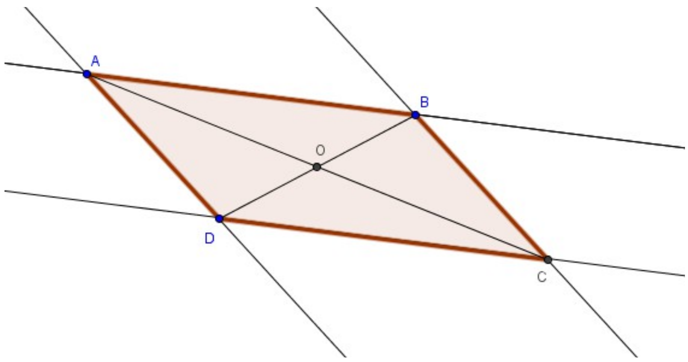
Chapitre 2 : Vecteurs

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé.		À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
Égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	• Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.	
Coordonnées d'un vecteur dans un repère.	• Connaître les coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.	
Somme de deux vecteurs.	• Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère.	La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$.
Produit d'un vecteur par un nombre réel.	• Utiliser la notation $\lambda\overrightarrow{u}$. • Établir la colinéarité de deux vecteurs.	Pour le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a, \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.
Relation de Chasles.	• Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. • Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	
Coordonnées d'un point du plan Abscisse et ordonnée d'un point dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Distance de deux points du plan. Milieu d'un segment.	• Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées. • Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. • Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Un repère orthonormé du plan est défini par trois points (O, I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O. À l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés.

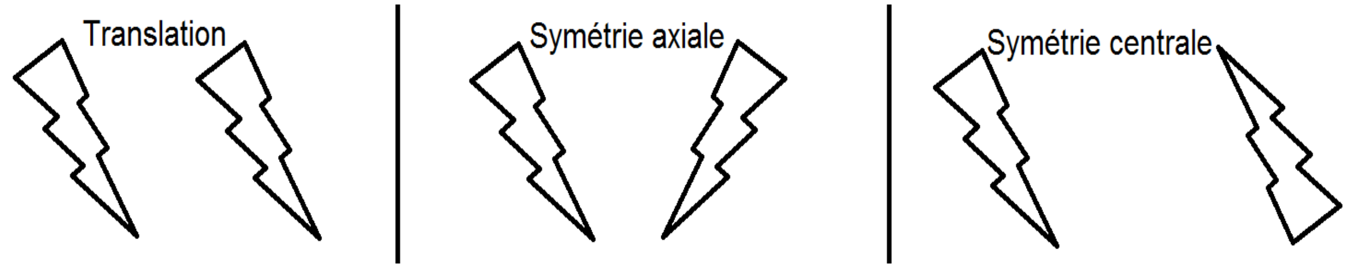
Nous allons définir ce qu'est un vecteur grâce à une figure (le parallélogramme), mais au préalable nous allons aussi définir une nouvelle transformation (la translation). Nous montrerons alors que cette situation géométrique peut être décrite de 3 façons différentes, dans 3 langages différents. L'objet de ce chapitre est de définir le langage vectoriel et d'en étudier les premières propriétés. Au passage, nous nous intéresserons à l'usage des coordonnées de points et de vecteurs qui ouvre la voie à la géométrie analytique.

1) Définitions

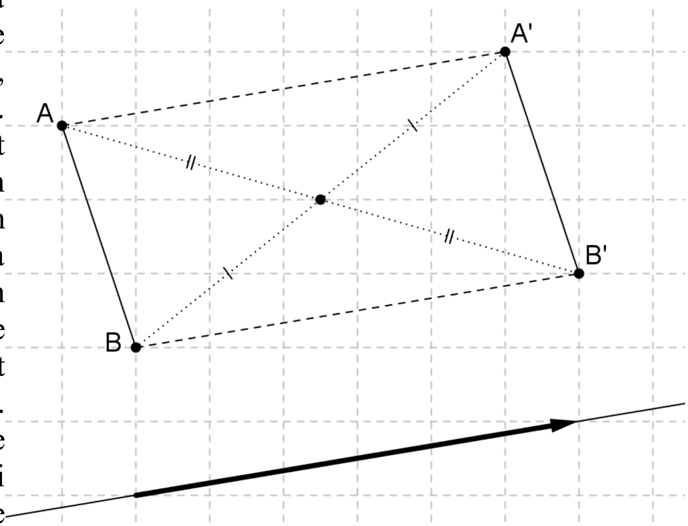


a) Translations

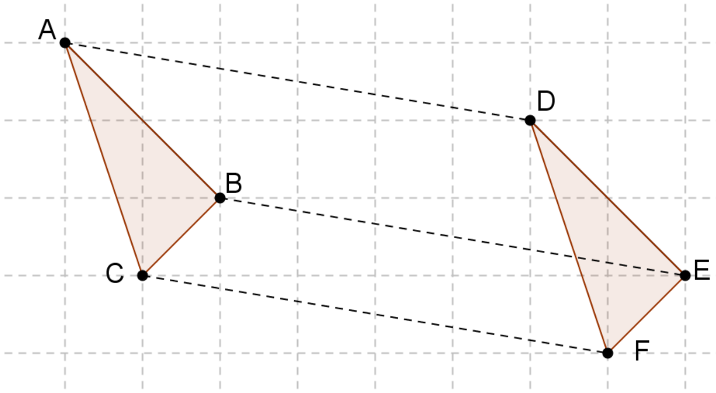
La géométrie est tout d'abord introduite naturellement par des **figures** : on y parle de certains objets (segments, droites, polygones, cercles, angles, etc.), des propriétés de ces objets (longueurs, aires, etc.) et des relations entre ces objets (intersection, parallélisme, perpendicularité, etc.). Par exemple, si on dit que $ABCD$ est un parallélogramme, cela signifie que les droites (AB) et (CD) d'une part, (AC) et (BD) d'autre part, sont parallèles. Le quadrilatère $ABCD$ peut avoir n'importe quelle forme ou dimension, s'il respecte cette condition alors c'est un parallélogramme et il dispose de toutes les propriétés qu'ont les parallélogrammes : des diagonales qui se coupent en leur milieu, des côtés opposés d'égales longueurs, des angles opposés d'égales mesures. Nous n'avons utilisé pour tout cela qu'un seul langage : celui des figures. C'est une façon de faire de la géométrie, mais il y en a d'autres comme nous allons le voir. Le deuxième langage de la géométrie étudié au collège est celui des **transformations** qui va utiliser des *notations fonctionnelles* (comme on le fait avec des nombres en $3^{ème}$ avec les fonctions affines), sauf qu'au lieu de nombres, on transforme des points ou des ensembles de points (des figures).



En $6^{ème}$ et en $5^{ème}$ on a étudié les symétries axiales et centrales : ce sont des transformations qui ne modifient pas la forme des objets du plan qu'elles transforment ; elles en modifient juste la disposition. Il y a d'autres transformations qui modifient la disposition des objets sans modifier la forme, on les appelle les *isométries* du plan. Parmi celles-ci, il y a la *translation*, ou plutôt les translations, qui déplacent les objets sans en modifier ni la forme, ni la direction. La figure ci-dessus montre comment est déplacée une figure par translation : elle est déplacée, identique à elle-même, dans une autre position. Pour définir une translation, on dit seulement comment est déplacé un point, par exemple, on parle de la translation $t_{A\to A'}$ qui transforme A en A' ; comme il n'y en a pas d'autres ici, on notera simplement cette translation t. Avec la notation fonctionnelle cela s'écrit : $t(A)=A'$. Cette translation transforme un point B en un point $B'=t(B)$ tel que $AA'B'B$ soit un parallélogramme. On a ainsi défini la translation t grâce à une figure, le parallélogramme. On pourrait aussi définir la translation t grâce à une autre transformation, la symétrie centrale, car si $AA'B'B$ est un parallélogramme, alors B' est le symétrique de A par rapport au milieu de $[BA']$.



On peut réciproquement, définir le parallélogramme grâce à la translation : dire qu'un segment $[AB]$ est translaté en un segment $[\boldsymbol{DE}]$ signifie que $(AB)//(DE)$ et que $(AD)//(BE)$, autrement dit, que $AB\boldsymbol{ED}$ est un parallélogramme. Si le triangle ABC est translaté en un triangle DEF, c'est que $ABED$, $BCFE$ et $ACFD$ sont des parallélogrammes.



N'oublions pas l'autre notation fonctionnelle qui a été employée pour les fonctions numériques, la notation $t : P \to P$, où P est le plan dans lequel on opère (t est une transformation du plan P).

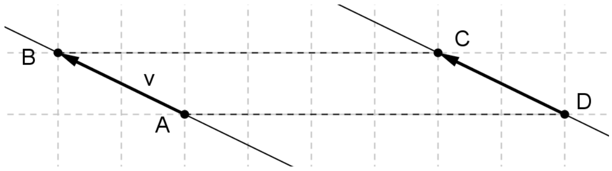
$$A \mapsto D=t(A)$$

Dans cette notation, si on sait qu'il s'agit d'une même transformation, on pourra décrire ce que fait cette transformation : $B \mapsto E$, $C \mapsto F$, $[AB] \mapsto [DE]$, $[BC] \mapsto [EF]$, $ABC \mapsto DEF$, etc.

