Chapitre 3 : Équations et Inéquations

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	• Associer à un problème une expression algébrique. • Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. • Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	• Mettre un problème en équation. • Résoudre une équation se ramenant au premier degré. ◇ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	• Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k$; $f(x) < g(x)$. • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.

I] Transformations d'écritures algébriques

a) Changements de signe et soustractions

L'opposé d'un nombre a est le nombre a' tel que $a+a'=0$. L'opposé d'un nombre a est le nombre $-a$.

Exemples : L'opposé de 5 est -5, celui de -5 est 5.
L'opposé de $1-2x$ est $-(1-2x)=-1+2x$, celui de $x+3$ est $-(x+3)=-x-3$.

Propriété : L'opposé d'une expression algébrique est obtenue en prenant les opposés de chacun des termes. Un signe moins devant une parenthèse change tous les signes à l'intérieur de celle-ci.

Exemples : $-(a+b+c)=-a-b-c$ et de même, $-(a-b+c)=-a+b-c$ ou encore, $-(-a-b-c)=a+b+c$.
En particulier $-(2+x+3x^2)=-2-x-3x^2$ et de même, $-(4y-3x+5)=-4y+3x-5$.

Somme algébrique : Une soustraction peut toujours être considérée comme une addition car soustraire un nombre a c'est additionner $-a$, l'opposé de a. Les sommes algébriques sont *commutatives*.

Exemples : $-25+2,5+75=2,5+(-25)+75=2,5-25+75$ et $-25+2,5+75=(+75)+(-25)+2,5=75-25+2,5$.
De même $-2x^2-5x+3=3-5x-2x^2$.

Remarque : Cette propriété conduit à confondre dans une somme algébrique, les signes + ou − devant les nombres et les symboles + ou − devant les opérations. Il s'agit d'une simplification d'écriture, mais on devrait toujours pouvoir distinguer les 2 notions. Quand on écrit une expression comme $b-c$ on peut toujours considérer qu'on additionne l'opposé de c : $b-c= b+(-c)$. C'est pour cela que l'on peut permuter les termes $b-c=-c+b$. Car sinon, la soustraction n'est pas commutative $b-c\neq c-b$ en fait, on a $b-c=-(c-b)$.

b) Monômes et divisions

Un *monôme* est une expressions numérique dans laquelle il n'y a que des multiplications et des puissances (une forme d'écriture simplifiée pour les produits d'un nombre par lui-même). Les propriétés de la multiplication s'appliquant (en particulier changer l'ordre des facteurs), on peut simplifier ces écritures en regroupant la partie numérique (devant) et la partie littérale (derrière).

Exemples : $3(-5xy^2)\times(\frac{x}{3})=3\times(-5)\times(\frac{1}{3})\times(xy^2\times x)=-5x^2y^2=-5(xy)^2$. La dernière transformation apporte un gain de simplification (regroupent des puissances en une seule) mais n'est pas systématique. Lorsque la partie numérique est égale à 1, on ne l'écrit pas : $1\times xy^2=xy^2$.

On appelle *degré* d'un monôme par rapport à une variable littérale (nombre écrit avec une lettre), l'exposant de ce nombre dans l'écriture réduite du monôme. Par exemple, $3xy^2$ est un monôme de degré 1 en x et de degré 2 en y. Une équation est dite du 1er degré en x, si elle ne contient pas de monômes en x de degré supérieur à 1.

Les divisions sont des formes particulières de produits : diviser par x, c'est multiplier par l'inverse de x. Tous les nombres ont une inverse, sauf 0 (autrement dit, on ne peut pas diviser par 0). L'inverse de x est le nombre $\frac{1}{x}$ qui, multiplié par x donne 1. La propriété du quotient de deux puissances d'un même nombre exprime cela : $\frac{x^n}{x^p}=x^n\times(\frac{1}{x^p})=x^n\times(\frac{1}{x})^p=x^n\times(x^{-1})^p=x^n\times x^{-p}=x^{(n-p)}$.
Ainsi, on peut simplifier des monômes tels que $5x\frac{y^2}{4y}$ mais, on doit préciser pour quelles valeurs cette expression simplifiée est valide (la division par 0 n'étant pas possible). Ici, si $y\neq 0$ alors $5x\frac{y^2}{3y}=\frac{5}{3}xy$.

c) Développements

La *distributivité* est une propriété qui transforme un produit en somme (et réciproquement). Cette transformation s'appelle un *développement*.

Propriété de base : Si a, b et c sont 3 nombres quelconques alors $a(b + c) = ab + ac$
Conséquences : avec une somme de 3 termes $(a + b+ c) \times d = ad + bd + cd$
Avec deux sommes (développement double) : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemples : $3(x + 1) = 3x + 3$ ou encore $x (1 + x) = x + x^2$.
$3(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3})=3\times 1+3\times(\frac{1}{2})+3\times(\frac{2}{3})=3+\frac{3}{2}+2=5+\frac{3}{2}$.
$(3+2x)(4x+1) = 12x+3+8x^2+2x= 8x^2+14x+3$. La forme finale a été "réduite" en regroupant les 2 termes qui contiennent x en un seul. La réduction utilise la propriété inverse du développement, la factorisation. La forme finale a aussi été "ordonnée" selon les puissances décroissantes de x.

Avec des différences (les signes – sont considérés comme des signes devant les nombres) :

Simples développements : $(a - b)\times c = a\times c - b\times c$; $a\times(b - c) = ab - ac$
$a\times(b - c + d) = ab - ac + ad$; $a\times(b - c - d) = ab - ac - ad$
Doubles développements : $(a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd$; $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$

Exemples : $(3 - 2x)(4x - 1) = 12x - 3 - 8x^2 + 2x = - 8x^2 + 14x - 3$.
$- 2x(- 8x^2 + 4x - 1) = 16x^3 - 8x^2 + 2x$.

Trois développements sont particulièrement utilisés, on les a appellé *identités remarquables* en 3ème :

1ère identité (carré d'une somme) : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2ème identité (carré d'une différence) : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3ème identité (différence de carrés) : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemples : $(x+3)^2 = x^2 + 2\times 3\times x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$.
$2013^2=(2000+13)^2=2000^2+2\times 2000\times 13+13^2=4\ 000\ 000+72\ 000+169=4\ 072\ 169$ (calcul mental niveau 2)...
$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=\sqrt{2}^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+3=5-2\sqrt{6}$.
$(3x - 1)^2 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 1+1^2 = 9x^2 - 6x +1$ (attention au carré d'un produit : $(3x)^2\neq 3x^2$)
$(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2=5-2=3$ ce type de produit permet de simplifier une expression avec des radicaux au dénominateur comme dans $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})\times(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.
$(3x + 5)(3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$.

Remarque : d'autres identités remarquables sont parfois utilisées mais on n'a pas à les connaître par cœur. On peut par exemple établir que, d'une façon générale on a $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$. Les coefficients du développement des puissances du binôme $(a+b)^n$ sont donnés par le triangle de Pascal (voir illustration).

1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

d) Factorisations

La *distributivité* est une propriété qui transforme aussi une somme en produit. Cette transformation inverse du développement s'appelle la *factorisation*.

Propriété de base : Si a, b et c sont 3 nombres quelconques alors $ab + ac = a(b + c)$
Conséquences : avec une somme de 3 termes $ad + bd + cd = (a + b + c)\times d$
Avec des différences : $a\times c - b\times c=(a - b)\times c$; $ab - ac=a\times(b- c)$; $ab - ac+ad = a\times(b - c+d)$; *etc.*

Exemples : $9x-10x = (9-10)x = -1x = -x$. C'est ainsi, par une telle factorisation, que l'on réduit.
$144x^2+12x = 12^2x^2+12x = (12x)^2+12x = 12x(12x+1)$.
$2(5x+1)+3x(5x+1) = (2+3x)(5x+1)$.
$(x-1)(5x-3)+2x(10x-6) = (x-1+2x\times2)(5x-3) = (-3x-1)(5x-3) = -(3x+1)(5x-3)$. Le signe – est aussi mis en facteur quand il est présent devant tous les termes d'une somme algébrique (pour simplifier).

Les identités remarquables servent aussi à factoriser. Pour cela, on les inverse :

1ère et 2ème identités (somme algébriques de trois termes) : $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
3ème identité (différence de carrés) : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemples : $x^2 + 6x + 9=(x+3)^2$. Pour réussir cette factorisation, on identifie d'abord $a=x$ et $b=3$ (car $3^2=9$) et puis on vérifie que le double-produit $2ab$ est bien égal au terme restant ici $6x=2\times3\times x$.
$x^2-9 = x^2-3^2 = (x+3)(x-3)$ La 3ème identité est particulièrement utile et facile à reconnaître.
$9x^2-(x+1)^2 = (3x)^2-(x+1)^2 = [3x-(x + 1)][3x+(x+1)] = (2x-1)(4x+1)$.
$2x^2-5 = (\sqrt{2}\,x)^2-\sqrt{5}^{\,2} = (\sqrt{2}\,x-\sqrt{5})(\sqrt{2}\,x+\sqrt{5})$. On doit parfois utiliser des racines carrées.

Certaines expressions du second degré semblent non-factorisables. Pourtant, on peut reconnaître le début du développement d'un carré et parfois réussir alors la factorisation (en utilisant la 3ème identité). Ce type de factorisation sera étudié ultérieurement (polynômes du second degré). Examinons juste un exemple :
$x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ qui peut maintenant être factorisé à l'aide de la 3ème identité remarquable
$(x - 2)^2 - 1 = (x - 3)(x - 1)$ et donc $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$.

II] Équations

a) 1er degré

Définitions : Une équation est une égalité dans laquelle figure un nombre (ou plusieurs) inconnu. Résoudre une équation, c'est déterminer la valeur (ou les valeurs s'il y en a plusieurs) du nombre inconnu qui rend vraie cette égalité.

