. Commençons par écrire l'équation de la courbe $y=-1-\frac{3}{x+2}$ sous sa forme simplifiée (on prend $X=x+2$ et $Y=y+1$) : $y+1=\frac{-3}{x+2}$ s'écrit $Y=\frac{-3}{X}$. Il faut faire subir à la courbe de la fonction inverse une dilatation de coefficient -3. Cela se fait en deux étapes : on multiplie les ordonnées par 3 et on prend le symétrique par rapport à l'axe des abscisses (à cause du coefficient négatif, ce sont les opposées des ordonnées dilatées qu'il nous faut). Une fois que l'on a tracé la courbe d'équation $Y=\frac{-3}{X}$, on place l'origine pour que les axes de coordonnées de $Y=\frac{-3}{X}$ soit les asymptotes de la courbe d'équation $y=-1-\frac{3}{x+2}$ (les droites d'équations $x=-2$ et $y=-1$). C'est plus difficile à écrire qu'à faire.



<u>Cas particulier</u> : lorsque $ad-bc=0$, c'est-à-dire lorsque $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, on a $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})}=\frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{b}{a})}=\frac{a}{c}$. La fonction homographique f est alors une *fonction homographique dégénérée en fonction constante*. Elle a tout d'une fonction constante, sauf qu'elle n'est pas définie pour $x=\frac{-d}{c}$ (sa courbe est une droite d'équation $y=\frac{a}{c}$ qui aura un trou minuscule, invisible pour cette valeur de x).



<u>Sens de variation</u> : On peut étudier le sens de variation d'une fonction homographique lorsque l'expression $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ a été mise sous la forme $f(x)=\alpha+\frac{\beta}{cx+d}$. Pour effectuer cette transformation préalable, on peut identifier les coefficients α et β car $\alpha+\frac{\beta}{cx+d}=\frac{\alpha(cx+d)+\beta}{cx+d}=\frac{\alpha cx+(\alpha d+\beta)}{cx+d}$ et donc, on doit avoir $a=\alpha c$ et $b=\alpha d+\beta$, ce qui conduit à $\alpha=\frac{a}{c}$ et $\beta=b-\alpha d=\frac{bc-ad}{c}$. On peut même aller plus loin et exprimer la

fonction homographique f sous la forme $f(x)=\alpha+\frac{\lambda}{x+\gamma}$. Pour cela il faut que $\frac{\lambda}{x+\gamma}=\frac{\beta}{cx+d}$, soit que $\lambda(cx+d)=\beta(x+\gamma)$ et donc $\lambda c=\beta$, soit $\lambda=\frac{\beta}{c}=\frac{bc-ad}{c^2}$ et aussi $\lambda d=\beta\gamma$, soit $\gamma=\frac{\lambda d}{\beta}=\frac{d}{c}$. Sous cette forme finale (on la dit « canonique ») on comprend mieux pourquoi :

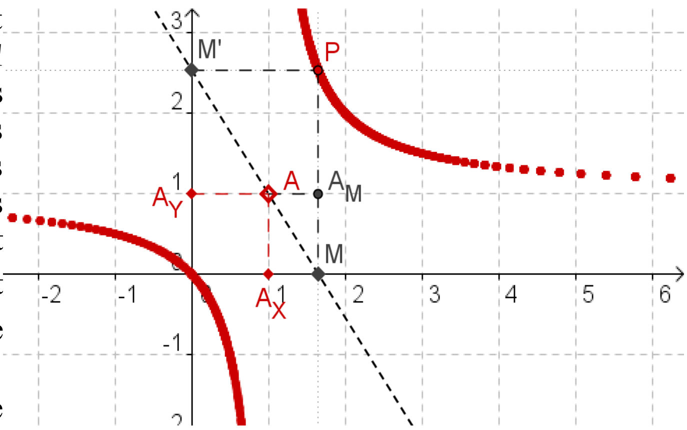
- Lorsque $\lambda>0$ la fonction homographique est décroissante sur $]-\infty;-\gamma[$ et décroissante sur $]-\gamma;+\infty[$. C'est le cas de la fonction inverse ou de la fonction f de notre 1[er] exemple.
- Lorsque $\lambda<0$ la fonction homographique est croissante sur $]-\infty;-\gamma[$ et croissante sur $]-\gamma;+\infty[$. C'est le cas de la fonction g opposée de l'inverse $g : x \mapsto \frac{-1}{x}$. C'est aussi le cas pour la fonction $h : x \mapsto 1-\frac{2}{x-3}$ qui est illustrée ci-contre.