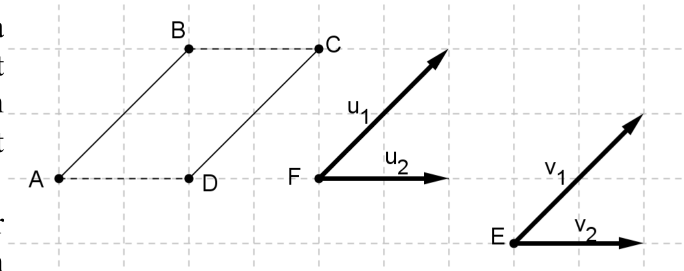
b) Vecteurs

Pour traduire le fait que $ABCD$ est un parallélogramme ou, ce qui revient au même, que $[DC]$ est l'image de $[AB]$ par une translation, nous dirons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont des vecteurs égaux et nous noterons : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. La flèche sur les points indique qu'il s'agit d'un vecteur et non d'une distance ou d'autre chose. Cette notation signifie seulement que, pour aller de A vers B ou de D vers C, on effectue un déplacement dans la même <u>direction</u> (la direction des droites parallèles (*AB*) et (*CD*)), dans le même <u>sens</u> (sur une droite on peut se déplacer dans deux sens différents, ici on se déplace sur (*AB*) dans le sens *A*→*B*) et de la même <u>longueur</u> (la longueur *AB* qui est la distance entre *A* et *B*). Un vecteur est en effet défini par ces 3 éléments : direction, sens et longueur. Le vecteur $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ est défini par les éléments suivants :

- la direction d'une famille de droites parallèles, ici (*AB*) ou (*CD*) qui sont parallèles,
- le sens de parcours positif sur ces droites, ici le sens *A*→*B* ou *D*→*C*,
- la distance à parcourir, ici *AB* qui est égale à *DC*.

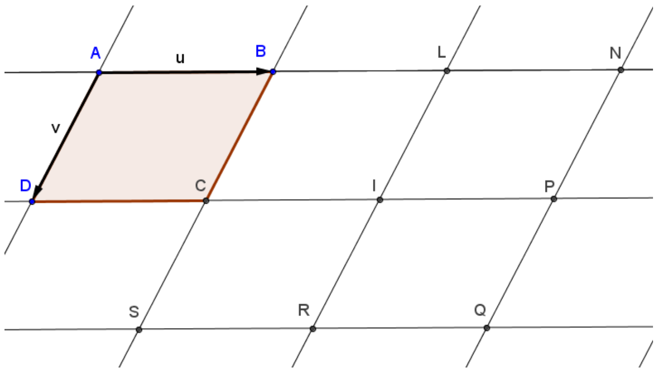


Comme un vecteur ne dépend pas nécessairement des points qui le définissent, on peut le noter avec une notation spécifique (une seule lettre). On peut ainsi définir le vecteur $\vec{v}$ par l'égalité $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.



Dans le langage des transformations, on a vu que l'égalité $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ signifie que *C* est l'image de *D* par la translation qui transforme *A* en *B*. Cela peut être écrit d'une façon plus concise en employant les vecteurs. On écrira en effet que $C=t_{\overrightarrow{AB}}(D)$, et si on a au préalable dit que $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, alors on aura tout simplement $C=t_{\vec{v}}(D)$.

Sur la figure ci-dessous, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur particulier, tracé à partir du point A, qu'on retrouve en différents endroits de la figure : tracé à partir de *D* (on l'appelle alors $\overrightarrow{DC}$, mais il s'agit du même vecteur), ou encore à partir de *E* et *F* (on les a appelé $\vec{v_1}$ et $\vec{u_1}$). $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{u_1}$ sont 4 représentants d'un même vecteur. Ce qui les différencie est le point de départ (ce qu'en physique, dans la partie qui étudie les forces, on appèlera le point d'application de la force) du vecteur. Un autre vecteur, différent du premier, est le vecteur $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{v_2}=\vec{u_2}$ (nous avons là aussi 4 représentants d'un même vecteur).



Décrivons la configuration ci-contre où les points *ABCD* forment un parallélogramme qui est le motif élémentaire d'un pavage du plan. On peut écrire de nombreuses égalités vectorielles qui traduisent l'existence de nombreux parallélogrammes dans cette figure, par exemple : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IP}=...=\vec{u}$, mais on a aussi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{CS}=...=\vec{v}$ ou encore $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{SQ}=...$, etc. Une série d'égalité caractérise un même vecteur dont donne plusieurs représentants.

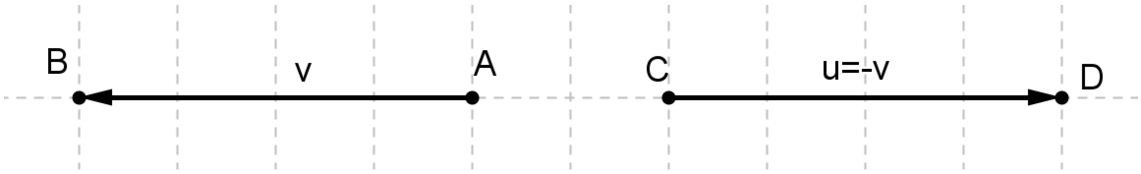
Pour résumer la définition d'un vecteur, on peut dire que ces trois notations sont équivalentes :

Langage des configurations	*ABCD* est un parallélogramme.
Langage des transformations	La translation qui transforme *A* en *B* transforme *D* en *C*.
Langage des vecteurs	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

On peut remarquer que le langage vectoriel est particulièrement concis (5 caractères) mais surtout il utilise un des symboles de l'algèbre : l'égalité. Par la suite, nous verrons qu'il utilise aussi les symboles de somme et de différence ainsi qu'une forme de multiplication...

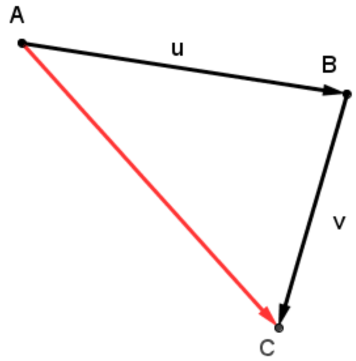
<u>Vecteur nul et vecteurs opposés</u> : il y a un vecteur particulier qui n'a ni direction ni sens. Le vecteur $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$, appelé vecteur nul. Ce vecteur joue un rôle important dans le langage vectoriel, équivalent au rôle que joue le 0 pour les nombres. En particulier, la somme de 2 vecteurs sera nulle quand les vecteurs seront opposés et si $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ on notera que $\vec{u}=-\vec{v}$. Des vecteurs opposés sont des vecteurs ayant même direction et même longueur, mais dont le sens est différent. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés, et on a $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. Et si $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ c'est que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et donc que ABCD est un parallélogramme. Pour traduire que I est le milieu de [AB] dans le langage des vecteurs, on écrira $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

ou $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$ ou encore $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



2) L'addition vectorielle

a) Relation de Chasles

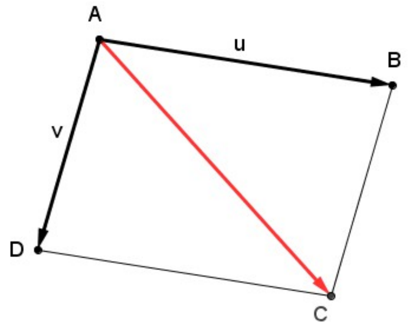


Lorsqu'on applique à un point A une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis une deuxième translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, ce point a pour image finale le point C. Il est transformé de la façon suivante $A\rightarrow B\rightarrow C$ mais le point intermédiaire B ne joue qu'un rôle anecdotique si on ne s'intéresse qu'aux positions de départ et d'arrivée. La succession de ces deux translations est une translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Les mathématiciens ont voulu définir une opération sur les vecteurs qui traduise cette situation. La relation vectorielle – dite **relation de Chasles** – définit l'addition des vecteurs : $\overrightarrow{A\boldsymbol{B}}+\overrightarrow{\boldsymbol{B}C}=\overrightarrow{AC}$ (A, B et C étant trois points quelconques)

On peut écrire cela pour tout triplet de points. Par exemple, $\overrightarrow{A\boldsymbol{D}}+\overrightarrow{\boldsymbol{D}C}=\overrightarrow{AC}$ et ceci, quel que soit le point D. Il peut être en A et cela donne, $\overrightarrow{A\boldsymbol{A}}+\overrightarrow{\boldsymbol{A}C}=\overrightarrow{AC}$ (ce qui traduit le fait qu'ajouter le vecteur nul à un autre vecteur ne change pas ce vecteur). Sans connaître les points I, J et K on peut écrire les égalités $\overrightarrow{I\boldsymbol{J}}+\overrightarrow{\boldsymbol{J}K}=\overrightarrow{IK}$ ou encore $\overrightarrow{K\boldsymbol{I}}+\overrightarrow{\boldsymbol{I}J}=\overrightarrow{KJ}$, l'important est de toujours mettre un même point intermédiaire entre le point de départ et le point d'arrivée d'un déplacement.

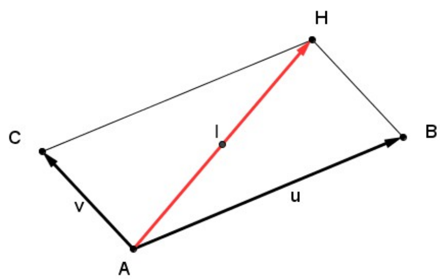
<u>Conséquence</u> : on peut toujours décomposer un vecteur quelconque, en une somme de deux vecteurs grâce à cette relation : $\overrightarrow{M\boldsymbol{N}}+\overrightarrow{\boldsymbol{N}P}=\overrightarrow{MP}$. Le point N peut être n'importe où, cette égalité sera toujours vérifiée car elle signifie seulement «si je vais de M à N puis de N à P alors je suis finalement allé de M à P ».

b) Règle du parallélogramme



Il est possible dans cette relation de Chasles, de remplacer un des vecteurs par un vecteur qui lui est égal. Par exemple, dans un parallélogramme $ABCD$ on sait que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Comme, d'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{A\boldsymbol{B}}+\overrightarrow{\boldsymbol{B}C}=\overrightarrow{AC}$, il est possible d'écrire l'égalité $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Cette dernière égalité est connue sous le nom de « règle du parallélogramme » qui est une autre façon de définir l'addition de deux vecteurs, utilisée lorsqu'on a deux vecteurs de même origine.

On peut l'énoncer ainsi : Si A, B et C sont trois points quelconques, alors on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}$, H étant le 4^ème^ sommet du parallélogramme $BACH$.