Certaines équations sont très faciles (par exemple $x+2=3$) et d'autres sont très difficiles, voire impossible à résoudre (par exemple $x^5+3x^3+3x-1=0$). On peut utiliser des méthodes exactes (méthode algébrique, utilisation d'un logiciel de calcul formel) ou des méthodes approchées (lecture graphique, méthode algorithmique donnant des approximations de plus en plus précises).

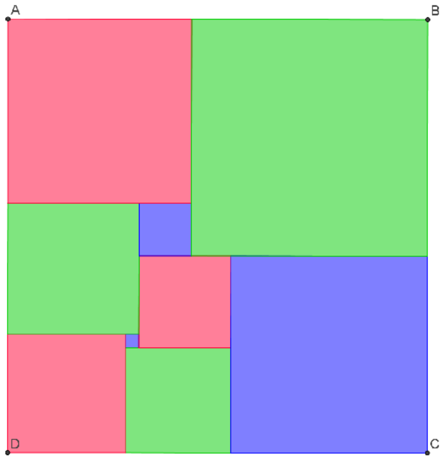
Une équation du 1er degré en x peut toujours se ramener à la forme $ax+b=0$ où $a\neq0$ (sinon ce n'est pas une équation en x) qui a une solution unique égale à $\frac{-b}{a}$.

La stratégie de résolution des équations du 1er degré (le nombre inconnu n'apparaît que sous la forme de monômes du 1er degré) a déjà été étudiée au collège :

i. On regroupe du même côté de l'égalité ce qui contient l'inconnu par des ajouts ou des retraits.
ii. On factorise pour obtenir dans un membre, le produit de l'inconnu par une facteur *k*.
iii. On divise par le facteur *k*, afin d'obtenir la valeur de notre inconnue.

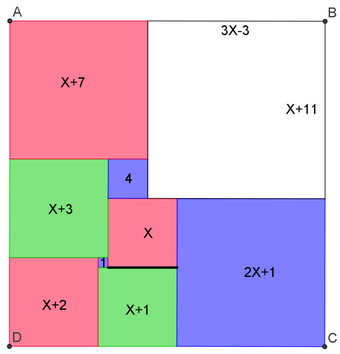
Exemples d'équation du 1er degré : $3x+5=17x+11$ revient à $14x+6=0$ qui a pour solution $x=\frac{-6}{14}=\frac{-3}{7}$. $5(x^2-2x+1)-x^2+7=(2x-3)^2-3(x+2)$. Cette équation paraît être du 2d degré, mais si on développe, on obtient $5x^2-10x+5-x^2+7=4x^2-12x+9-3x-6$ et, en regroupant et en réduisant $(5-1-4)x^2+(-10+12+3)x+(7-9-6)=0$. On arrive donc à $5x-8=0$ qui est bien une équation du type $ax+b=0$ (du 1er degré donc). Sa solution est $x=\frac{8}{5}=1{,}6$.

Remarque : Lorsque $a=0$, l'équation $ax+b=0$ peut n'avoir aucune solution (si $b\neq 0$) ou une infinité de solutions (si $b=0$) car dans ce cas toute valeur de x est acceptable, on aura toujours l'égalité 0=0.



Mettre un problème en équation : La technique de résolution des équations du 1er degré est simple, du moins elle a été étudiée largement pendant les années de collège. La difficulté provient souvent de la mise en équation : cette étape qui conduit à transcrire une situation sous la forme d'une égalité. La stratégie à employer n'est pas connue à l'avance, elle dépend de la situation. On fera parfois un tableau pour mieux analyser la situation, mais ce n'est pas une obligation. Dès fois ce sera un schéma ou l'application de formules... Examinons quelques exemples en détaillant surtout la méthodologie (la résolution technique des équations ne posant pas, à ce stade, de problèmes). Les exemples sont choisis selon la maxime : qui peut le plus peut le moins (nous préférons choisir quelques exemples non-triviaux.

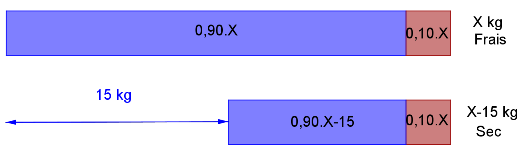
Exemple 1 : 9 carrés sont agencés dans ce beau pavage rectangulaire. Le petit carré mesurant 1 de côté, quelles sont les dimensions du rectangle ABCD ?



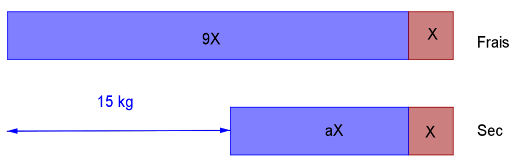
Que pouvons-nous faire dans cette situation ? Le plus simple consiste à construire la figure à partir d'une longueur variable x donnée à un des carrés juxtant le petit. Nous comprenons qu'alors tous les autres carrés ont des dimensions fixées, sauf le dernier : pour ce dernier nous obtenons 2 longueurs dépendant de x. L'équation est donc là : écrire l'égalité qui oblige ces 2 longueurs à être égales. Il ne reste plus alors qu'à calculer x et puis les dimensions du rectangle. Ici, nous trouvons qu'il faut avoir $3x-3=x+11$, ce qui mène à $x=7$ et aux dimensions $AB=4x+4=32$ et $AD=3x+12=33$.

Exemple 2 : Les champignons frais contiennent 90% d'eau ; lorsqu'on les fait sécher, ils n'en contiennent plus que 60%. L'autre weekend, j'ai ramassé tant de champignons que j'ai eu du mal à les porter. En séchant ils perdirent 15 kg. Combien en avais-je ramassé ?

Il semble naturel de poser x le poids des champignons frais. On commence à traduire l'énoncé : le poids de l'eau est $0{,}9x$. Et ensuite ? Le séchage fait perdre 15 kg d'eau. Il reste donc $0{,}9x-15$ kg d'eau, ajoutée aux $0{,}1x$ kg de matière sèche, cela fait donc $x-15$ kg. Le rapport (poids eau)/(poids total) vaut 60% donc $(0{,}9x-15)/(x-15) = 0{,}6$. On résout alors cette équation en effectuant les produits en croix $0{,}9x-15=0{,}6(x-15)$ soit $0{,}3x=15(1-0{,}6)=6$ et donc $x=6\div 0{,}3=20$. Il y avait donc 20 kg de champignons.

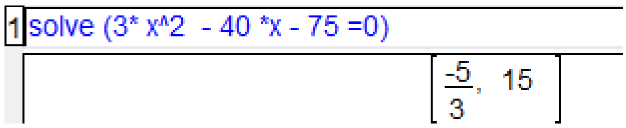


Y a t-il d'autres méthodes ? Certainement, on peut penser choisir un autre nombre inconnu, par exemple posons plutôt que la quantité de matière sèche est x kg (cette matière ne varie pas pendant le séchage). Calculons le poids de l'eau : $9x$, car la part sèche est de 100–90=10% et 90%, c'est 9×10%. Un schéma peut aider, surtout pour représenter la situation après séchage : si il y a

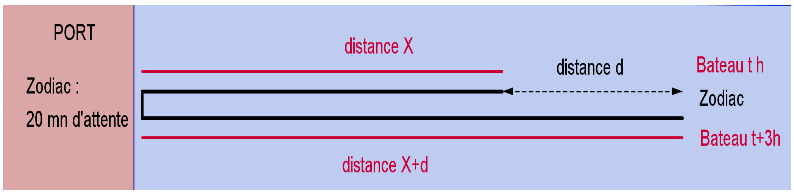


toujours x kg de matière sèche, l'eau représente une quantité ax telle que $ax\div(ax+x)=60/100$ soit, après simplification par x : $a\div(a+1)=0,6$. Ici, on peut calculer a (c'est une 1ère équation du 1er degré). Lorsqu'on connait a, il suffit alors de traduire la dernière partie de l'énoncé : la différence $10x-(a+1)x=15$ (c'est une 2ème équation du 1er degré). On trouve $a=0,6(a+1)$ soit, $0,4a=06$ et donc $a=1,5$. La 2ème équation devient $10x-2,5x=15$ et donc $x=15/7,5=2$. Au ramassage, il y avait donc $10\times2=20$ kg de champignons (18 kg d'eau qui représentait 18/20=90% du poids). Après séchage, on avait 5 kg de champignons dans lesquels il y restait 3 kg d'eau (3/5=60%).