<u>Justification</u> : Pour étudier le sens de variation, on calcule le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2. D'une façon générale, ce rapport est égal à $\frac{\alpha+\frac{\lambda}{x_1+\gamma}-(\alpha+\frac{\lambda}{x_2+\gamma})}{x_1-x_2}=\frac{\frac{\lambda(x_2+\gamma)}{(x_1+\gamma)(x_2+\gamma)}-(\frac{\lambda(x_1+\gamma)}{(x_1+\gamma)(x_2+\gamma)})}{x_1-x_2}=\frac{\lambda(x_2-x_1)}{(x_1+\gamma)(x_2+\gamma)(x_1-x_2)}=\frac{-\lambda}{(x_1+\gamma)(x_2+\gamma)}$. Sur chacun des intervalles constituant l'ensemble de définition, soit sur $]-\infty;-\gamma[$ et sur $]-\gamma;+\infty[$, le dénominateur de cette fraction est positif car c'est le produit de deux nombres de même signe. Comme on multiplie ce nombre positif par $-\lambda$, le taux d'accroissement aura le signe opposé de λ. La fonction homographique sera croissante sur ces deux intervalles de définition si $\lambda<0$ et décroissante si $\lambda>0$.

<u>Asymptotes et limites aux bornes ouvertes de l'ensemble de définition</u> : Un autre renseignement important que nous apporte la forme canonique est la détermination aisée des asymptotes à la courbe. Dans l'expression $y=\alpha+\frac{\lambda}{x+\gamma}$, le morceau dépendant de x est $\frac{\lambda}{x+\gamma}$. Lorsque x devient infini (positivement ou négativement), ce morceau devient de plus en plus proche de 0 et l'on se rapproche ainsi de plus en plus de la droite $y=\alpha$ qui est l'asymptote horizontale. L'autre asymptote est verticale, d'équation $x=-\gamma$. La courbe s'approche de cette droite de la façon suivante : quand x s'approche de la valeur interdite, y se rapproche de l'infini. Le tracé des asymptotes facilite celui de la courbe, les informations peuvent aussi être ajoutées dans le tableau de variation de la fonction. Voici par exemple le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x)=-1-\frac{3}{x+2}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$-1-\frac{3}{x+2}$	-1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	-1

<u>Projection centrale et homographie</u> : Soit A un point fixe, disons que A est le point de coordonnées (1;1). Prenons un point M variable sur l'axe des abscisses et projetons-le sur l'axe des ordonnées en passant par A (voir figure), cela nous donne le point M'. Avec les notations de la figure, en notant $(x;y)$ les coordonnées du point P tel que $OMPM'$ soit un rectangle, les triangles $AM'A_Y$ et AMA_X ont des côtés proportionnels (théorème de Thalès dans la configuration $AM'A_Y$ et AMA_M). On en déduit la relation $\frac{y-y_A}{y_A}=\frac{x_A}{x-x_A}$ qui peut aussi s'écrire $(y-y_A)\times(x-x_A)=x_A\times y_A$. Cette relation montre que le produit $(y-y_A)\times(x-x_A)$ reste constant (comme pour la fonction inverse où le produit xy vaut 1). Lorsque M décrit l'axe des abscisses, le point P décrit donc une hyperbole d'équation $y=\frac{x_A\times y_A}{x-x_A}+y_A$ (en rouge sur notre figure).



4) <u>Autres fonctions de référence</u>

a) <u>Fonction valeur absolue</u>

La fonction *valeur absolue* est la fonction qui supprime le signe d'un nombre relatif. Elle est notée avec des barres verticales faisant office de parenthèses. On peut lui trouver un *équivalent algébrique* en élevant un nombre au carré puis en prenant la racine carrée de ce nombre (toujours définie car le carré d'un nombre réel est toujours positif). Ainsi $|x| = \sqrt{x^2}$. La fonction *valeur absolue* est donc définie par $x \mapsto \sqrt{x^2}$.