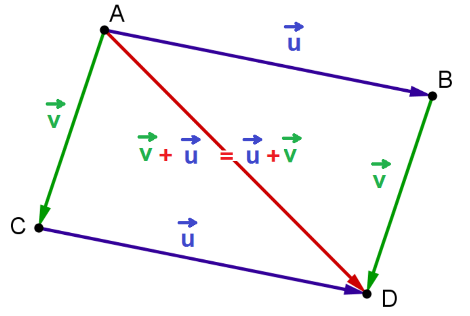


C'est-à-dire que pour construire H tel que $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, on peut utiliser ce qu'on sait des parallélogrammes, en particulier que H est le symétrique de A par rapport au milieu I de [BC].

c) Propriétés de la somme vectorielle

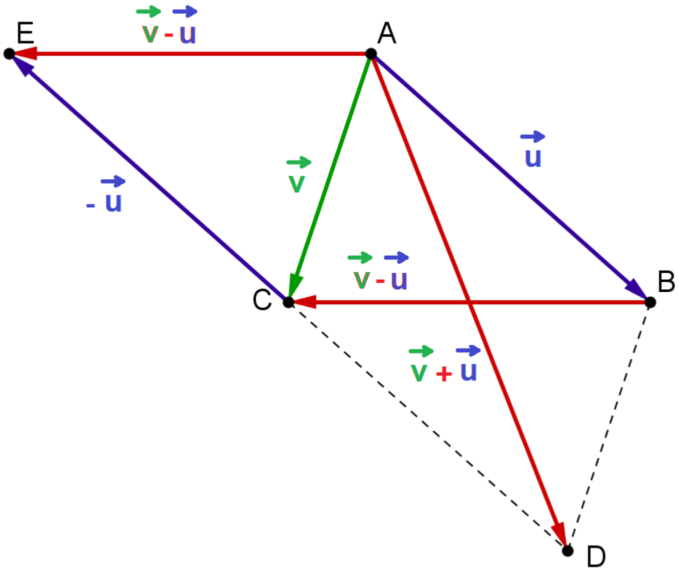
La somme des vecteurs ne dépend pas de l'ordre des vecteurs (comme pour l'addition des nombres, on dit que l'addition est commutative). Autrement dit, $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ ou encore $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$, et d'une façon plus générale encore $\boxed{\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$. Ceci se prouve facilement en considérant le parallélogramme $ABDC$ ci-dessous où l'on a représenté 2 représentants des vecteurs

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. D'après la relation de Chasles on a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$, d'où $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$.

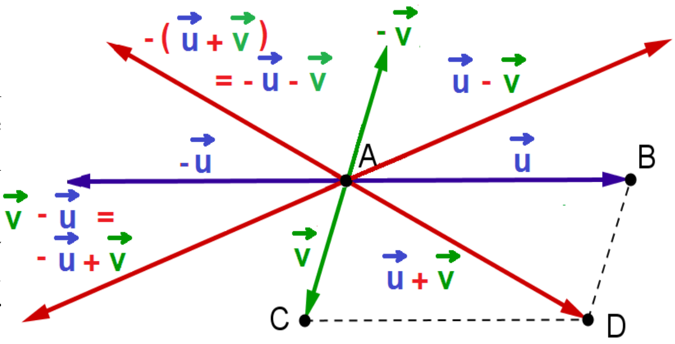


Comme on l'a déjà observé plus haut, l'addition de 2 *vecteurs opposés* (même direction et même longueur mais sens différents) donne le vecteur nul : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. L'égalité $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ traduit ainsi le fait que I est le milieu de $[AB]$ alors que l'égalité $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}$ est une égalité qui est toujours vraie, indépendant du fait que I soit ou ne soit pas le milieu de $[AB]$. Rappelons à ce propos que le vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, ainsi $\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\vec{0}$.

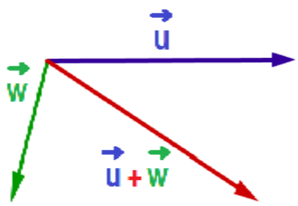
d) <u>Différence vectorielle</u>

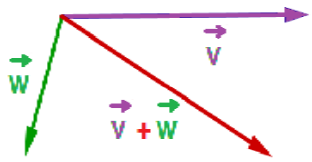


Lorsqu'on ajoute l'opposé d'un vecteur, comme lorsqu'on ajoute l'opposé d'un nombre, on va écrire une différence de vecteurs. Ainsi, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ et particulièrement $\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. La différence des vecteurs est définie par les règles d'addition (relation de Chasles ou règle du parallélogramme) et la notion de vecteurs opposés. La relation de Chasles s'écrit avec une différence $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ ou encore $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Alors que la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ correspond à une diagonale du parallélogramme, les différences $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ correspondent à l'autre diagonale (voir figure). D'une façon générale $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{v}-\vec{u}$ sont des vecteurs opposés. Cette propriété se note $\vec{u}-\vec{v}=-(\vec{v}-\vec{u})$. Et l'opposé d'une somme est égale à la somme des opposés, ce qui se note $-(\vec{u}+\vec{v})=-\vec{u}-\vec{v}$.



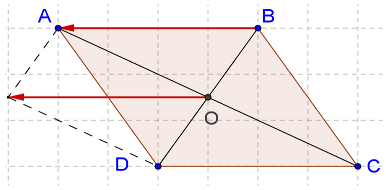
<u>Transformations d'expressions vectorielles</u> : On dispose déjà de quelques propriétés qui permettent de transformer une expression vectorielle (décomposition d'un vecteur en somme ou en différence, opposés d'une somme ou d'une différence, commutativité de la somme). Comme il est, de plus, possible d'ajouter un même vecteur à deux vecteurs égaux pour obtenir deux vecteurs égaux, on va pouvoir transformer des égalités vectorielles, en ajoutant ou en soustrayant aux 2 membres de l'égalité le même vecteur car si $\vec{u}=\vec{v}$ alors $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{w}$ et $\vec{u}-\vec{w}=\vec{v}-\vec{w}$. Ces possibilités de calcul vectoriel associées à l'utilisation des coordonnées (de vecteurs et de points) donnent tout leur intérêt aux vecteurs et transforment l'étude des configurations du plan (et plus tard de l'espace) en des problèmes algébriques (sommes algébriques, équations et systèmes, etc.). Il nous manque encore la notion de vecteurs colinéaires qui sera étudiée dans une 4[ème] partie et qui, en introduisant la multiplication d'un vecteur par un réel, permettra au calcul vectoriel de traduire la plupart des situations géométriques connues en problème vectoriel.





<u>Exemple</u> : *ABCD* est un parallélogramme de centre O. Montrons que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}$. Il suffit de

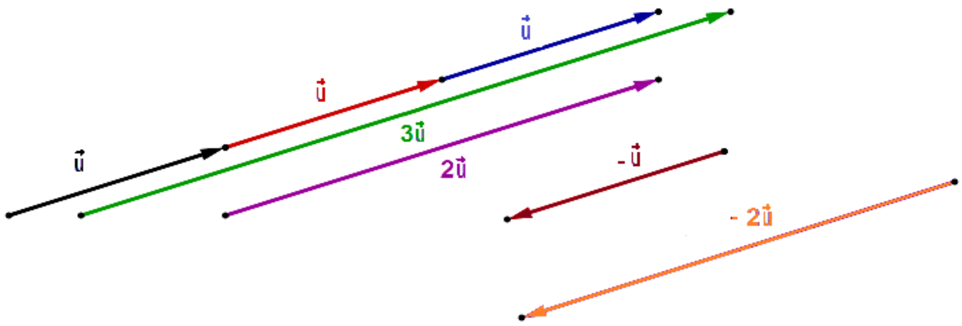
décomposer un des vecteurs, par exemple $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$, cela donne $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OD}$. Ensuite on permute les 2 derniers termes $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{BA}$ et on remarque que, O étant le milieu de la diagonale [BD] $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ et donc, finalement $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}$. C'est simple, non ? Et particulièrement efficace. Cela revient à montrer la partie direct du théorème des milieux.



3) Colinéarité

a) Multiplication d'un vecteur par un réel

Nous avons vu déjà que si le point I est le milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$, et donc on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}$. On a envie d'écrire $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$. Cette notation ayant du sens (le vecteur $2\overrightarrow{AI}$ a le même sens et la même direction que le vecteur $\overrightarrow{AI}$ mais une longueur 2 fois plus grande), on peut l'étendre à d'autres nombres que 2. Le vecteur $3\overrightarrow{AI}$ sera tout simplement égal à $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}$ ou $2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}$. On a déjà rencontré le vecteur $-\vec{u}$ qui est le vecteur opposé du vecteur $\vec{u}$. On pourrait écrire, comme avec les nombres, que $-\vec{u}=-1\times\vec{u}$, et ainsi comprendre que la multiplication par -1 change tout simplement le sens d'un vecteur.

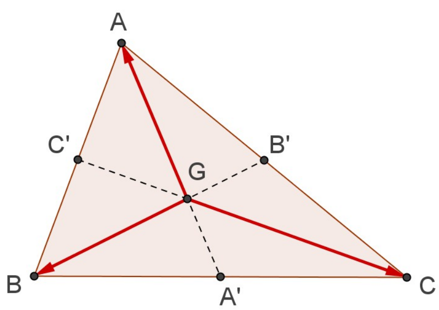


D'une façon générale, k étant un nombre réel et $\vec{u}$ étant un vecteur, on définit ainsi le vecteur $k\vec{u}$ comme étant un vecteur de même direction que le vecteur $\vec{u}$, de même sens si $k>0$ et de sens contraire si $k<0$, et de longueur égale à k fois celle de $\vec{u}$.

Cette multiplication d'un vecteur par un nombre, combinée avec l'addition vectorielle, partage avec la multiplication des nombres une même propriété : la *distributivité*, dans le sens que l'on a pour tous nombres k et k' et tout vecteur $\vec{u}$ l'égalité suivante $k\vec{u}+k'\vec{u}=(k+k')\vec{u}$. Une autre forme de distributivité est vérifiée avec des vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{u'}$: $k\vec{u}+k\vec{u'}=k(\vec{u}+\vec{u'})$.