Exemple 3 : On voyage sur un bateau qui remonte un fleuve sur 40 km. Le courant est important, il est de 5 km/h et freine le bateau, mais au retour il porte le bateau et cela va plus vite. Le voyage aller-retour prenant 6 h, quelle est la vitesse du bateau par rapport à l'eau ? Sans courant, ferions-nous le même voyage en plus ou en moins de 6 h? Les problèmes où il y a une vitesse sont parfois déroutants. On doit utiliser la formule $v=d\div t$ ou $d=v\times t$ ou encore $t=d\div v$ (où v:vitesse, d:distance et t:temps). Ici, on peut noter v la vitesse cherchée (et non x, mais cela ne change rien). A l'aller le bateau va à la vitesse $v-5$ et au retour $v+5$. Jusque là ça va ? Il faut toujours se méfier de ne pas affirmer trop rapidement, mais ceci semble justifié. Poursuivons : la distance étant de 40, la durée du trajet aller est $40\div(v-5)$ et la durée du trajet retour est $40\div(v+5)$. Le total est donc égal à $40\div(v-5)+40\div(v+5)=6$ soit $\frac{40}{v-5}+\frac{40}{v+5}=\frac{40[(v+5)+(v-5)]}{(v-5)(v+5)}=\frac{80v}{v^2-25}=6$. On en déduit que $80v=6\times(v^2-25)$, soit que $3v^2-40v-75=0$. Ceci n'est pas un bon exemple d'équation du 1er degré... Si l'on doit résoudre en seconde cette équation du 2^{d} degré, il faut la mettre sous la forme d'une équation produit-nul (ou la confier à Xcas) :
$3v^2-40v-75=3(v^2-(\frac{40}{3})v-25)=3((v-\frac{20}{3})^2-\frac{400}{9}-25)=3((v-\frac{20}{3})^2-\frac{625}{9})=3((v-\frac{20}{3})^2-(\frac{25}{3})^2)=0$, soit $3((v-\frac{20}{3}-\frac{25}{3})(v-\frac{20}{3}+\frac{25}{3}))=3((v-\frac{45}{3})(v+\frac{5}{3}))=0$ et donc $v=\frac{45}{3}=15$ ou $v=\frac{-5}{3}$, nous ne retiendrons que la 1ère solution (la 2ème étant négative). Le bateau naviguait donc à 15 km/h. Sans courant (c'est difficile d'imaginer un fleuve sans courant), à 15 km/h, nous ferions le trajet aller-retour en $\frac{40}{15}+\frac{40}{15}=\frac{80}{15}=\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}$ h, soit en 5h et 20 minutes.



Un autre problème avec des vitesses, mais du 1er degré cette-fois : Un bateau quitte le port naviguant à 15 nœuds (1 nœud marin est une vitesse qui vaut environ 1852 m par heure). Au bout d'un moment, un passager a un malaise, le capitaine décide instantanément de le faire ramener au port au moyen d'une embarcation légère (un zodiac). Le zodiac naviguant à 25 nœuds, fait le trajet aller-retour en 3 h. L'arrêt au port n'ayant duré que 20 minutes, à quelle distance du port se trouvait le bateau quand le passager a fait son malaise ? Le capitaine aurait-il mieux fait de demander à un hélicoptère de venir (un hélicoptère vole à une vitesse de 300 km/h) ?



Discuter les solutions trouvées en rapport au problème posé : Parfois, il est nécessaire de rejeter une solution ou plusieurs car elles ne satisfont pas aux contraintes (une distance ou un âge sont positifs, un nombre de personnes ou de pièces doit être entier, etc.). Examinons deux situations où cette discussion doit avoir lieu.

Exemple 4 : Un père a 43 ans. Il demande à son fils de 23 ans « Fiston, dans combien d'années mon âge sera t-il le double du tien ? » Le fils réfléchit et pense « dans x années mon père aura $43+x$ ans et moi $23+x$ ans, si $43+x=2\times(23+x)=46+2x$ et donc... », le fils sourit car il entrevoit la solution et il est assez fier de lui. « $0=3+x$ se dit-il. Ah, et bien ça donne $x=-3$ » il annonce tristement « Je crois que ça n'arrivera jamais mon cher papa, ou alors dans –3 ans » Et vous qu'en pensez-vous ? Mais oui, c'est **déjà** arrivé! Il y a 3 ans. En effet, à ce moment le père et le fils avait 40 et 20 ans.

Exemple 5 : Connaissez-vous *the pillow book*, un recueil de nouvelles de Lewis Caroll, l'auteur d'Alice... En fait Charles Dodgson, alias Lewis C. était un professeur de maths insomniaque qui ruminait ces problèmes lors de ses nuits blanches. Il consigna ses réflexions nocturnes dans ce livre. Bref, une de ces nouvelles sur l'oreiller est la suivante : « *Some people sat in a circle, so that each had two neighbors and each had a certain number of shillings* (la livre anglaise était divisée en 20 shillings). *The first had one shilling more than the second, who had one shilling more than the third, and so on. The first gave one shilling to the second, who gave two shillings to the third, and so on, each giving one shilling more than he or she received, for as long as possible. There were then two neighbors, one of whom had four times as much as the other. How many people were there? How much had the poorest person at first?*

Lewis Carroll (1832-1898), Pillow problems

Appelons les inconnues de ce problème *n :* nombre de personnes et *k :* shillings possédés par la plus pauvre personne. Le plus riche possède alors $k+n-1$ shillings ($k-1$ de plus que le plus pauvre). Après le 1^{er} tour chacun est plus pauvre d'un shilling (il donne 1 de plus qu'il ne reçoit) et donc la dernière personne du tour donne n shillings à la 1ère du 2ème tour. Ainsi de suite à chaque tour : après le 2ème tour, chacun est plus pauvre de 2 shillings et la dernière personne du tour donne $2n$ shillings à la 1ère du 3ème tour... Après k tours, le plus pauvre qui est en même temps la dernière personne du tour donne kn shillings à la 1ère du $(k+1)$ème tour et se retrouve donc avec rien (celui avant lui n'a plus qu'un shilling). Le $(k+1)$ème tour se passe sans problème jusqu'à ce que le dernier reçoive $(k+1)n-1$ shillings. Ne pouvant donner 1 shilling de plus car il ne lui restait rien, le jeu s'arrête. Le 1er ayant donné $k+1$ shillings se retrouve avec seulement $k+n-1-(k+1)=n-2$ shillings. On se retrouve alors dans une des 2 situations suivantes : $n-2=4((k+1)n-1)$ ou bien $4(n-2)=(k+1)n-1$. La 1ère équation se transforme en $4nk=2-3n$ qui revient à $k=\frac{-3}{4}+\frac{1}{2n}$ alors que la 2ème donne $nk=3n-7$, ce qui revient à $k=3-\frac{7}{n}$. La première <u>n'a pas de solution entière qui convienne</u>. Et oui, pour que k soit entier, il faudrait que $\frac{-3n+2}{4n}$ soit entier, c'est-à-dire que $-3n+2$ soit un multiple de 4 et de n. Lewis dû passer une partie de sa nuit à cela, mais le tableur nous le dit promptement : cela n'arrive jamais lorsque n est positif (pour $n=-2$ cela arrive mais n est un nombre de personnes). La seconde

n	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
-3/4+1/2n	-1	-1,25	-0,25	-0,5	-0,58	-0,63	-0,65	-0,67	-0,68	-0,69	-0,69	-0,7	-0,7	-0,71	-0,71	-0,71	-0,72	-0,72	-0,72	-0,72	-0,72	-0,73	-0,73	-0,73	-0,73	-0,73	-0,73	-0,73

équation a une seule solution : pour $n=7$, on trouve $k=2$. C'est donc ainsi, le plus pauvre avait 2 shillings et le 7ème homme en avait 9. Ils firent 2 tours, puis, au 3ème tour, l'ex-plus pauvre se retrouve avec 20 shillings et l'ex-plus riche avec seulement 5 shillings (il en avait 8 au départ), soit 4 fois moins que l'ex-plus pauvre devenu le plus riche...

b) <u>2d degré</u>

En 3ème, on a rencontré les *équations-produit-nul*. Ce sont des équations de degré généralement supérieur à 1 qui sont écrites sous la forme A×B×C×...×D, de facteurs du 1er degré. La propriété fondamentale et évidente pour résoudre ces équations « un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul ».

<u>Exemples d'équations-produit-nul</u> : $(x–3)(3x+2)=0$. On a deux facteurs du 1er degré qui peuvent, chacun séparément s'annuler. $x–3=0$ pour $x=3$ et $3x+2=0$ pour $x=\frac{-2}{3}$, si bien que les solutions de cette équation sont 3 et $\frac{-2}{3}$.

$4x^2–12x+9 = 0$. L'expression $4x^2–12x+9$ peut être factorisée à l'aide de la 2ème identité :

$4x^2–12x+9 = (2x–3)^2$ et par conséquent, on a $(2x–3)^2 = 0$

$4x^2–(3x+1)^2 = 0$. Cette équation peut être factorisée à l'aide de la 3ème identité :

$4x^2–(3x+1)^2 = (2x)^2–(3x+1)^2 = [2x–(3x+1)][2x+(3x+1)] = (–x–1)(5x+1) = –(x+1)(5x+1)$. Si bien que, l'équation revient au produit-nul $–(x+1)(5x+1) = 0$. Les solutions sont donc les valeurs qui annule ces deux facteurs : –1 et $\frac{-1}{5}=-0,2$.

Équation du type $x^2=a$. Ces équations du second degré en x ont 0, 1 ou 2 solutions, selon la valeur de a :

- si $a > 0$, $x^2=a$ revient à $(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$ qui a pour solutions $x=\sqrt{a}$ et $x=-\sqrt{a}$.
- si $a = 0$, $x^2=0$ a pour unique solution $a = 0$.
- si $a < 0$, $x^2<0$ étant impossible dans $\mathbb{R}$, cette équation n'a pas de solution réelle.

<u>Exemples d'équations du type $x^2=a$</u> : $x^2=5$ a deux solutions et $x=\pm\sqrt{5}$.

L'équation $(3x-1)^2=4$ a deux solutions et $3x-1=\pm\sqrt{4}=\pm 2$, soit $x=\frac{(1\pm 2)}{3}$. Les solutions sont 1 et $\frac{-1}{3}$.

Équations du second degré (forme générale) :

En utilisant l'astuce décrite dans la partie précédente pour factoriser une expression du second degré, on

peut résoudre ce genre d'équation qui n'a pas toujours de solution.
Par exemple, $x^2-4x+3=(x-2)^2-1=(x-3)(x-1)$, l'équation $x^2-4x+3=0$ revient à $(x-3)(x-1)=0$ qui a deux solutions 1 et 3. Mais l'équation $x^2+6x+12=0$ revient à $(x+3)^2-9+12=0$, soit à $(x+3)^2=-3$ qui n'a pas de solution (un carré ne peut pas être négatif).