Exemples : $|-3|=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ (le passage par la racine carrée n'est pas obligatoire...) ; $|-2{,}56|=2{,}56$ $|1{,}23|=1{,}23$; $|\pi-3|=\pi-3$ alors que $|3-\pi|=\pi-3$ car $\pi-3>0$ alors que $3-\pi<0$.

Plus généralement on a la propriété suivante, qui peut faire office de définition pour la valeur absolue : $|x|=x$, si $x>0$ et $|x|=-x$, si $x<0$.

Autres propriétés de la valeur absolue :
$\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq 0$, la fonction valeur absolue est *positive* (elle admet 0 comme minimum).

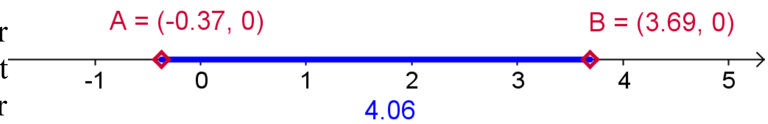
$|-x|=|x|$ la fonction est *paire*, son graphe (sa courbe représentative) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car les points de coordonnées ($x\,;|x|$) et ($-x\,;|x|$) sont de part et d'autre de cet axe.

$\forall x_1\in\mathbb{R}\,\forall x_2\in\mathbb{R}, |x_1 x_2|=|x_1||x_2|$ et $|\frac{x_1}{x_2}|=\frac{|x_1|}{|x_2|}$. S'il s'agit d'enlever le signe d'un produit (ou d'un quotient), on peut bien l'enlever avant d'effectuer le produit (ou le quotient).

Par contre, $|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|$. La somme des valeurs absolues de 2 nombres n'est égale à la valeur absolue de la somme de ces nombres uniquement lorsque ces nombres sont de même signe (car sinon on doit retrancher les valeurs absolues de ces nombres pour en calculer la somme).
Exemples : $|3+5|=|8|=8$ et $|3|+|5|=3+5=8$ donc $|3+5| = |3|+|5|$
$|-3+(-5)|=|-8|=8$ et $|-3|+|-5|=3+5=8$ donc $|-3+(-5)| = |-3|+|-5|$
$|-3+5|=|2|=2$ et $|-3|+|5|=3+5=8$ donc $|-3+5| < |-3|+|5|$
$|3+(-5)|=|-2|=2$ et $|3|+|-5|=3+5=8$ donc $|3+(-5)| < |3|+|-5|$

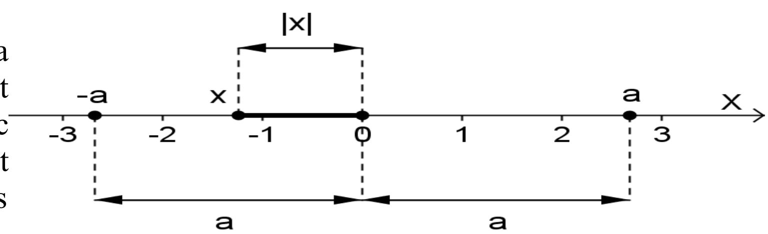
Dans le cas où $a>0$, on peut traduire l'inégalité $|x|<a$ par l'encadrement $-a<x<a$. Ceci vient du fait que si $x>0$ alors $|x|<a$ s'écrit $x<a$ et si $x<0$ alors $|x|<a$ s'écrit $-x<a$, soit $x>-a$ ou encore $-a<x$. Dans le cas où $a<0$, l'inégalité $|x|<a$ n'est jamais vérifiée.
De même, l'inégalité $|x|>a$ se traduit, dans le cas où $a>0$ par la condition $x>a$ ou $x<-a$. Dans le cas où $a<0$, l'inégalité $|x|>a$ est toujours vérifiée.