Les autres propriétés vérifiées par cette multiplication rappellent celles de la multiplication des nombres : $k\times(k'\vec{u})=kk'\vec{u}$, $1\times\vec{u}=\vec{u}$, $-1\times\vec{u}=-\vec{u}$ et aussi $0\times\vec{u}=\vec{0}$ et $k\times\vec{0}=\vec{0}$. Par contre, il n'y a pas de notion de vecteur inverse. Fort de cette nouvelle opération, le calcul vectoriel devient un outil très puissant qui permet d'obtenir facilement certains résultats de la *géométrie classique* (celle des figures).

Examinons par exemple, pour 3 points quelconques A, B et C, la situation d'un point G vérifiant l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Pour cela, décomposons $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ en fonction de $\overrightarrow{GA}$.
Cela donne $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Si on appelle A' le milieu de $[BC]$, on sait que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B})+(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C})=2\overrightarrow{AA'}+(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C})=2\overrightarrow{AA'}+\vec{0}=2\overrightarrow{AA'}$ car, comme A' est le milieu de $[BC]$ on a $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$. Finalement, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$. Cette égalité revient à écrire que $3\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AA'}$ ou encore $3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AA'}$, ce qui s'écrit aussi $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$. On doit en déduire que G, A et A' sont alignés, autrement dit que G appartient à la médiane (AA') du triangle ABC, et G se situe au $\frac{2}{3}$ de la médiane en partant de A. Ce que nous avons obtenu pour (AA') on aurait pu l'obtenir pour (BB') ou (CC') ce qui prouve que les



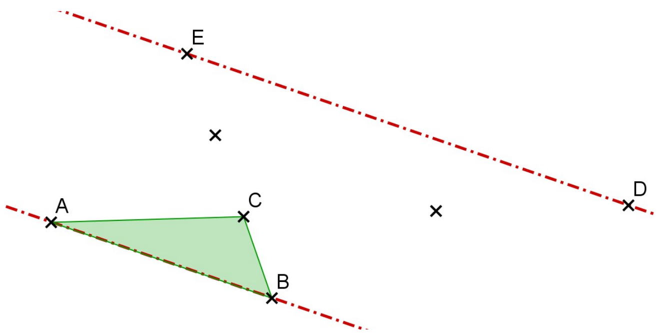
médianes se coupent en G, dans la position qu'on lui connait, au $\frac{2}{3}$ en partant du sommet, sur chacune. Appréciez ici la concision du calcul vectoriel en comparant ces quelques lignes à la démarche qu'il fallait faire au collège en n'utilisant que le langage des figures.

Au passage, nous retiendrons cette caractérisation du milieu I d'un segment $[BC]$ car elle est plus générale que la simple égalité $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$: Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. C'est une façon de traduire la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$ où C est le 4ème sommet du parallélogramme *AMBC,* autrement dit, $[MC]$ et $[AB]$ ont le même milieu I. Si M est en I, cela redonne l'égalité connue $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{II}=2\vec{0}=\vec{0}$.

b) Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs sont dits *colinéaires* s'ils ont la même direction, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$. Dans ce cas, il existe un réel k' tel que $\vec{u}=k'\vec{v}$, il s'agit tout simplement de $k'=\frac{1}{k}$.

La colinéarité de vecteurs traduit vectoriellement la notion de parallélisme de droites et ses applications telles que l'alignement de 3 points. Pour montrer que (AB) et (CD) sont 2 droites parallèles, il suffira de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. De même, pour montrer que le point C appartient à la droite (AB), il suffira de montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Voyons cela sur des exemples.



Exemple 1 : Soient ABC un triangle, D un point tel que $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{CA}$ et E un point tel que $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}$. Démontrons que les droites (AB) et (DE) sont parallèles :

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}$ d'après la relation de Chasles.

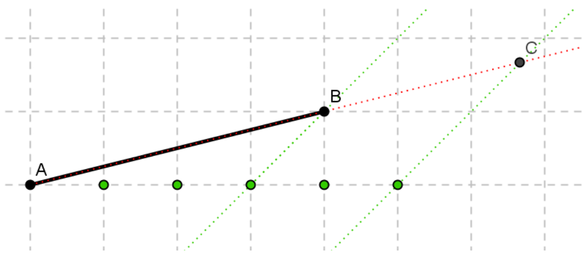
$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{BC}$ d'après les définitions.

$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BC}$ en appliquant la distributivité.

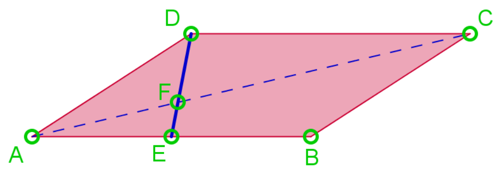
$\overrightarrow{DE}=2(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC})$ pour la même raison (distributivité).

$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{BA}$ d'après la relation de Chasles.

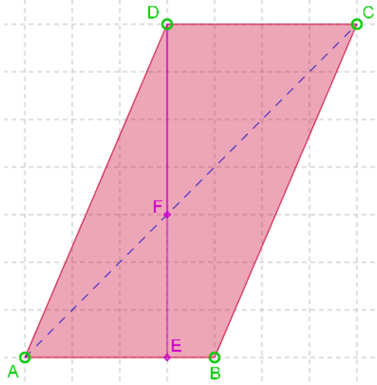
Conclusion : $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires, les droites (DE) et (BA) sont parallèles.



Exemple 2 : Soit un segment $[AB]$ tel que AB=6 cm et C le point défini par $5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. L'égalité peut s'écrire $5\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CA}$ et donc $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires. Les droites (CB) et (CA) sont donc parallèles et, comme elles passent par le même point C, on en déduit que A, B et C sont 3 points alignés. Pour placer C sur (AB), exprimons $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$: $5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-2\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ et donc $5\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$. On voit maintenant comment on peut placer le point C.

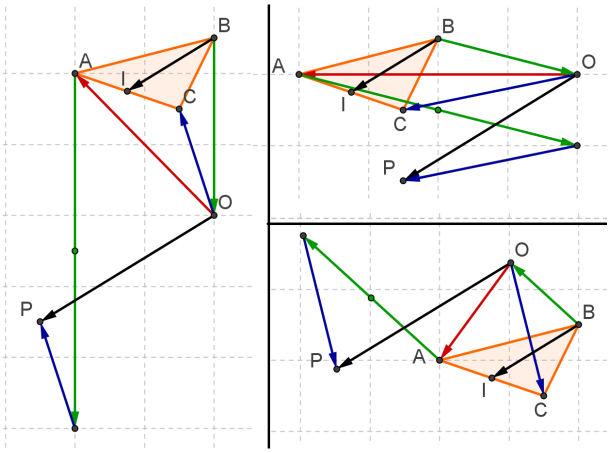


Exemple 3 : Parfois, pour montrer que 2 vecteurs sont colinéaires, on peut les exprimer tous les deux en fonctions de deux vecteurs non colinéaires. Supposons que $ABCD$ soit un parallélogramme, E le milieu $[AB]$ et F le point de $[DE]$ tel que $EF=\frac{1}{3}ED$. Montrons que A, F et C sont alignés en décomposant $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Pour $\overrightarrow{AC}$ c'est facile car c'est la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Pour $\overrightarrow{AF}$ décomposons $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$ et, d'après les définitions de E et F, remplaçons $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$. Or, $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$. On a donc finalement $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. On voit donc que $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ les points A, F et C sont donc bien alignés.



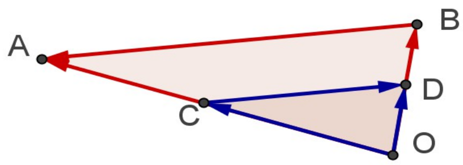
NB : Ceci n'est qu'un exemple pour illustrer une méthode. Dans cette situation, on pourrait plus simplement faire de la géométrie classique, et montrer que F est le centre de gravité du triangle ABD. Le lecteur/élève pourra se convaincre de l'intérêt de cette méthode en prenant E au ¾ de $[AB]$, donc avec la définition $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et F sur $[DE]$ tel que $EF=\frac{3}{7}ED$.

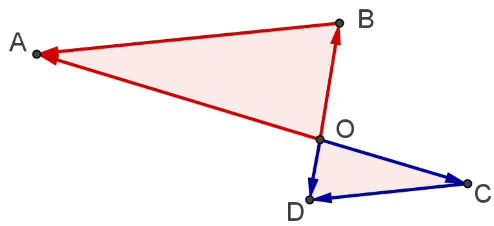
Vectoriellement, ce n'est pas plus compliqué, alors qu'en géométrie classique, on sera moins à l'aise pour reconnaître un centre de gravité...



Exemple 4 : On a 3 points fixes A, B et C. I étant le milieu de $[AC]$ et O étant un point variable, on associe à ce point O un point P tel que $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est indépendant de O, autrement dit que P sera l'image de O par une translation de vecteur $\vec{u}$ à déterminer. $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})=(1-2+1)\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Ce vecteur est bien indépendant de O, transformons-le en introduisant le point I pour le simplifier : $\overrightarrow{OP}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BI}$. P est donc l'image de O par une translation de vecteur $\vec{u}=2\overrightarrow{BI}$.

Exemple 5 : Montrons un autre résultat important de la géométrie étudié au collège. Si O, A, B, C et D sont 5 points du plan tels qu'il existe un même nombre k tel que $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OD}$. Alors on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OD}-k\overrightarrow{OC}=k(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=k\overrightarrow{CD}$. Autrement dit, si $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$ alors $(AB)//(CD)$... ceci ne vous rappelle rien ? Pour utiliser la réciproque du théorème de Thalès, on devait faire attention à l'ordre des points, mais ici, cette précaution est inutile, le bon ordre étant automatiquement assuré par les égalités vectorielles.