La méthode générale et la discussion font partie du programme de $1^{ère}$ S mais on peut l'exposer ici sans en dévoiler toutes les conséquences. Il s'agit de résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a,b et c sont des coefficients ($a\neq 0$ pour rester dans le 2^d degré) en reconnaissant dans ax^2+bx le début du développement d'un carré. En fait, on met a en facteur $ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$ et c'est dans $x^2+\frac{b}{a}x$ que l'on reconnaît le début du développement de $(x+\frac{b}{2a})^2$.
Comme $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2$, on a $x^2+\frac{b}{a}x=(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2$ et donc $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}$.
L'équation $ax^2+bx+c=0$ est donc équivalente à $(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=0$ car $a\neq 0$.
Comme $-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}=-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a})=-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})$, on peut écrire l'équation sous la forme d'une différence :
$(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4a}{4a^2})=0$, et pour pouvoir factoriser le membre de gauche, il faut que b^2-4ac soit positif.
Ce nombre est appelé *discriminant* de l'équation. Il est noté Δ.
Si $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, on peut écrire l'équation $(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2=0$ et la factoriser sous la forme d'un produit-nul : $(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})=0$ ou encore $(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})=0$, ce qui conduit aux deux solutions de l'équation qui sont $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Exemple : l'équation $x^2-x-1=0$ a pour discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-1)=1+4=5$.
Comme $\Delta>0$, l'équation a deux solutions $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
NB : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la solution positive, notée φ, est appelée *nombre d'or*. φ vaut approximativement 1,618. Ce nombre a de nombreuses propriétés parmi lesquelles le fait que $x^2=x+1\approx 2{,}618$ et $\frac{1}{x}=x-1\approx 0{,}618$.
Autre exemple : l'équation $2x^2+3x+5=0$ a pour discriminant $\Delta=3^2-4\times 2\times 5=9-40=-31$.
Comme $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solutions.

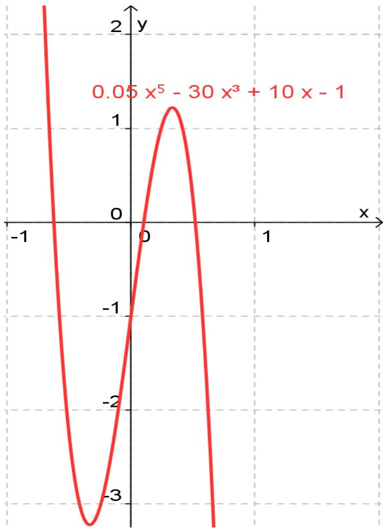
c) Degré supérieur à 2

Les équations polynomiales de degré 3 et 4 peuvent théoriquement être résolues avec des radicaux (des racines carrées et cubiques pour le degré 3) mais c'est hors de notre portée, trop difficile. Il a été prouvé que les équations de degrés supérieur ou égal à 5 ne peuvent pas être résolues ainsi, sauf exceptions.
La méthode que nous proposons ici consiste, quand c'est possible, à déterminer une solution évidente $x=a$ et ensuite, en factorisant par $(x-a)$, on fait diminuer le degré du facteur qui reste.

Exemple :
Imaginons que l'on doive résoudre l'équation $x^3-7x-6=0$.
Une solution évidente est $x=-1$ car $(-1)^3-7\times(-1)-6=-1+7-6=0$.
On peut donc mettre en facteur $x+1$, car ce facteur s'annulera quand $x=-1$:
$x^3-7x-6=(x+1)(ax^2+bx+c)=0$.
L'expression du 2^d degré a des coefficients faciles à déterminer. En effet, si on développe, on obtient :
$(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$.
Le coefficient de x^3 est 1 donc $a=1$, le terme de degré 0 est -6 donc $c=-6$. Pour les deux autres termes, on trouve $a+b=0$ (pas de terme de degré 2) et $b+c=-7$ ce qui conduit, dans les deux cas à $b=-1$.
L'expression x^3-7x-6 se factorise donc en $(x+1)(x^2-x-6)$ et il nous reste à résoudre l'équation de degré 2 avec la méthode vue ci-dessus $x^2-x-6=0$.
$\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-6)=1+24=25=5^2$.
Comme $\Delta>0$, l'équation a deux solutions $x=\frac{1-5}{2}=-2$ et $x=\frac{1+5}{2}=3$.
Finalement, l'équation de départ, $x^3-7x-6=0$, a trois solutions qui sont -2, -1 et 3.

d) Résolution à l'aide d'une méthode approchée

Lorsqu'on ne sait pas résoudre techniquement une équation, on peut utiliser des méthodes approchées.



Équations de type $f(x)=0$, méthode graphique. Le tracé de la courbe de la fonction f à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel permettant cela (GeoGebra par exemple offre une ligne de commande où on peut taper l'expression $y=f(x)$ étudiée) donne de précieuses informations quant-à l'existence, au nombre et à la valeur approchée de la ou des solutions.
Exemples : Nous recherchons les solutions de $0{,}05x^5-30x^3+10x-1 = 0$. Tapons dans la ligne de commande de GeoGebra la commande y=0,05*x^5−30*x^3+10*x−1=0. Cela conduit au graphique ci-dessus. Selon le choix des unités qui permettent de graduer des axes, on verra plus ou moins bien ce que l'on cherche. Ici, on cherche les valeurs de x pour lesquelles les images $y=f(x)$ sont nulles. On voit assez bien dans ce cas qu'il semble y avoir trois valeurs solutions : une dans l'intervalle $[-1;0]$ approximativement égale à $-0{,}7$ et deux dans $[0;1]$ approximativement égales à 0,1 et 0,5.

Équations de type $f(x)=0$, méthode algorithmique. Lorsqu'on connait le sens de variation d'une fonction sur un intervalle et que l'on a identifié qu'une des valeurs de l'équation se situe dans cet intervalle, on peut se rapprocher autant que l'on veut de la solution en utilisant un algorithme de balayage ou de dichotomie. Examinons ces deux méthodes pour préciser la solution négative de $0{,}05x^5-30x^3+10x-1 = 0$.
Dichotomie : Dans l'intervalle $[-1;-0{,}5]$ la fonction $f : x \mapsto 0{,}05x^5-30x^3+10x-1$ est décroissante (on a déterminé cela de façon graphique, en regardant la courbe) donc $f(0) > 0$ et $f(-0{,}5) < 0$, on calcule l'image du centre de l'intervalle, donc de $-0{,}75$: $f(-0{,}75) \approx 4{,}144 > 0$ donc, en comparant avec les valeurs précédentes, on en déduit que la solution appartient à $[-0{,}75;-0{,}5]$. On calcule l'image du centre de l'intervalle, donc de $-0{,}625$: $f(-0{,}625) \approx 0{,}0695 > 0$ donc, en comparant avec les valeurs précédentes, on en déduit que la solution appartient à $[-0{,}625;-0{,}5]$. etc.
Cette méthode se programme. Il faut écrire un algorithme la décrivant, comme ceci :

1. Entrer A et B (B plus grand que A), les extrémités du segment et N pour la précision souhaitée (si N est un entier négatif, la précision sera de la forme 10^N). A', B', C et C' sont des nombres.
2. Calculer A'=f(A) et B'=f(B)
3. Si A'×B'>0 (A' et B' de même signe) ou si (B−A)<10^N retourner en 1, sinon continuer (ces tests sont facultatifs, ils sont inutiles si on entre les bonnes valeurs pour A, B et N).
4. Tant que (B−A)>10^N :
   Calculer C=(A+B)/2 et C'=f(C)
   Si A'×C'<0 (A' et C' de signes contraires) : B=C et B'=C'
   Sinon : A=C et A'=C'
5. Afficher C

Ensuite, on programme cette algorithme sur une calculatrice ou avec un logiciel. Voyons ce que cela donne avec Algobox. Nous avons ajouté un compteur (la variable I) du nombre de calculs effectués pour obtenir

Programme dichotomie

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  B EST_DU_TYPE NOMBRE
  C EST_DU_TYPE NOMBRE
  A_f EST_DU_TYPE NOMBRE
  B_f EST_DU_TYPE NOMBRE
  C_f EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  LIRE B
  LIRE N
  I PREND_LA_VALEUR 0
  A_f PREND_LA_VALEUR F1(A)
  B_f PREND_LA_VALEUR F1(B)
  SI (A_f*B_f<0 ET (B-A)>pow(10,N)) ALORS
    DEBUT_SI
    TANT_QUE ((B-A)>pow(10,N)) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      C PREND_LA_VALEUR (A+B)/2
      C_f PREND_LA_VALEUR F1(C)
      I PREND_LA_VALEUR I+1
      SI (A_f*C_f<0) ALORS
        DEBUT_SI
        B PREND_LA_VALEUR C
        B_f PREND_LA_VALEUR C_f
        FIN SI
          SINON
            DEBUT SINON
            A PREND_LA_VALEUR C
            A_f PREND_LA_VALEUR C_f
            FIN_SINON
      FIN_TANT_QUE
    FIN_SI
  AFFICHER "La solution cherchée est environ égale à : "
  AFFICHER C
  AFFICHER "Le nombre d'itérations qui a été nécessaire est de : "
  AFFICHER I
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=0.05*pow(x,5)-30*pow(x,3)+10*x-1
```

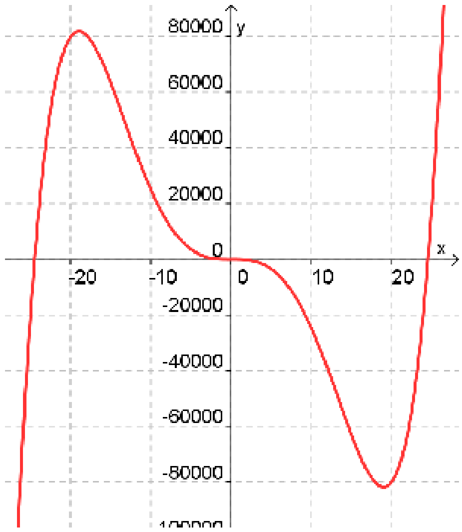
Résultats avec A=−1, B=−0.5 et N=−12