Interprétation en terme de distance : la valeur absolue de la différence entre 2 abscisses est égale à la distance entre les points repérés par ces abscisses.

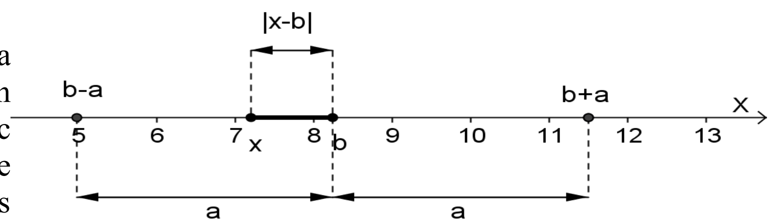


Sur notre illustration , $AB=|3{,}69-(-0{,}37)|=|3{,}69+0{,}37|=|4{,}06|=4{,}06$ mais nous aurions pu tout aussi bien calculer $AB=|-0{,}37-3{,}69|=|-4{,}06|=4{,}06$. Autrement dit, on ne se soucie pas de l'ordre des points sur la droite (l'ordre de leurs abscisses), la distance entre 2 points A et B vaut $AB=|x_B-x_A|=|x_A-x_B|$.

On peut dès lors interpréter $|x|$ comme la distance OM entre l'origine O (d'abscisse 0) et un point M d'abscisse x. L'inégalité $|x|<a$ avec $a>0$ qui s'écrit $OM<a$ signifie donc seulement que M ne s'écarte pas de l'origine au delà des points d'abscisse $-a$ et a (voir figure).



On peut aussi interpréter $|x-b|$ comme la distance BM entre un point B d'abscisse b et un point M d'abscisse x. L'inégalité $|x-b|<a$ avec $a>0$ qui s'écrit $BM<a$ signifie seulement que M ne s'écarte pas de B au delà des points

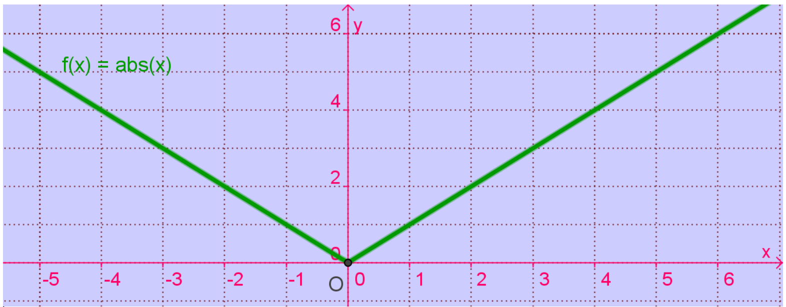


d'abscisse $b-a$ et $b+a$ (voir figure). Il faut noter alors que l'encadrement obtenu pour l'abscisse x de M est $-a<x-b<a$ s'écrit $b-a<x<b+a$. Comme $b-a<x$ peut s'écrire $b<x+a$ et comme $x<b+a$ peut s'écrire $x-a<b$, cet encadrement peut s'écrire aussi $x-a<b<x+a$ qui traduit finalement l'inégalité $|b-x|<a$ c'est-à-dire l'inégalité de départ (car $|b-x|=|x-b|$) !
Par exemple, $|x-\pi|<10^{-5}$ peut aussi bien s'écrire $\pi-10^{-5}<x<\pi+10^{-5}$ que $x-10^{-5}<\pi<x+10^{-5}$. C'est seulement le contexte qui nous fera préférer une de ces deux formes. On a vu une application de cela dans le chapitre précédent avec la différence entre « intervalle de fluctuation » et « intervalle de confiance ».