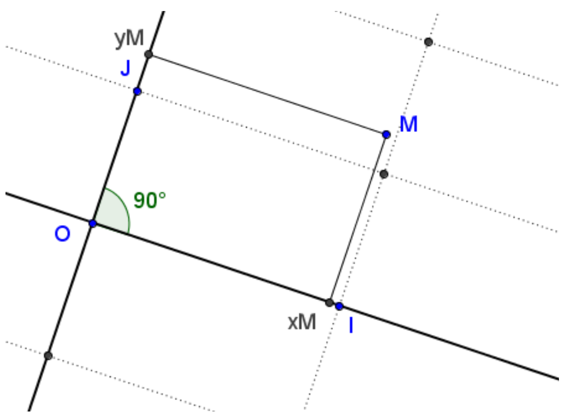




4) Coordonnées de vecteurs

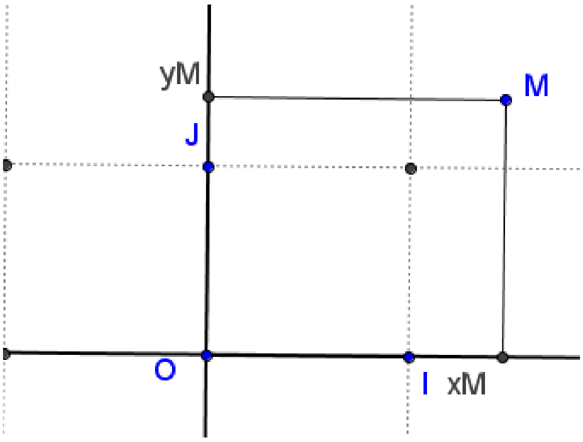
a) Coordonnées de points

Pour parler de coordonnées de points, il faut se donner un repère du plan, c'est-à-dire un point Origine (noté souvent O) et deux points I et J distincts de O et non alignés avec O. Le repère (O, I, J) permet de graduer deux droites se coupant en O, notées souvent (Ox) et (Oy). On gradue l'axe (Ox) en donnant les abscisses 0 à O et 1 à J et on fait de même pour l'axe (Oy). Grâce à ce repère, on va pouvoir associer à tout point M du plan, un couple de coordonnées $(x_M ; y_M)$ selon le principe illustré sur le graphique ci-dessus : on projette le point M sur les chacun des axes, parallèlement à l'autre axe. On lit alors sur (OI) l'abscisse x_M de M et sur (OJ) l'ordonnée y_M de M.

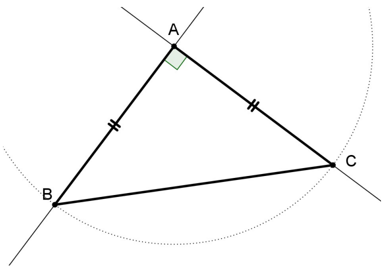


Bien sûr, on n'est pas forcé de prendre des axes quelconques. Souvent on prend des axes perpendiculaires (le repère est alors dit *orthogonal*) et généralement on choisit des unités de longueurs égales sur les deux axes (on dit que le repère est *orthonormé* si les deux conditions sont réunies). La plupart du temps on aura donc un axe horizontal et un axe vertical.

L'habitude est de prendre (Ox) comme axe horizontal, la lettre x désignant la 1ère coordonnée du point, appelée **abscisse** du point ; l'autre axe, vertical, est alors (Oy) et l'on y mesure la 2ème coordonnée y appelée **ordonnée** du point.
Par exemple, dans notre dernier exemple, le repère (O, I, J) est orthonormé et on peut y lire les coordonnées approximatives du point M (1,4 ; 1,3). Les points O, I et J ont des coordonnées bien précises, du fait de leur définition : $O(0 ; 0)$, $I(1 ; 0)$ et $J(0 ; 1)$.

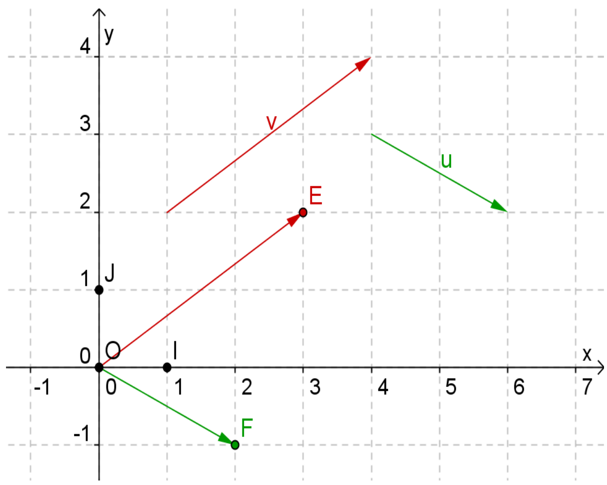


D'une façon générale, un repère (A, B, C) est **orthonormé** si le triangle ABC est rectangle et isocèle en A. A est ainsi l'origine du repère, comme $(AB)\perp(AC)$ le repère est orthogonal et comme de plus, $AB=AC$, les deux unités de longueur sont identiques sur les deux axes (AB) et (AC), le repère est donc finalement orthonormé. Sur notre illustration, (A, B, C) est un repère orthonormé, même si les axes de coordonnées ne sont ni horizontaux ni verticaux.



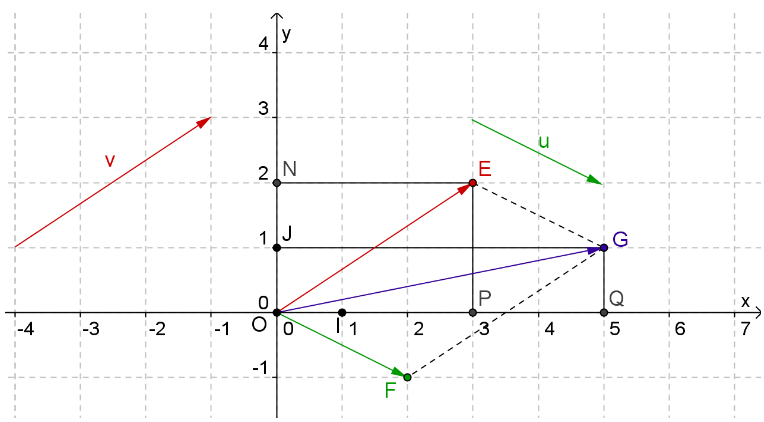
b) Coordonnées de vecteurs

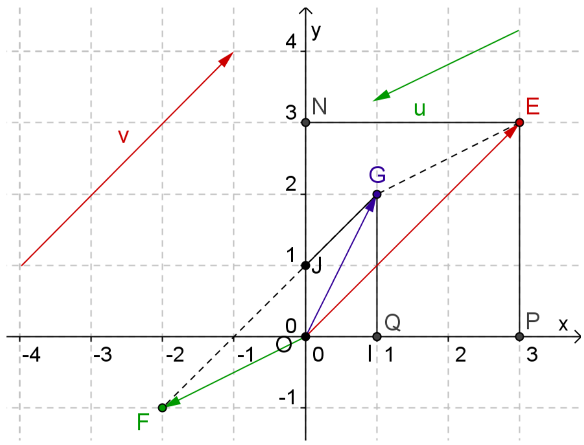
Pour donner des coordonnées à un vecteur $\vec{v}$ on va construire le représentant du vecteur $\vec{v}$ qui a pour origine le point O (l'origine du repère). Notons E le point tel que $\vec{v}=\overrightarrow{OE}$. Par définition, les coordonnées de $\vec{v}$ seront celles de E. Autrement dit, les coordonnées du point E et celles du vecteur $\overrightarrow{OE}$ sont égales. Ainsi par exemple, sur notre illustration, les coordonnées de $\vec{v}$ seront celles de E (3 ; 2), ce que l'on notera $\vec{v}$ (3 ; 2).
De même, les coordonnées de $\vec{u}=\overrightarrow{OF}$ seront celles de F (2 ; −1), ce que l'on notera $\vec{u}$ (2 ; −1).



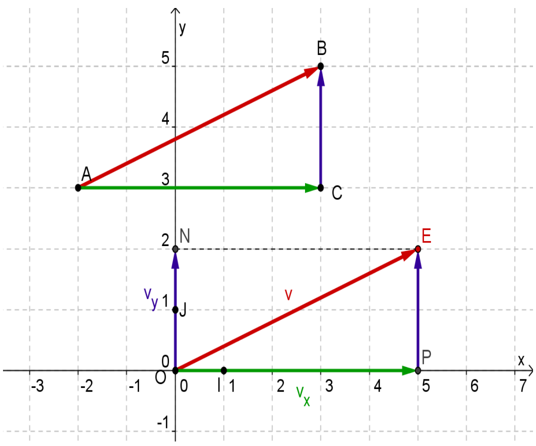
L'intérêt de cette notation est qu'on montre avec les coordonnées d'un vecteur de quelle façon on va du point de départ au point d'arrivée : pour le vecteur $\vec{v}$ on fait 3 vers la droite, puis 2 vers le haut, tandis que pour le vecteur $\vec{u}$ on fait 2 vers la droite, puis 1 vers le bas.

Coordonnées de la somme de deux vecteurs : Traçons les représentants de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à partir de l'origine du repère. Le vecteur $\overrightarrow{OG}=\vec{u}+\vec{v}$ aura les coordonnées du point G. Or, on voit sur la figure de gauche que l'abscisse de G sera égale à $OQ=OP+PQ$, OP étant égale à l'abscisse de E, c'est-à-dire $x_{\vec{u}}$ et PQ étant égale à l'abscisse de F, c'est-à-dire $x_{\vec{v}}$. Autrement dit, $x_{\vec{u}+\vec{v}}=x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}}$.