```
***Algorithme lancé***
La solution cherchée est environ égale à : -0.62221778
Le nombre d'itérations qui a été nécessaire est de : 39
***Algorithme terminé***
```

la précision cherchée, ou plutôt du nombre d'étapes ou de passage dans la boucle « tant que ».
Avec une précision de 10^{-12}, Algobox annonce un dépassement de capacité, mais de toute façon, l'affichage ne dépasse pas 8 chiffres après la virgule donc il est inutile d'aller jusque là.
Le programme fourni donc une valeur approchée à 8 chiffres de cette 1ère solution. La 2ème solution est trouvée sur [0;0,2] où la fonction est croissante. On trouve 0.10330758. Pour la 3ème solution, on cherche dans [0,4;1] où *f* décroit à nouveau. On trouve alors 0,51885455. Ainsi les 3 antécédents de 0 par *f* sont, approximativement, −0,62221778 ; 0.10330758 ; 0,51885455. L'avantage avec cet algorithme est qu'on va pouvoir le réutiliser pour d'autres fonctions (on changera juste l'expression de la fonction dans Algobox). Par contre, il faut d'abord effectuer un tracé graphique pour déterminer des intervalles où la fonction garde le même sens de variation.

```
solve(0.05*x^5-30*x^3+10*x-1)
[-24.4880607348, -0.622217775159, 0.103307577785, 0.518854549054, 24.4881163831 ]
```

NB : L'utilisation du solveur d'équations de Xcas donne cinq valeurs dont les trois qu'on a trouvé, et deux supplémentaires, égales à ±24,4881 environ. Ces valeurs avaient échappé à notre attention, car elles se situent très loin des trois autres et la fenêtre que nous avions choisie ne permettait pas même de soupçonner leur existence. C'est donc la limitation principale de cette méthode qui suppose une bonne connaissance des variations de la fonction si l'on ne veut rien oublier. Nous avons retracé la courbe de la fonction *f* sur l'intervalle [−25;25] et pouvons constater qu'à cette échelle, les deux solutions extrêmes sont bien visibles, par contre, aux alentours de 0, on voit bien qu'il y a au moins une solution, mais on ne peut discerner qu'il y en a trois ! À chacune de ces deux échelles d'observation, la courbe cache une partie des informations qui nous seraient utiles.



<u>Balayage</u> : Le principe du balayage est de découper le segment initial en fragments pour déterminer les bornes d'un nouvel intervalle, plus restreint, sur lequel on pourra recommencer. Il s'agit de la méthode de dichotomie si on partage le segment en deux à chaque fois. Mais l'idée ici est de le partager en un plus grand nombre de parties, par exemple en dix parties, ou en *p* parties, *p* étant paramétrable. Voici l'algorithme de balayage que nous proposons :

1. Entrer A et B (B plus grand que A), les extrémités du segment et N l'exposant de la précision souhaitée ainsi que P (le nombre de découpages à chaque étape). A', B', C et C' sont des nombres.
2. Calculer A'=*f*(A), L=(B−A)/P, C=A+L et C'=*f*(C)
3. Tant que (B−A)>10^N faire {
   Tant que A'×C'>0 faire {A=C, A'=C', C=A+L et C'=*f*(C)}
   B=C, L=(B−A)/P, C=A+L et C'=*f*(C)
4. Afficher C