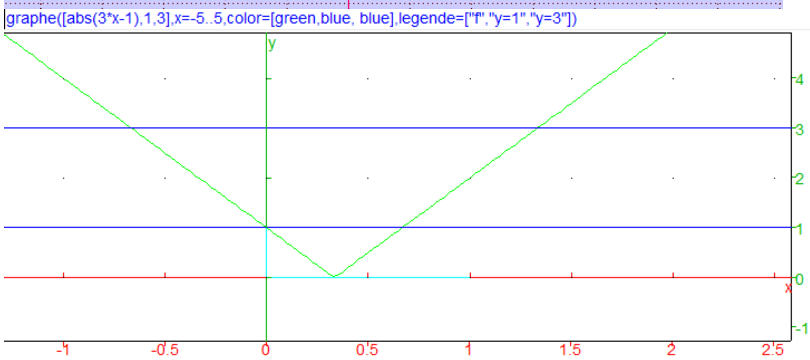
<u>Sens de variation et représentation graphique</u> :
On les déduit de la propriété $|x|=x$, si $x>0$ et $|x|=-x$, si $x<0$. La fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$ car alors $|x|=x$ (fonction linéaire de coefficient 1>0) et décroissante sur $\mathbb{R}^-$ car alors $|x|=-x$ (fonction linéaire de coefficient −1<0).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$

La forme de la courbe est une ligne brisée formée par les 2 demi-droites d'équation $y=x$ sur $\mathbb{R}^+$ et $y=-x$ sur $\mathbb{R}^-$.



<u>Inéquations avec valeurs absolues</u> :
Pour résoudre $|-x|<3$, on écrit que $|x|<3$ et donc que $-3<x<3$.
Pour résoudre $1<|3x-1|<3$, il faut écrire un système : $|3x-1|<3$ et $|3x-1|>1$ qui se traduit par le système : $-3<3x-1<3$ et ($3x-1>1$ ou $3x-1<-1$) qui conduit à $\frac{-2}{3}<x<\frac{4}{3}$ et ($x>\frac{2}{3}$ ou $x<0$) et donc à $\frac{-2}{3}<x<0$ ou $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$, c'est-à-dire qu'il faut avoir $x\in]-\frac{2}{3};0[\cup]\frac{2}{3};\frac{4}{3}[$.



Voyons cette inéquation à l'aide d'un traceur de courbe : il s'agit de trouver les valeurs de x pour lesquelles la courbe de la fonction $x\mapsto |3x-1|$ est comprise entre les droites horizontales d'équation $y=1$ et $y=3$.

b) <u>Fonction racine carrée</u>

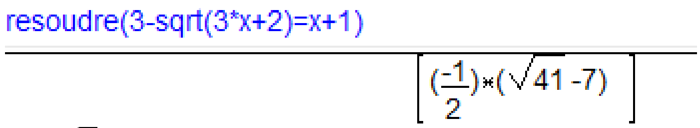
Depuis la classe de 4ème, on sait que la *racine carrée* d'un nombre positif x est le nombre positif y tel que $y^2=x$. On note ce nombre y avec le radical $\sqrt{x}$.

Par conséquent, on en déduit une définition de la fonction *racine carrée* : c'est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)>0$ et $[f(x)]^2=x$. Comme c'est un peu compliqué comme définition, on peut lui préférer la définition géométrique qui donne la racine carrée de x comme la longueur du côté d'un carré d'aire x (comme ça, on a du même coup $x>0$ car c'est une aire, et $\sqrt{x}>0$ car c'est une longueur). Plus tard (après la classe 2de), on dira que la racine carrée est la *bijection réciproque* de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$ ou encore que $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$…

Quoiqu'il en soit, nous savons déjà beaucoup de choses sur cette fonction :
$\sqrt{x}$ est *irrationnel* lorsque x n'est pas le carré d'un rationnel. Par exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel mais $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

est rationnel comme $\sqrt{2{,}25}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1{,}5$ qui est décimal ou $\sqrt{225}=15$ qui est entier...
$\forall\ x\in\mathbb{R}^+,\ \sqrt{x}\geq 0$, la fonction racine carrée est *positive* (elle admet 0 comme minimum).