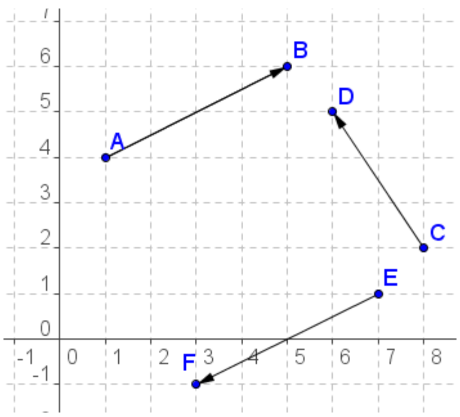


On peut faire de même avec l'ordonnée de G qui vaut finalement $y_{\vec{u}+\vec{v}}=y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}$. Autrement dit, les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont égales à $(x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} ; y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}})$ ce qui traduit le fait que $\boxed{x_{\vec{u}+\vec{v}}=x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \text{ et } y_{\vec{u}+\vec{v}}=y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}}}$. On retiendra ce résultat, bien qu'il ne soit pas démontré ici de façon très rigoureuse. En effet, il faudrait envisager la situation où les deux vecteurs se projettent en sens contraire sur un des axes comme ce qui est représenté à droite, et où les coordonnées des vecteurs peuvent être négatives, contrairement aux distances qui sont toujours positives.



Un autre intérêt de notre définition est qu'on va pouvoir calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de celles des points qui forme un de ses représentants. Sur l'illustration suivante, nous avons décomposé le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en une somme de deux vecteurs, le 1er orienté comme l'axe des abscisses, et le 2d comme l'axe des ordonnées : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ayant la direction de l'axe des abscisses aura une ordonnée nulle et une abscisse x_E égale à la différence des abscisses de B et de A ($x_E=x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A$). Le vecteur $\overrightarrow{CB}$, quant à lui, ayant la direction de l'axe des ordonnées aura une abscisse nulle et une ordonnée y_E égale à la différence des abscisses de B et de A ($y_E=y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A$). En effet, la relation de Chasles appliquée au vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ et ce que nous venons de dire de la somme ou de la différence de 2 vecteurs s'appliquant, l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$ sera celle de $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, c'est-à-dire $x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A$ et son ordonnée sera celle de $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, c'est-à-dire $y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A$. Pour conclure,

$$\boxed{\text{les coordonnées du vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ sont } (x_B-x_A \; ; y_B-y_A).}$$



Exemple : Nous avons $A(1 ; 4)$, $B(5 ; 6)$, $C(8 ; 2)$, $D(6 ; 5)$, $E(7 ; 1)$ et $F(3 ; -1)$. Nous pouvons donc calculer les coordonnées des vecteurs tracés :

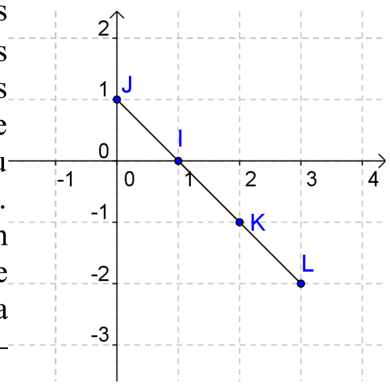
$\overrightarrow{AB}$ (5 - 1 ; 6 – 4) soit $\overrightarrow{AB}$ (4 ; 2)

$\overrightarrow{CD}$ (6 - 8 ; 5 – 2) soit $\overrightarrow{CD}$ (−2 ; 3)

$\overrightarrow{EF}$ (3 - 7 ; −1 –1) soit $\overrightarrow{EF}$ (−4 ; -2)

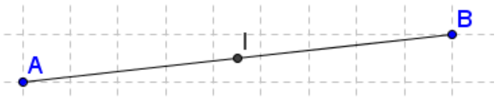
Nous voyons sur cet exemple que deux vecteurs opposés ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$) ont des coordonnées opposées. De même, deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Et pour prouver que deux vecteurs sont égaux, il suffit de prouver que leurs coordonnées sont égales.

Cette dernière propriété permet de répondre à des questions de *géométrie analytique* (utilisant les coordonnées), comme celle-ci : *I, J, K* et *L* sont des points définis par leurs coordonnées $I(1 ; 0)$, $J(0 ; 1)$, $K(2 ; -1)$ et $L(3 ; -2)$. Montrons que le quadrilatère *IJKL* est un parallélogramme. Nous devons montrer que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ et pour cela nous allons calculer les coordonnées de ces 2 vecteurs : $\overrightarrow{IJ}$ (0 – 1 ; 1 – 0) soit $\overrightarrow{IJ}$ (–1 ; 1) ; $\overrightarrow{LK}$ (2 – 3 ; –1 – (–2)) soit $\overrightarrow{LK}$ (–1 ; 1). Ces vecteurs ayant des coordonnées égales sont égaux, et donc *IJKL* est un parallélogramme. Vous remarquerez que nous n'avons même pas eu besoin de faire de figure, les considérations de géométrie analytique se limitant à l'application de formules, on peut généralement s'en passer. D'ailleurs la figure étant un peu particulière (points alignés) il n'est pas évident d'y voir un parallélogramme.



On peut étendre la méthode *en aveugle*, avec des paramètres a et b non définis : soient les points $I(1 ; 0)$, $J(0 ; 1)$, $K(2 ; a)$ et $L(b ; –2)$. À quelle condition sur a et b, le quadrilatère *IJKL* est-il un parallélogramme ? On a $\overrightarrow{IJ}$ (–1 ; 1) et $\overrightarrow{LK}$ (2 – b ; a + 2) et donc, pour avoir $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ il faut que –1=2–b et 1=a+2, soit a=2–1=1 et b=2+1=3. On retrouve les valeurs initiales.

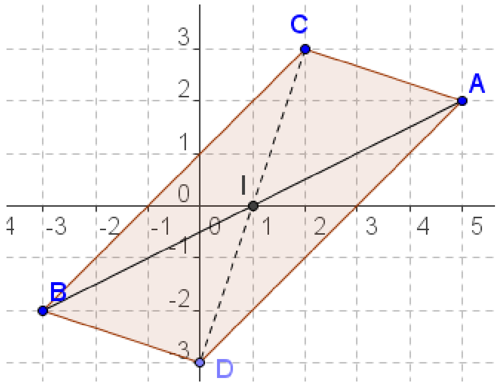
c) Application : Coordonnées du milieu d'un segment



Le segment $[AB]$ a pour milieu le point de coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Cette propriété peut se montrer en calculant les coordonnées des vecteurs de l'égalité $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$. On a $x_{\overrightarrow{AI}}=x_I-x_A$ et $y_{\overrightarrow{AI}}=y_I-y_A$ et aussi $x_{\overrightarrow{IB}}=x_B-x_I$ et $y_{\overrightarrow{IB}}=y_B-y_I$, et donc, pour que les vecteurs soient égaux, on doit avoir $x_I-x_A=x_B-x_I$ et $y_I-y_A=y_B-y_I$, ce qui conduit tout d'abord à $2x_I=x_A+x_B$ et $2y_I=y_A+y_B$, puis au résultat en divisant par 2.

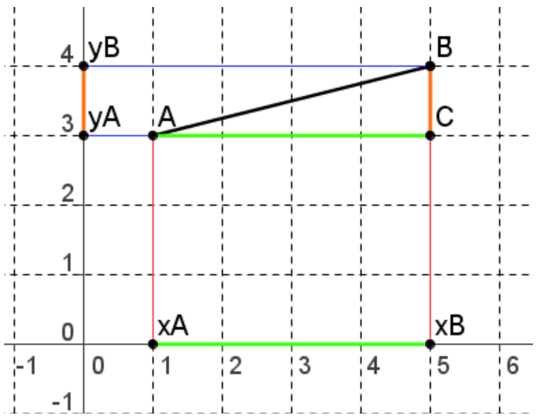
Exemple : Calculons, avec la formule des coordonnées du milieu, les coordonnées du point *D*, 4ème sommet du parallélogramme *ACBD*, sachant que les points *A, B* et *C* sont connus par leurs coordonnées : *A*(5 ; 2), *B*(–3 ; –2) et *C*(2 ; 3). *D* est le symétrique de *C* par rapport au milieu de [AB]. Les coordonnées du milieu *I* de [*AB*] sont ($\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5+(-3)}{2}=1$; $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=0$) soit (1 ; 0). *D* étant le symétrique de *C*(2 ;3) par rapport à *I*, *I* doit être le milieu de [*CD*]. Les coordonnées de *D* vérifient : $\frac{x_C+x_D}{2}=x_I$ et $\frac{y_C+y_D}{2}=y_I$ et donc, en remplaçant les lettres par leurs valeurs : $\frac{2+x_D}{2}=1$ et $\frac{3+y_D}{2}=0$. Cela conduit en multipliant par 2 à $2+x_D=2$ et $3+y_D=0$, et donc $x_D=2-2=0$ et $y_D=0-3=-3$. Le point *D*, 4ème sommet du parallélogramme *ACBD*, a pour coordonnées (0 ;–3).



Si vous voulez vérifier les calculs ou visualiser le quadrilatère *ACBD*, il est possible de faire une figure mais ce n'est absolument pas obligatoire. Ce que nous venons de faire dans un cas particulier, nous pourrions le faire dans le cas général : soient les points $A(x_A\,;y_A)$, $B(x_B\,;y_B)$ et $C(x_C\,;y_C)$, calculons les coordonnées de $D(x_D\,;y_D)$ tel que *ACBD* soit un parallélogramme. Les coordonnées du milieu *I* de [*AB*] sont ($x_I=\frac{x_A+x_B}{2}\,;y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$). Celles de *D* vérifient les égalités suivantes : $\frac{x_C+x_D}{2}=x_I$ et $\frac{y_C+y_D}{2}=y_I$ et par conséquent, $x_C+x_D=2x_I=2\times\frac{x_A+x_B}{2}=x_A+x_B$, et de même $y_C+y_D=y_A+y_B$. D'où ce résultat très simple : $x_D=x_A+x_B-x_C$ et $y_D=y_A+y_B-y_C$ que l'on peut appliquer à nos données initiales *A*(5 ;2), *B*(–3 ;–2) et *C*(2 ;3), et on retrouve $x_D=5-3-2=0$ et $y_D=2+(-2)-3=-3$.

d) Calcul de distances avec les coordonnées

Pour calculer des distances avec les coordonnées, nous *devons* utiliser un repère orthonormé (voir la définition dans la partie 3a : les axes sont donc perpendiculaires et les graduations sur ces axes doivent être faites avec la même unité. Sans repère orthonormé, pas de possibilités d'obtenir une distance.