```
Entrer la borne inférieure de l'intervalle : -1
Entrer la borne supérieure de l'intervalle : -0.5
Entrer l'exposant de la précision désirée : 10 puissance -10
Entrer le nombre de parties créées à chaque découpage : 10
La solution cherchée est environ égale à : -0.62221778
Le nombre I d'appels à f qui a été nécessaire est de : 67
Le nombre J de découpages qui a été nécessaire est de :11
```

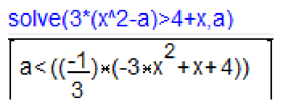
On peut ajouter des compteurs pour savoir combien de calculs sont nécessaires pour atteindre une précision donnée. Ici, on peut compter I le nombre d'appel à la fonction *f* (ce sera plus important qu'avec la dichotomie) et le nombre J d'intervalles [A;B] nécessaires pour atteindre cette précision (ce sera moins important qu'avec la dichotomie où I=J. Nous avons essayé cet algorithme sur la 1ère solution de notre équation, avec donc A=−1, B=−0,5, N=−10 et P=10. Le résultat est obtenu après 67 appels de *f* et 11 découpages (au lieu de 34 appels avec la dichotomie, pour la même précision de 10^{-10}).

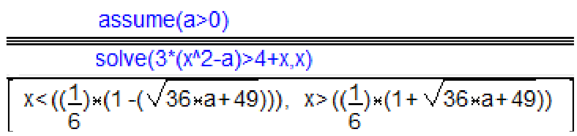
III] <u>Inéquations</u>

Une inégalité est une comparaison entre deux nombres. Par exemple 1<2, 1>0, 1≤2, 1≥0 sont des inégalités vraies ; 2≤1, 1≥2, 0<−1, 3>π sont des inégalités fausses. Les symboles ≤ et ≥ sont des « inégalités au sens large », on les emploie lorsqu'on accepte que les deux membres soient égaux (par exemple 1≤1 est vrai alors que 1<1 est faux).

<u>Définition</u> : une *inéquation* est une inégalité qui contient un ou plusieurs nombre inconnu(s). Lorsqu'une inéquation en x est vérifiée, pour un nombre x_0 particulier, on dit que x_0 est solution de l'inéquation en x. Résoudre une inéquation en x c'est trouver toutes les solutions de l'inéquation en x.

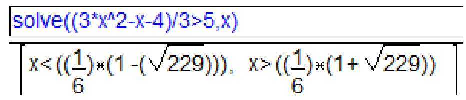
<u>Exemple</u> : L'inégalité $3(x^2-a)>4+x$ contenant deux nombre x et a inconnus peut être considérée comme une inéquation en x et a, mais on peut aussi la considérer comme une inéquation en x (a est alors un paramètre supposé connu) ou une inéquation en a (x est alors un paramètre supposé connu). Le logiciel de calcul formel Xcas donne ainsi les solutions de cette inéquation en a : $a<\frac{3x^2-x-4}{3}$ (nous avons juste modifié l'écriture donnée par Xcas pour la rendre plus simple). Mais si on lui demande de résoudre cette inéquation en considérant que c'est x l'inconnu, alors on obtient : $x<\frac{1-\sqrt{36a+49}}{6}$ ou $x>\frac{1+\sqrt{36a+49}}{6}$ ce qui considère bien a comme un paramètre connu (on lui a demandé de faire ce travail en supposant que a>0 car sinon le radical n'existe pas toujours).





<u>Remarque</u> : Pour savoir si un nombre x_0 est solution d'une inéquation en x, il suffit de remplacer dans l'inégalité le nombre x par le nombre x_0. Par exemple, 1 est-il solution de l'inéquation $\frac{3x^2-x-4}{3}>5$? Pour cela, on calcule le membre de gauche avec 1 à la place de x : $\frac{3-1-4}{3}=\frac{-2}{3}<5$ donc non, 1 n'est pas solution de cette inéquation. Et le nombre 3 est-il solution de l'inéquation ? $\frac{3\times9-3-4}{3}=\frac{20}{3}\approx6{,}7>5$ donc oui, 3 est solution de cette inéquation.

<u>Résolution d'une inéquation</u> : Si l'on veut résoudre cette inéquation, on peut utiliser un logiciel de calcul formel comme Xcas ou bien utiliser la méthode algébrique (effectuer soi-même les calculs en utilisant les propriétés algébriques) ou encore utiliser une méthode graphique. Nous allons voir ces deux derniers points dans les parties qui suivent.



a) Inéquations du 1er degré à 1 inconnue :

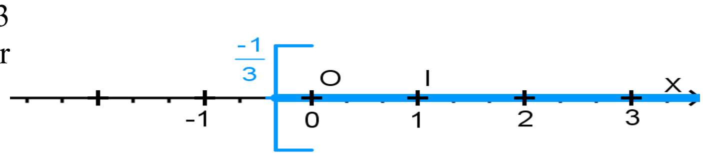
<u>Définition</u> : une *inéquation* du 1er degré en x est une inéquation qui peut se ramener à l'une des 4 formes :
$ax+b>0$; $ax+b<0$; $ax+b\geq0$; $ax+b\leq0$

<u>Exemple</u> : Dans l'inégalité $3x+1\geq0$ on cherche à savoir pour quelles valeurs de l'inconnue x la somme $3x+1$ est positive ou nulle. On peut essayer plusieurs valeurs et trouver plusieurs solutions : pour $x=1$ on trouve $4\geq0$ ce qui est vrai, donc 1 est une solution de l'inéquation. Mais pour $x=0$ on trouve $1\geq0$ ce qui est aussi vrai, donc 0 est une autre solution de l'inéquation. De même 2, 3, 4 sont des solutions de cette inéquation. Il y a une infinité de solutions, mais tous les nombres ne sont pas des solutions, par exemple -1 n'est pas solution car $-2\geq0$ est faux. -2 et -3 ne sont pas non plus des solutions. Est-ce à dire que tous les nombres négatifs ne sont pas solutions ? Non car $-0{,}1$ est une solution (car $0{,}7\geq0$). Pour caractériser les solutions, il faut transformer l'inégalité de départ, comme on l'a fait pour les équations, à l'aide des mêmes méthodes que celles qu'on utilise pour les équations, sauf cette particularité :

- Dans le cas où on multiplie/divise par un nombre **positif**, il n'y a pas de changement (exemple : si $3x<2$ alors $x<2\div3$).
- Dans le cas où on multiplie/divise par un nombre **négatif**, <u>il faut changer le sens de l'inégalité</u> (exemple : si $\mathbf{-3}x<2$ alors $x>2\div(\mathbf{-3})$ c'est-à-dire $x>-2\div3$.)

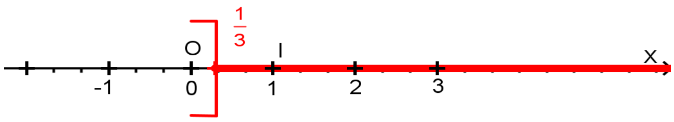
<u>Remarque</u> : Le changement de sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie/divise par un nombre négatif peut être évité en échangeant les nombres de côté. Par exemple, $-3x<2$ peut être échangé en $-2<3x$ (on change les nombres de côtés en changeant les signes sans changer le sens de l'inégalité) quitte à lire l'inégalité à l'envers : $3x>-2$ qui se résout simplement en divisant par un nombre positif (ici par 3).

Dans notre exemple, pour l'inéquation $3x+1\geq0$, il faut tout d'abord « faire passer le 1 de l'autre côté ». On obtient $3x\geq-1$. Il faut ensuite diviser par 3, qui est positif (donc on ne change pas le sens de l'inégalité). On obtient $x\geq-1\div3$. Il faut donc que x soit **plus grand ou égal à** $\frac{-1}{3}$ car il s'agit d'une inégalité au sens large. Les valeurs décimales $-0{,}3$ ou $-0{,}33$ ou encore $-0{,}333$ conviennent car

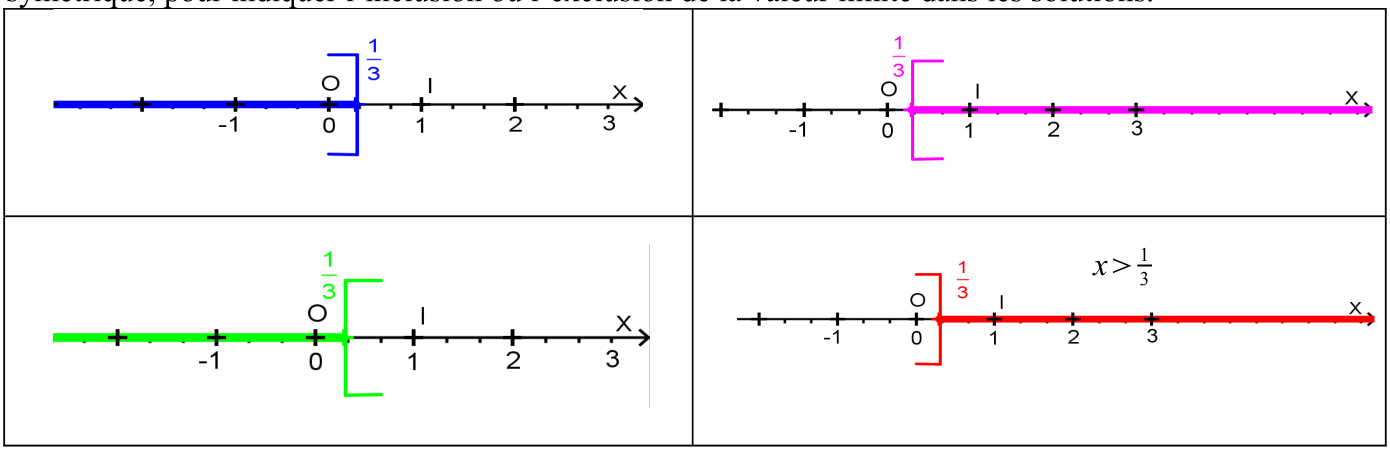


$\frac{-1}{3}=-0,\overline{3}$ (des 3 jusqu'à l'infini). Par contre, la valeur −0,4 ne convient pas car elle est trop petite. On peut représenter les valeurs qui conviennent sur un axe gradué où figure la valeur limite $\frac{-1}{3}$. Sur cette représentation graphique, le domaine des solutions est en bleu. Le crochet tracé sur la valeur limite $\frac{-1}{3}$ indique, en étant tourné vers les solutions, qu'on inclut la valeur limite dans les solutions (inégalité au sens large). La notation ensembliste pour indiquer l'ensemble des solutions est l'intervalle non borné [$\frac{-1}{3}$; +∞ [. Ainsi, on doit avoir $x\in[-\frac{1}{3};+\infty[$ pour que l'inéquation soit vérifiée.

Un autre exemple, pour montrer entre autre comment on indique, sur la représentation graphique, que l'on souhaite exclure de l'ensemble des solutions une valeur limite. Résolvons l'inéquation 4 < 3(x + 1). D'abord, développons : 4 < 3x + 3. Ensuite, regroupons : 4 – 3 < 3x. On obtient 1 < 3x. Divisons maintenant par 3 et renversons l'inégalité pour la lire dans le bon sens x > 1÷3 ou $x>\frac{1}{3}$. Les solutions de cette inéquation peuvent être représentées par la partie colorée en rouge, limitée par un crochet ouvert, pour montrer qu'on exclut la valeur limite $\frac{1}{3}$ (en effet, x doit être supérieur **strictement** à $\frac{1}{3}$). La notation ensembliste pour indiquer l'ensemble des solutions est l'intervalle ouvert et non borné] $\frac{1}{3}$; +∞ [. Les solutions de cette inéquation sont donc les nombres $x\in]\frac{1}{3};+\infty[$.



Bien sûr, vous rencontrerez les autres configurations, correspondant aux signes < et ≤ (les solutions sont « à gauche » de la valeur limite). Pour ces configurations, les crochets seront tournés de manière symétrique, pour indiquer l'inclusion ou l'exclusion de la valeur limite dans les solutions.



<u>Propriété</u> : Résoudre une *inéquation* du 1er degré en x telle que $ax+b>0$ conduit aux cas suivants :
Lorsque a≠0, si a>0, on a $x>\frac{-b}{a}$ soit $x\in]-\frac{b}{a};+\infty[$ et si a<0, on a $x<\frac{-b}{a}$ soit $x\in]-\infty;-\frac{b}{a}[$.
Lorsque a=0 et $b\leq 0$, il n'y a aucune solution soit $x\in\emptyset$.
Lorsque a=0 et $b>0$, tous les nombres sont solutions soit $x\in\mathbb{R}$.

<u>Remarques</u> : Bien sûr, on peut établir des conclusions similaires pour les 3 autres sortes d'inéquations du 1er degré. La résolution d'une inéquation telle que $ax+b>0$ revient à déterminer pour quelles valeurs de x le signe de l'expression affine $ax+b$ est positif (strictement). La détermination du signe d'une expression affine est d'une grande importance pour la suite. On retiendra donc les résultats suivants.