$\forall\ x_1\in\mathbb{R}^+\ \forall\ x_2\in\mathbb{R}^+,\ \sqrt{x_1\,x_2}=\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ et, si $x_2\neq 0, \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$. La racine d'un produit (d'un quotient) est égale au produit (au quotient) des racines. Cette propriété a permis en 3ème, des simplifications d'expressions comportant des racines telles que
$\sqrt{200}=\sqrt{100}\times\sqrt{2}=10\sqrt{2}$,
$\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{9}\times\sqrt{5}-\sqrt{4}\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$,



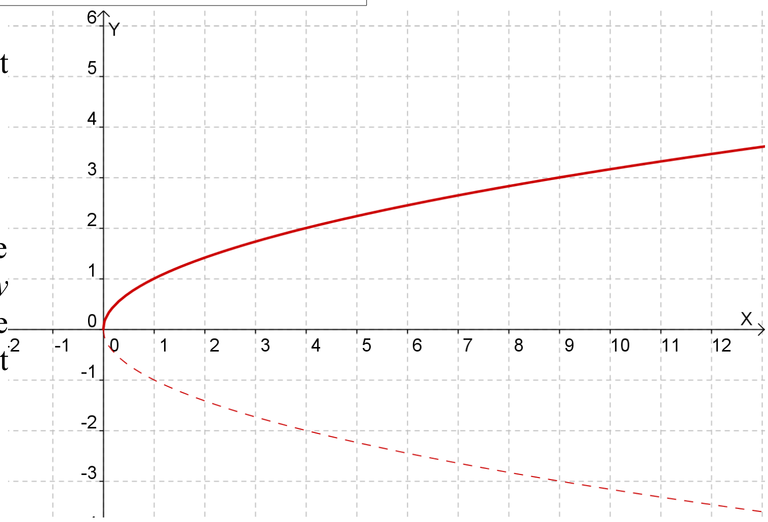
$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$.

<u>Sens de variation et représentation graphique</u> :
On peut calculer le taux de variation de la fonction racine carrée entre 2 valeurs différentes de x :
$\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{(x_2-x_1)(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}=\frac{x_2-x_1}{(x_2-x_1)(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}=\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$. En cours de route, nous avons simplifié par x_2-x_1 qui est différent de 0. Le dénominateur $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}$ de ce taux est positif (somme de 2 nombres positifs) donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

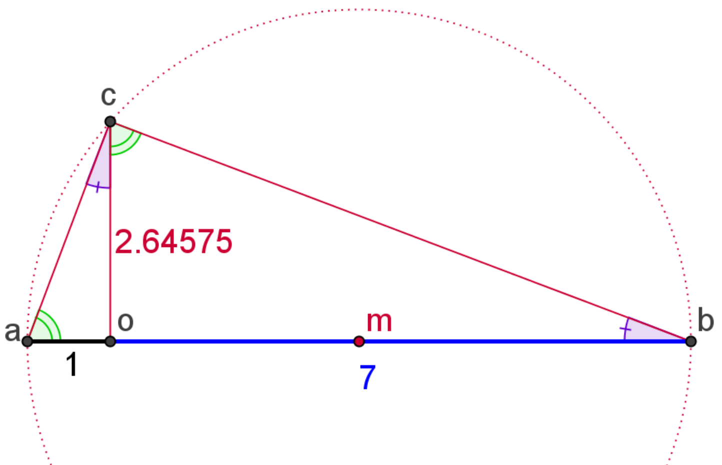
x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

La forme de la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$ est une demi-parabole.

L'autre moitié de la parabole serait la courbe d'équation $y=-\sqrt{x}$. En intervertissant x et y dans ces équations on trouve en effet que $x=-\sqrt{y}$ pour $x<0$ et et $x=\sqrt{y}$ pour $x>0$, soit $x^2=y$ dans le cas général.



Construction géométrique de la racine carrée d'un nombre donné :
La situation ci-contre permet de construire un segment de longueur $\sqrt{x}$ lorsqu'on dispose d'un segment de longueur x (sur notre figure le segment [ob] mesure x=7 cm). On construit un segment [oa] tel que oa=1 cm, ensuite on trace la perpendiculaire à (ab) passant par o. On trace le cercle de diamètre [ab]. Ce cercle et la perpendiculaire se coupent en deux points dont le point c sur notre figure qui vérifie oc= $\sqrt{x}$ cm.