Pour calculer la distance *AB* nous traçons les parallèles aux axes qui passent par *A* et *B*. Nous obtenons ainsi un point *C* tel que *ABC* soit un triangle rectangle en *C*. D'après le théorème de Pythagore, on doit avoir $AB^2=AC^2+CB^2$ et comme une distance est toujours positive, $AB=\sqrt{AB^2}=\sqrt{AC^2+CB^2}$. Il suffit alors de calculer *AC* et *CB* sur chacun des axes et d'utiliser le fait que *B* et *C* ont les même abscisses, de même que *A* et *C* ont les même ordonnées : $AC=x_C-x_A=x_B-x_A$ ou $AC=x_A-x_C=x_A-x_B$, celui des deux qui est positif, mais de toute façon cela n'a pas d'importance ici car nous prenons le carré de *AC* et $(x_B-x_A)^2=(x_A-x_B)^2$. De la même façon, nous obtenons que $CB^2=(x_C-x_B)^2=(x_B-x_C)^2=(x_B-x_A)^2$. Et pour finir, nous retiendrons juste la formule suivante :

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}.$$

Exemple : Si on a, comme sur notre figure, *A*(1 ; 3) et *B*(5 ; 4), alors

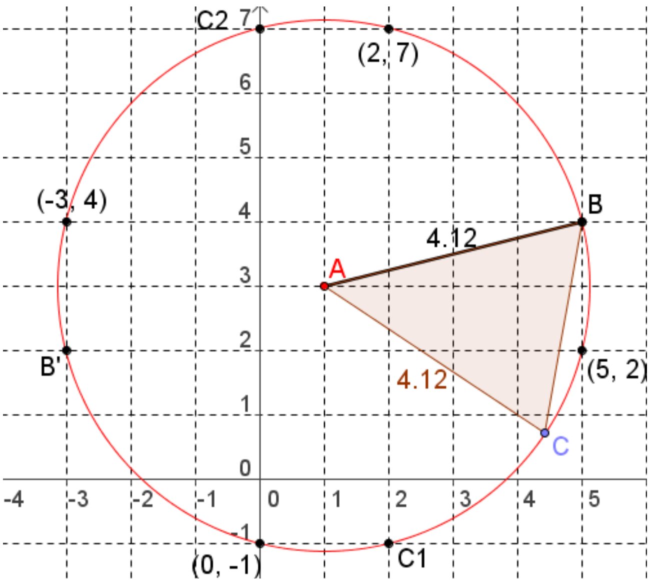
$$AB=\sqrt{(5-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}\approx 4{,}123\ .$$

Avec cette formule nous commençons vraiment à pouvoir « traduire » un grand nombre de figures géométriques sous forme d'égalités entre coordonnées. Par exemple : où doit on placer le point C pour que ABC soit un triangle isocèle en A ? On doit avoir $AB = AC$, et donc $AB^2 = AC^2$. Cela conduit à l'égalité :

$$(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2\ ,$$

et en remplaçant avec les coordonnées de A et B, cela donne :

$$(x_C-1)^2+(y_C-3)^2=4^2+1^2=16+1=17\ .$$

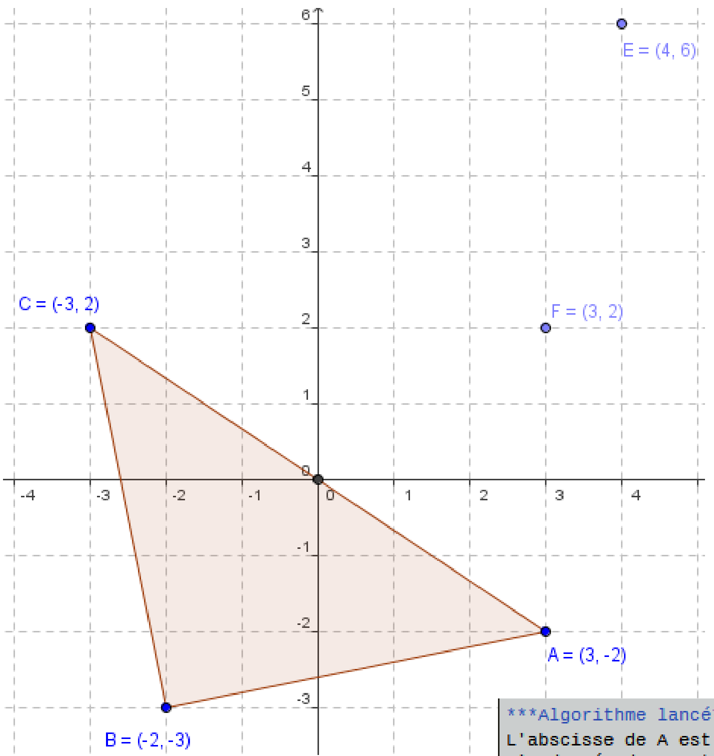


Cette égalité est vérifiée par une grande quantité de points : le point B, le symétrique B'(-3 ; 2) de B par rapport à A, les points C_1 et C_2 de coordonnées (2 ; -1) et (0 ; 7) et 4 autres points à coordonnées entières. En fait, tous les points du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{17}$ vérifient cette égalité qu'on appelle *équation du cercle* $\mathcal{C}$.

Bien sûr en 2de, on ne demande pas des choses très compliquées, l'étude générale des équations de cercles n'est pas au programme. On peut cependant traiter quelques situations géométriques simple, comme s'interroger sur la nature d'un triangle ABC sachant les coordonnées de ses sommets : Est-il isocèle ? Est-il rectangle ?

Examinons un exemple : On se donne $A(3 ; -2)$, $B(-2 ; -3)$ et $C(-3 ; 2)$. Quelle est la nature de ABC ? Il faut, dans ce cas, calculer les 3 côtés du triangle (on se contentera des carrés des côtés pour éviter les racines carrées) :

$$AB^2 = (-2-3)^2 + (-3-(-2))^2 = (-5)^2 + (-1)^2 = 5^2 + 1^2 = 25 + 1 = 26.$$
$$AC^2 = (-3-3)^2 + (2-(-2))^2 = (-6)^2 + (4)^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52.$$
$$BC^2 = (-3-(-2))^2 + (2-(-3))^2 = (-1)^2 + (5)^2 = 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26.$$



ABC est donc incontestablement un triangle isocèle car $AB^2 = BC^2 = 26$ (et donc $AB = AC = \sqrt{26}$. Mais ABC est aussi un triangle rectangle en B, car on a $AB^2 + BC^2 = 26+26=52+AC^2$ et, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ceci entraîne cela. Donc le triangle ABC est un triangle isocèle-rectangle, ou encore, un demi-carré.

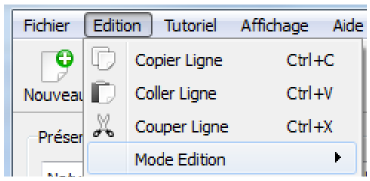
Vous pouvez très certainement effectuer le même genre de calcul pour vérifier qu'en prenant pour coordonnées des points E et F (4 ; 6) et (3 ; 2) comme sur la figure, les triangles AEC et AFC sont respectivement isocèle en E et rectangle en F. Nous rappelons à ce propos qu'une affirmation basée sur l'observation d'une figure ne constitue pas une preuve. Seuls les calculs et l'utilisation des propriétés et/ou théorème du cours sont des preuves.

Ces tests se prêtent bien à une <u>généralisation algorithmique</u> : nous pouvons concevoir un

```
***Algorithme lancé***
L'abscisse de A est 3
L'ordonnée de A est -2
L'abscisse de B est -2
L'ordonnée de B est -3
L'abscisse de C est -3
L'ordonnée de C est 2
ABC est un triangle rectangle et isocèle en B. (B, A, C) est un repère orthonormé.
***Algorithme terminé***
```

programme qui prenne en entrée les coordonnées des 3 points *A, B* et *C*, et qui fournisse en sortie la nature du triangle. L'algorithme ci-dessous pourra être amélioré afin de préciser le sommet principal et le cas échéant, si le triangle est équilatéral ou isocèle rectangle. On pourra notamment faire afficher à cette occasion : « votre triangle peut servir à définir un repère orthonormé (*X,Y,Z*) » où les points *X, Y* et *Z* seraient une permutation de (*A,B,C*) qui convienne. Sur Algobox, le mode d'édition « éditeur texte » est indiqué si l'on veut copier/coller des morceaux d'instruction pour les modifier.

1. $a, b, c, x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$ sont 9 nombres.
2. Lire $x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C$, les coordonnées des 3 points *A, B* et *C*.
3. Calculer $a=BC^2$, $b=AC^2$ et $c=AB^2$.
4. Si ($a=b$ ou $b=c$ ou $c=a$) écrire « *ABC* est isocèle »
5. Si ($a+b=c$ ou $b+c=a$ ou $c+a=b$) écrire « *ABC* est rectangle »




```
SI (            ) ALORS
  DEBUT_SI
  SI (        ) ALORS
    DEBUT SI

    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON

      FIN_SINON
  FIN_SI
SINON
  DEBUT_SINON

  FIN SINON
```

<u>Remarque</u> : Évidemment, lorsqu'on veut un algorithme qui teste tous les cas de figure, il faut s'attendre à quelque chose d'assez complexe que l'on doit ordonner logiquement pour qu'il soit le plus simple (et donc compréhensible, lisible, débugable) possible. La syntaxe d'Algobox, relativement à ce sujet, complique le programme : en imposant la structure « si (..) alors {début si{...}fin-si, sinon, début sinon{...}fin-sinon} » au lieu de « if(..){...}else{...} » que l'on trouve dans la plupart des langages informatiques évolués, elle induit des complexités supplémentaires. Cette remarque vaut surtout lorsqu'on doit imbriquer des boucles conditionnelles les unes dans les autres comme ici.

```
SI (       ) ALORS
  DEBUT SI

  FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON

    FIN_SINON
```

e) <u>Vecteurs colinéaires</u>

Prouver la colinéarité de vecteurs permet de prouver le parallélisme de droites. Par exemple, pour montrer que (*AB*) et (*CD*) sont 2 droites parallèles, il suffira de montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires. De même, pour montrer que le point *M* appartient à la droite (*AB*), il suffira de montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires. Voyons cela sur un exemple.