<u>Signe de $ax+b$</u> : Lorsque a≠0, l'expression affine $ax+b$ est du signe de a pour les valeurs $x>\frac{-b}{a}$ et du signe contraire à a pour les valeurs $x<\frac{-b}{a}$. On peut dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	**Signe contraire à *a***	**0**	**Signe de *a***

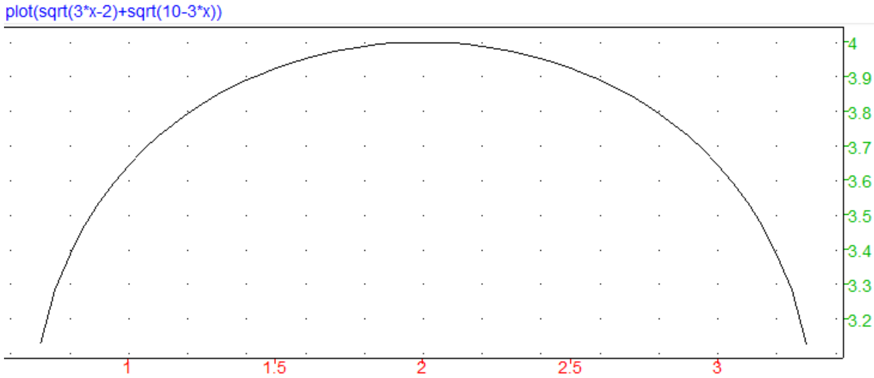
<u>Exemples</u> : L'expression 3x–2 est <u>positive</u> pour $x>\frac{2}{3}$ car 3<u>≥0</u> et négative pour $x<\frac{2}{3}$.

L'expression 10–3x est <u>négative</u> pour $x>\frac{10}{3}$ car –3≤0 et positive pour $x<\frac{10}{3}$.
Les tableaux de signe correspondant à ces deux expressions affines sont les suivants :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de 3x–2	–	0	+

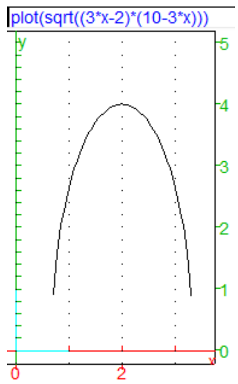
x	$-\infty$	$\frac{10}{3}$	$+\infty$
Signe de 10–3x	+	0	–

<u>Applications</u> : On peut avoir besoin du signe d'une expression pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x-2}$ n'est définie que si 3x–2 ≥ 0. Notre étude de signe conduit à la conclusion que l'ensemble de définition D_f de notre fonction est l'intervalle $[\frac{2}{3};+\infty[$.
On peut parfois avoir besoin de déterminer les solutions communes à 2 inéquations (on parle alors de système d'inéquations). Supposons par exemple, que nous ayons à étudier la fonction suivante : $g : x \mapsto \sqrt{3x-2}+\sqrt{10-3x}$. L'ensemble de définition de cette fonction g sera l'intersection de 2 intervalles car pour le 1er radical, on doit avoir $x\in[\frac{2}{3};+\infty[$ et pour le 2d radical, il faut que $x\in]-\infty;\frac{10}{3}]$. D_g est donc l'ensemble $[\frac{2}{3};+\infty[\cap]-\infty;\frac{10}{3}]$. Comme $\frac{2}{3}<\frac{10}{3}$, on a un intervalle qui convient, c'est $[\frac{2}{3};\frac{10}{3}]$. Par conséquent $D_g=[\frac{2}{3};\frac{10}{3}]$. L'allure de la courbe de cette fonction est donnée par Xcas (voir la figure ci-contre).



On peut parfois avoir besoin de déterminer le signe du produit (ou du quotient) de 2 expressions affines. Nous connaissons la règle des signes (le produit de 2 nombres de même signe est positif et celui de 2 nombres de signes contraires est négatif). Supposons par exemple, que nous ayons à étudier la fonction $h : x \mapsto \sqrt{(3x-2)(10-3x)}$. L'ensemble de définition de cette fonction g sera la réunion des intervalles où ces expressions sont de même signe (car ainsi leur produit sera positif). Le plus simple est de juxtaposer les 2 tableaux de signes.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
Signe de 3x–2	–	0	+	+	+
Signe de 10–3x	+	+	+	0	–
Signe de (3x–2)(10–3x)	–	0	+	0	–



On voit que h a le même ensemble de définition que g, D_h = $[\frac{2}{3};\frac{10}{3}]$. D'ailleurs ces fonctions ont des graphes qui se ressemblent (voir à droite).

c) <u>Résolution algébrique d'une inéquation</u>

Certaines inéquations se prêtent à une résolution algébrique. Nous avons vu que pour déterminer algébriquement le signe d'un produit, on se sert de l'étude des signes de chacun des facteurs. Si on arrive à mettre notre inéquation sous la forme de signe du produit ou d'un quotient d'expressions affines, comme $A_1\times A_2>0$ ou $\frac{A}{B}>0$ ou plus généralement $\frac{A_1\times A_2\times\ldots\times A_n}{B_1\times B_2\times\ldots\times B_n}>0$, alors la règle des signes permet de conclure.
Sur le plan pratique, il faut :

- Transformer l'inéquation pour obtenir une expression factorisée (avec éventuellement un dénominateur également factorisé) dont on cherche le signe.
- Étudier les signes de chacune des expressions affines et faire un tableau de signe global pour pouvoir conclure à l'aide de la règles des signes.

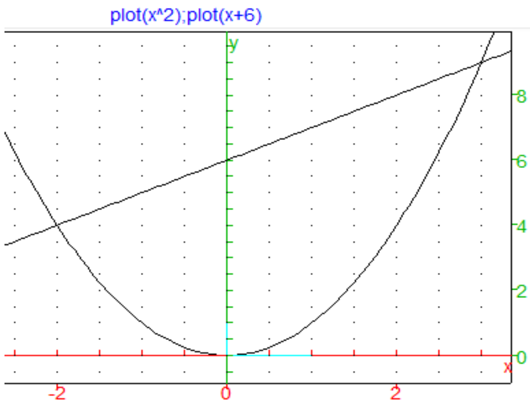
Exemples : Nous devons résoudre l'inéquation du second degré $5x^2-2x>0$. On commence par factoriser le membre de gauche $x(5x-2)>0$, ensuite on détermine le signe des 2 expressions affines x et $5x-2$ et puis on examine le tableau global des signes pour savoir où les 2 expressions ont des signes contraires.

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
Signe de x	–	0	+	+	+
Signe de $5x–2$	–	–	–	0	+
Signe de $x(5x–2)$	+	0	–	0	+

On voit que l'ensemble des valeurs de x où $x(5x–2)$ est positif est $]-\infty;0[\cup]0{,}4;+\infty[$. On peut aussi noter que les solutions doivent vérifier $x < 0$ **ou** $x > 0{,}4$.

Pour l'inéquation $4x^2\geq 9(2x+1)^2$, on pensera à utiliser la 3ème identité remarquable car on doit avoir $(2x)^2-(3(2x+1))^2\geq 0$ et donc $(2x-3(2x+1))(2x+3(2x+1))\geq 0$ soit $(-4x-3)(8x+3)\geq 0$, ce qui revient à $(4x+3)(8x+3)\geq 0$. On trouve alors, après avoir dressé le tableau global des signes, que les solutions de l'inéquation vérifient $x < \frac{-3}{4}$ ou $x > \frac{-3}{8}$, ce qui revient à $x\in]-\infty;-0{,}75[\cup]-0{,}375;+\infty[$.

On veut comparer x^2 et $x+6$, par exemple déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a $x^2 < x+6$. La factorisation de $x^2–x+6$ n'est pas aussi évidente, mais on a déjà rencontré de pareilles expressions du second degré et on en a décrit la factorisation éventuelle (ça n'est parfois pas possible). $x^2–x$ est le début du développement de $(x-\frac{1}{2})^2=x^2-x+\frac{1}{4}$ et donc $x^2-x-6=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}$. On peut maintenant factoriser et l'inéquation devient $(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2})<0$ soit $(x-3)(x+2)<0$. On en conclut que $x^2 < x+6$ pour $-2 < x < 3$ et que $x^2 > x+6$ pour $x < -2$ ou pour $x > 3$.



Cette étude vient souvent compléter une étude graphique.
Ici, on pourrait avoir les courbes des fonctions $f : x\mapsto x^2$ et $g : x\mapsto x+6$ (g est une fonction affine, sa courbe est donc une droite). Notre étude vérifie ce qui peut être constaté sur le graphique : la courbe de f est au dessous de celle de g pour $-2 < x < 3$. Ici, les valeurs de x pour lesquelles $f(x)=g(x)$ sont entières donc facilement lisibles sur le graphique, mais la plupart du temps, ce n'est pas le cas. La détermination algébrique permet alors d'en préciser les valeurs exactes. Si l'on avait eu à comparer x^2 et $x+5$ (5 au lieu de 6) par exemple, l'égalité est obtenu pour les nombres irrationnels $\frac{1-\sqrt{21}}{2}\approx -1{,}79$ et $\frac{1+\sqrt{21}}{2}\approx 2{,}79$, donc beaucoup plus difficiles à déterminer graphiquement avec précision.

Inéquations-quotient : Lorsque l'on a des expressions affines au dénominateur de l'expression algébrique factorisée dont on cherche le signe, la méthode est identique. La seule différence est que l'on doit signaler que le dénominateur ne peut pas être nul (on ne peut pas diviser par 0!).
Supposons par exemple, que l'on cherche à résoudre $\frac{4x-3}{(2-5x)(x-1)}\leq 0$. Il y a 2 expressions affines au dénominateur qui ne doivent pas être nulles. On signalera les valeurs $x_0=\frac{2}{5}$ et $x_1=1$ impossibles dans le tableau de signe en mettant deux traits || lorsque l'image de x n'existe pas (lorsqu'on devrait diviser par 0).

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{4}$		1	$+\infty$
Signe de $4x–3$	–	–	–	0	+	+	+
Signe de $2–5x$	+	0	–	–	–	–	–

Signe de $x-1$	–	–	–	–	–	0	+
Signe de $\frac{4x-3}{(2-5x)(x-1)}$	+	‖	–	0	+	‖	–

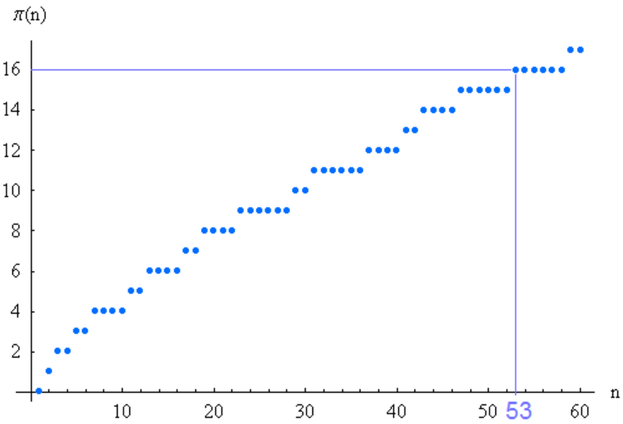
On voit que l'ensemble des valeurs de x où $\frac{4x-3}{(2-5x)(x-1)}$ est négatif ou nul est $]\frac{2}{5};\frac{3}{4}]\cup]1;+\infty[$, tout simplement.

c) Résolution d'une inéquation à l'aide d'une méthode approchée

Lorsqu'on ne sait pas résoudre techniquement une inéquation, on peut utiliser des méthodes approchées.

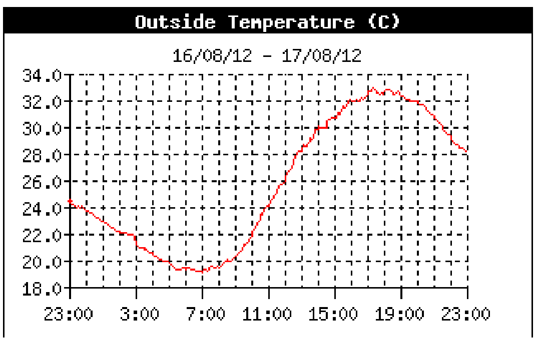
Inéquations de types $f(x)>k$ et $f(x)>g(x)$, méthode graphique : Le tracé de la courbe de la fonction f à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel permettant cela (GeoGebra par exemple) donne de précieuses informations. Si l'on doit résoudre une inéquation comme $f(x)>k$ où k est un réel fixé, il suffit de lire l'ensemble des valeurs de x où la courbe de f est au dessus (car on a le signe >) de la droite d'équation $y = k$. Si l'on doit résoudre une inéquation comme $f(x)>g(x)$ où g est une autre fonction, il suffit de lire l'ensemble des valeurs de x où la courbe de f est au dessus (car on a le signe >) de celle de g.

Exemples : Nous avons déjà vu que l'inéquation $x^2 > x+6$ est du type $f(x)>g(x)$ avec les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x+6$. La représentation graphique de ces fonctions montre que la courbe de f est au dessous de celle de g pour $-2 < x < 3$. Nous avons aussi signalé le problème de la précision des lectures graphiques pour ces résolutions. Une autre difficulté provient parfois du choix des paramètres de la fenêtre d'affichage : on peut passer à côté de certaines solutions si ces paramètres ne conviennent pas.