Ceci vient du fait que les angles $\widehat{oac}$ et $\widehat{ocb}$ (en vert sur notre figure) sont égaux. La tangente de cet angle vaut oc dans le triangle aoc et $\frac{ob}{oc}=\frac{x}{oc}$ dans le triangle boc. Donc $\frac{x}{oc}=oc$ et donc $oc^2=x$ ou encore $oc=\sqrt{x}$. Sur notre figure, le segment [oc] mesure environ 2,64575 cm qui est bien la racine carrée de 7 comme le montre ce résultat dû à Xcas : $\sqrt{7} \approx 2.6457513110645905905016157536392604257102591830824 5$ ...

<u>Équations et inéquations contenant des racines carrées</u>

Exemple $3-\sqrt{3x+2}=x+1$. On doit avoir $3x+2 \geq 0$ pour que la racine soit définie, et donc $x \geq \frac{-2}{3}$. Ensuite, on isole la partie contenant le radical d'un côté du signe égal : $-\sqrt{3x+2}=-3+x+1=-2+x$ ou encore $\sqrt{3x+2}=2-x$. On va maintenant utiliser la fonction carrée, en précisant que le nombre $2-x$ doit être positif. On obtient, en élevant cette égalité au carré, $3x+2=(2-x)^2$ qui se transforme, par développement, en $3x+2=4-4x+x^2$ ou encore $x^2-7x+2=0$. Cette équation du 2^d^ degré se réduit à $(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+2=0$ ou $(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49-8}{4}=0$ ou encore $(x-\frac{7}{2})^2-\frac{41}{4}=0$ qui se factorise en $(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2})(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2})=0$. On a donc 2 solutions qui sont $x_1=\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2} \approx 6{,}70156$ et $x_2=\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2} \approx 0{,}2984378813$, mais il faut vérifier qu'elles vérifient aussi les contraintes de cette équation, à savoir $2-x>0$ et $3x+2 \geq 0$, qui s'écrivent aussi $x<2$ et $x \geq \frac{-2}{3}$, soit $\frac{-2}{3} \leq x<2$. On voit que $x_1>2$ et donc x_1 ne convient pas, par contre, comme $\frac{-2}{3} \leq x_2<2$, x_2 convient. L'équation de départ a donc une solution unique qui est $\frac{7-\sqrt{41}}{2} \approx 0{,}2984378813$. Vérification avec Xcas ci-contre.

Pour les inéquations, c'est un peu pareil :

Exemple $3-\sqrt{3x+2}>x+1$. On doit avoir $3x+2 \geq 0$ pour que la racine soit définie, et donc $x \geq \frac{-2}{3}$. Ensuite, on isole la partie contenant le radical dans un membre de l'inéquation : $-\sqrt{3x+2}>-3+x+1=-2+x$ ou encore $\sqrt{3x+2}<2-x$ (on change le signe de l'inégalité car on multiplie par -1 en changeant tous les signes). On va maintenant utiliser la fonction carrée qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ et qui donc conserve le sens des inégalités, en précisant que le nombre $2-x$ doit être positif. On obtient ainsi, en élevant cette inégalité au carré, $3x+2<(2-x)^2$ qui se transforme, par développement, en $3x+2<4-4x+x^2$ ou encore $x^2-7x+2>0$. Cette équation du 2^d^ degré se réduit à $(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+2>0$ ou $(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49-8}{4}>0$ ou encore $(x-\frac{7}{2})^2-\frac{41}{4}>0$ qui se factorise en $(x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2})(x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2})>0$. On doit donc étudier le signe de ce produit de facteurs affines. Avec les notations des solutions de l'équation vue plus haut, on montre facilement que ce produit est positif quand $x>x_1$ ou quand $x<x_2$, mais il faut prendre parmi ces solutions celles qui vérifient les contraintes de départ, à savoir $2-x>0$ et $3x+2 \geq 0$, soit $\frac{-2}{3} \leq x<2$. On voit qu'il faut donc avoir $\frac{-2}{3}<x<x_2$. Vérification avec Xcas ci-contre.

```
resoudre(3-sqrt(3*x+2)>x+1)
```

$$\left[(x>(\frac{-2}{3})) \text{ and } (x<((\frac{-1}{2})*(\sqrt{41}-7)))\right]$$