On se donne *A*(3 ; −2) et *B*(−3 ; 2). Quelle est l'équation de la droite (*AB*) ? On se donne un point quelconque *M* de coordonnées (*x* ; *y*) et on écrit la condition de colinéarité pour que $M\in(AB)$, il faut que $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ soient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel *k* tel que $\vec{AM}=k\,\vec{AM}$. Or, sait que $\vec{AM}(x-3\,;y-(-2)=y+2)$ et donc $k\,\vec{AM}(k(x-3)\,;k(y+2))$ et aussi $\vec{AB}(-3-3=-6\,;2-(-2)=2+2=4)$. On doit donc avoir $k(x-3)=-6$ et $k(y+2)=4$, ce qui conduit à $k=\frac{-6}{x-3}=\frac{4}{y+2}$ soit, en éliminant *k* (qui ne sert à rien) et en écrivant l'égalité des produits en croix $-6\times(y+2)=4\times(x-3)$ soit, en développant et en regroupant tout du même côté $6y+4x=0$ ou $3y+2x=0$ ou encore, sous la forme réduite $y=-\frac{2}{3}x$.

Coordonnées de vecteurs colinéaires :

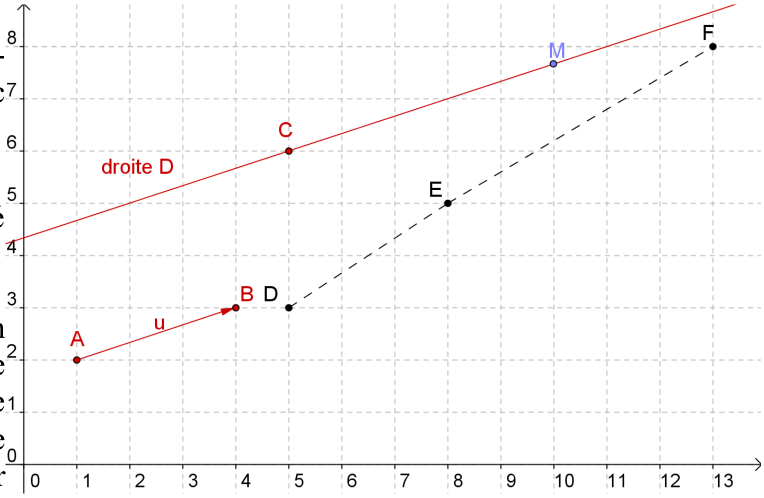
Sachant que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $(x\,;y)$, les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $(kx\,;ky)$.

À quelle condition portant sur leurs coordonnées, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Il doit exister un réel *k* tel que $\vec{u}=k\vec{v}$. Ce réel vérifie donc à la fois $x_{\vec{u}}=k\,x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}}=k\,y_{\vec{v}}$, par conséquent, il doit être égal à $k=\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}}=\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}$, ce qui nous donne la condition cherchée (produits en croix sur les deux rapports) : $x_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}=y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}$ que l'on écrit souvent $x_{\vec{u}}\times y_{\vec{v}}-y_{\vec{u}}\times x_{\vec{v}}=0$.

Pour simplifier cette formule, $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si $xy'-yx'=0$. Cette quantité $xy'-yx'$ porte le nom de *déterminant* du couple de vecteur $(\vec{u},\vec{v})$. Et l'on note simplement $det(\vec{u},\vec{v})=0$ la condition de colinéarité de 2 vecteurs.

<u>Applications</u> : Si on veut déterminer l'équation de la droite *D*, la parallèle à (*AB*) passant par *C*, il suffit d'écrire la condition de colinéarité des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CM}$: $x_{\vec{AB}}\times y_{\vec{CM}}-y_{\vec{AB}}\times x_{\vec{CM}}=0$. Pour prendre un exemple, avec $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$, $C(5\,;6)$ et $M(x\,;y)$ on a $\vec{AB}(3\,;1)$ et $\vec{CM}(x-5\,;y-6)$ et donc,

pour que M appartienne à la parallèle à D, il faut que $det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CM})=0$ soit, $3\times(y-6)-(x-5)=0$ ce qui conduit à $-x+3y-13=0$ (équation cartésienne de la droite D).



Les points $D(5;3)$, $E(8;5)$, $F(13;8)$ sont-ils alignés ? Calculons $det(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF})$ avec $\overrightarrow{DE}(3;2)$ et $\overrightarrow{DF}(8;5)$ on a : $det(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF})=3\times5-2\times8=15-16=-1\neq0$. Les points D, E et F ne sont pas alignés, malgré les apparences (voir la figure ci-contre).

Montrons que si une droite D a pour équation $ax+by+c=0$ (équation cartésienne) alors le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ donne la direction de cette droite (on dit que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de *D*) : le point $A(0;-\frac{c}{b})$ est un point de D car $b\times(\frac{-c}{b})+c=-c+c=0$; de même $B(\frac{-c}{a};0)\in D$. On en déduit que $\overrightarrow{AB}(\frac{-c}{a};\frac{c}{b})$ dirige *D*. Or, $\frac{ab}{c}\overrightarrow{AB}=\vec{u}(-b;a)$ donc $\vec{u}$ dirige *D*.

Quelle est l'équation d'une droite passant par les points *A* et *B*. La méthode a été expliquée sur un exemple, mais ici nous voulons généraliser les calculs en gardant des noms de variables tels que $(x_A;y_A),(x_B;y_B)$ pour les coordonnées de *A* et *B* et $(x;y)$ pour les coordonnées d'un point *M* quelconque de (*AB*). On a vu que pour traduire $M\in(AB)$, on pouvait dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaire. Cela conduit à la condition sur les coordonnées de vecteurs : $x_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AM}}-y_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AM}}=0$ et donc, en remplaçant par les coordonnées des points *A*, *B* et *M* cela conduit à $(x_B-x_A)\times(y-y_A)-(y_B-y_A)\times(x-x_A)=0$. Le développement de cette expression littérale permet d'écrire l'équation de la droite (*AB*) sous la forme cartésienne $ax+by+c=0$. On doit avoir en effet $a=y_A-y_B$, $b=x_B-x_A$ et $c=(x_A-x_B)\times y_A-(y_A-y_B)\times x_A$. Ces formules ne sont pas à connaître par cœur, évidemment, mais permettent de concevoir un algorithme qui prenne en entrée les coordonnées des 3 points *A, B* et *C*, et qui fournisse en sortie l'équation cartésienne de la droite.

1. a,b,c,x_A,y_A,x_B,y_B sont 7 nombres.
2. Lire x_A,y_A,x_B,y_B, les coordonnées des 2 points *A* et *B*.
3. Calculer $a=y_A-y_B$, $b=x_B-x_A$ et $c=(x_A-x_B)\times y_A-(y_A-y_B)\times x_A$.
4. Écrire « L'équation de la droite (*AB*) est $ax+by+c=0$ »

```
***Algorithme lancé***
L'abscisse de A est 1
L'ordonnée de A est 2
L'abscisse de B est 4
L'ordonnée de B est 3
L'équation cartésienne de (AB) est -1 x +3 y +-5 = 0
***Algorithme terminé***
```

__Remarque__ : La chaîne de caractère pour écrire $ax+by+c=0$ est la concaténation de plusieurs morceaux de chaînes qui sont fixes (comme « *x*+ » ou « *y*+ ») et d'autres qui sont des contenus de variables (comme *a* ou *b*). On réalise la concaténation en écrivant des additions, ainsi $ax+by+c=0$ s'écrit $''+a+'x+'+b+'y+'+c+'=0'$ ou les $'$ sont des guillemets encadrants les morceaux de chaînes, les variables étant concaténées avec les +. Le problème pour une généralisation de cette méthode, est que a,b,c sont des nombres relatifs : ils peuvent être positifs et Algobox les écrit sans signe, ils peuvent être négatifs et Algobox les écrit avec le signe moins (−). On se retrouve avec un affichage incorrect comme celui ci-contre ou on voit écrit « +-5 » ce que l'on cherche à éviter. Une partie de l'algorithme doit donc être consacré à l'édition d'une équation *correcte*. On n'écrit généralement pas non plus « -1 x », préférant « -x ». On voit ainsi se mélanger dans nos algorithmes des *questions de fond*, qui se règlent avec des formules de calcul et des *questions de forme* qui se règlent en élucidant toutes les règles de syntaxe.

```
***Algorithme lancé***
L'abscisse de A est 5
L'ordonnée de A est 3
L'abscisse de B est 8
L'ordonnée de B est 5
L'abscisse de C est 13
L'ordonnée de C est 8
L'équation cartésienne de (AB) est -2 x +3 y +1 = 0
C n'appartient pas à la droite (AB)
***Algorithme terminé***
```

Maintenant que nous avons un programme qui nous donne l'équation d'une droite, est-il difficile de l'adapter pour qu'il teste la présence d'un point sur une droite ? Certes, non! Si on se donne les coordonnées

des trois points *A, B* et *M*, il suffira de prendre l'équation cartésienne comme condition :
« si ($ax+by+c==0$) {afficher $M\in(AB)$ } sinon {afficher $M\notin(AB)$ } »

Par exemple, pour la question « Les points $D(5;3)$, $E(8;5)$, $F(13;8)$ sont-ils alignés ? » On entrera les coordonnées de *D, E* et *F*, et le programme nous dira si $F\in(DE)$ ou pas. On pourrait tout aussi bien donner la valeur de l'abscisse et le programme calculerait l'ordonnée, ou réciproquement. On pourrait demander l'affichage d'un graphique où serait visible les points concernés et la droite. On pourrait également imaginer tester si deux droites sont parallèles... On le voit, les possibilités d'utilisation de cet algorithme sont multiples.