Dans certaines situations, la méthode graphique est la seule possible (si la fonction est donnée par son graphique, on ne peut pas faire de calculs et donc on ne peut ni faire de transformations algébriques, ni appliquer un algorithme). Voici par exemple le début du graphique donnant la fonction π qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs à n, n étant un entier positif. On comprend que cette fonction est croissante sur $\mathbb{N}$, et Euclide a montré qu'elle croissait jusqu'à des valeurs infinies. Mais comment résoudre une inéquation telle que $\pi(n)<k$? On peut essayer de programmer le calcul de $\pi(n)$, mais c'est un travail qui n'est pas simple, qui demande des capacités importante de calcul et surtout qui a déjà été fait. La courbe existe, on peut la trouver sur internet. On n'a alors qu'à utiliser la méthode graphique. Par exemple $\pi(n)<16$ a pour solution les entiers inférieurs à 53, donc tout nombre $n\in\mathbb{N}\cap[1;52]$ convient. On peut écrire cet ensemble en extension (avec des … tout de même) $n\in\{1;2;3;...;52\}$.

Un autre exemple de ce genre : voici la courbe des températures à Paris en ce chaud 17 aout 2012. La température en un lieu est une grandeur qui dépend de l'heure h, donc on la note $T(h)$. Question : à quelles heures h avait-on $T(h)$>30°C ? Réponse : d'après ce graphique pour h compris entre 15h et 21h30, soit pour $h\in[15;21{,}5]$.



Équations de types $f(x)>k$ et $f(x)>g(x)$, méthode algorithmique. Lorsqu'on sait comment calculer l'image de n'importe quel nombre par une fonction f donnée, on peut généralement se rapprocher autant que l'on veut de l'ensemble des solutions d'une équation du genre $f(x)>k$. La méthode sera identique pour une équation du genre $f(x)>g(x)$ si l'on sait calculer $g(x)$. Le principe consiste, une fois de plus en :

1. Détermination préalable d'un intervalle d'étude (par une méthode graphique) à l'intérieur duquel l'équation $f(x)=k$ ou $f(x)=g(x)$ n'a qu'une seule solution. On peut se ramener à une expression comme $f(x)-k$ ou $f(x)-g(x)$ et, dans ce cas, on détermine l'(ou les) intervalle(s) dans le(s)quel(s) ces expressions s'annulent une seule fois.
2. Application d'un algorithme de recherche (balayage, dichotomie) afin de se rapprocher au plus près de la valeur de x qui partage les nombres en deux : ceux qui sont solutions de l'inéquation, et ceux qui ne les ont pas.

Exemple : Certains nombres ne sont pas connus par leur valeur numérique mais par une propriété. Le nombre π par exemple est le rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle. De même, le nombre e a une très grand importance en mathématiques. Découvert par le mathématicien suisse Jacques Bernouilli (1654-1705) comme la valeur de $(1+\frac{1}{n})^n$ quand n devient très grand, et étudié par Leonhard Euler (1707-1783) qui montra entre autre que ce nombre n'est pas rationnel mais vaut $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots$ où $n!=1\times2\times3\times4\times5\times6\dots\times n$. C'est ainsi en tout cas que l'on peut en calculer les décimales, par une suite d'approximations rationnelles et leur développements décimaux. Par exemple, avec $n=3$ on trouve $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}\approx2{,}667$. On peut alors se demander jusqu'à quelle valeur de n il faut aller pour que notre valeur rationnelle comporte p décimales correctes. Nous voulons que le dernier terme ajouté $\frac{1}{n!}$ soit plus petit que le plus petit écart détectable avec p décimales. On doit donc résoudre cette inéquation en n : $\frac{1}{n!}<10^{-p}$. Ni la méthode algébrique ni le tracé de la courbe ne nous permettront de répondre, il faut calculer et comparer pour des valeurs de n qui vont en croissant, jusqu'à la précision souhaitée. On peut modifier algébriquement cette inégalité pour travailler avec des entiers uniquement : l'égalité des produits en croix nous conduit à écrire la condition $n!>10^p$. Notre algorithme est simple :

1. Lire p le nombre de décimales souhaité. Prendre un entier $n=1$ et un autre S=2.
2. Tant que $n!<10^p$

   Augmenter n de 1.

   Ajouter $\frac{1}{n!}$ à S.
3. Afficher S avec p décimales (on prendra la troncature de S)

Voici ce que nous apporte la programmation de cet algorithme sur Algobox :

P	1	2	3	4	5	6	7
N	4	5	7	8	9	10	11
S	2,7083333	2,7166667	2,7182540	2,7182788	2,7182815	2,7182818	2,7182818

Très vite limité par la capacité d'affichage de S limité à 8 chiffres d'Algobox, cet algorithme peut cependant nous indiquer jusqu'à quelle valeur de n il a fallu que Euler aille pour donner 23 décimales exactes, comme il le fit en 1727 (sans calculatrice s'il vous plait!) : 24! et donc il faut calculer l'inverse de 24! = $1\times2\times3\times\dots\times24\approx6{,}20\times10^{23}\dots$ Un logiciel de calcul formel nous donnera de meilleures estimations. Voici quelques résultats de la programmation de cet algorithme sur Xcas :

P	1	2	3	4	5	6	7	23	40
N	4	5	7	8	9	10	11	24	35
S	2,7	2,72	2,718	2,7183	2,71828	2,718282	2,7182818	2.71828182845904523536030	2.7182818284590452353602874713526624977576
F	$\frac{65}{24}$	$\frac{163}{60}$	$\frac{685}{252}$	$\frac{109601}{40320}$	$\frac{98641}{36288}$	$\frac{9864101}{3628800}$	$\frac{13563139}{4989600}$	$\frac{337310723185584470837549}{124089680346647887872000}$	$\frac{1755525521737874683345600011269141653811}{645821747899134058104165708595200000000}$

On trouve ainsi les 1000 premières décimales de e après 450 itérations :
2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742
7466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763233829880753195251019011573
8341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027
6183860626133138458300075204493382656029760673711320070932870912744374704723069697720931014169283681902
551510865746377211252389784425056953696770785449969967946864454905987931636889230098793127736178215424

99922957635148220826989519366803318252886939849646510582093923982948879332036250944311730123819706841614039701983767932068328237646480429531180232878250981945581530175671736133206981125099618188159304169035159888851934580727386673858942287922849989208680582574927961048419844436346324496848756023362482704197862320900216099023530436994184914631409343173814364054625315209618369088870701676839642437814059271456354906130310720851038375051011574770417189861068739696552126715468895703503536...

Aujourd'hui le record est au dessus de 1000 milliards de décimales pour *e*. Et pour le nombre π me direz-vous ? Les formules de calcul sont nombreuses car le nombre est connu depuis très longtemps. On peut essayer avec celle-ci, due à G. W. Leibniz (1646-1716), qui est très simple mais ne gagne de nouvelles décimales que très lentement : $\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\ldots$ (300 termes à ajouter pour obtenir 2 décimales correctes!). On aura mieux fait d'utiliser cette formule BBP due à Simon Plouffe (1997) : en prenant $A(n)=\frac{1}{16^n}\times\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)$ on a $\pi=A(0)+A(1)+A(2)+A(3)+\ldots$. Le calcul est très efficace puisqu'il donne 100 décimales correctes en calculant seulement 80 termes $A(n)$. Les termes étant tous positifs, nous nous rapprochons de π à chaque étape. Mais combien d'étapes faut-il pour connaître p décimales de π ? Nous sommes en train de résoudre l'inéquation en n : $A(n)<10^{-p}$. Le moyen le plus rapide pour calculer cela est de le programmer avec un algorithme du même genre que le précédent.

P	1	2	3	4	5	6	20
N	1	1	2	3	3	4	15
S	3,1	3,14	3,142	3,1416	3,14159	0,00000	3.14159265358979323846
F	$\frac{102913}{32760}$	$\frac{102913}{32760}$	$\frac{615863723}{196035840}$	$\frac{357201535487}{113700787200}$	$\frac{357201535487}{113700787200}$	$\frac{16071212445820879}{5115625817702400}$	$\frac{28471243807120253377792333689239912281715167328354127149}{9062678375755402859802473818588507977517344680312832000}$

On trouve ainsi les 1000 premières décimales de π après 826 itérations :
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019906...

Vous pouvez comparer les performances de ces 2 algorithmes (celui de Leibniz et celui de Plouffe) en examinant les résultats de celui de Leibniz et apprécier l'intérêt des progrès en mathématiques :

P	1	2
N	20	200
S	3,189	3,1466
F	$\frac{21831981985010836}{6845630929362225}$	$\frac{2940915371422875548835278859240481722666604260858254000064495915535454127733684464333240059162123140018917372134348967070210891712771199110942291109501038183943133545828152842}{934642317507958856584804653282309510090570025756274950379619810112592321031528683001772817360100200684169771518249599308707249123032298537030303264183792886171035734125611256}$