Chapitre	1	•	Généralités s	sur	les	Fonctions
Oriapiuc				Jui		1 0110110113

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions Image, antécédent, courbe représentative.	Traduire le lien entre deux quantités par une formule. Pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule: identifier la variable et, éventuellement, l'ensemble de définition; déterminer l'image d'un nombre; rechercher des antécédents d'un nombre.	Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. Quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou sur N, voire de fonctions de deux variables (aire en fonction des dimensions) sont à donner.
Étude qualitative de fonctions Fonction croissante, fonction décroissante; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations.	Les élèves doivent distinguer les courbes pour lesquelles l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique.
HIVELVEIRE.	Lorsque le sens de variation est donné, par une phrase ou un tableau de variations: • comparer les images de deux nombres d'un intervalle; • déterminer tous les nombres dont l'image est supérieure (ou inférieure) à une image donnée.	Les définitions formelles d'une fonction croissante, d'une fonction décroissante, sont progressivement dégagées. Leur maîtrise est un objectif de fin d'année. Même si les logiciels traceurs de courbes permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique d'une fonction définie par une formule algébrique, il est intéressant, notamment pour les fonctions définies par morceaux, de faire écrire aux élèves un algorithme de tracé de courbe.

I] Définition d'une fonction

a) Fonction numérique d'une variable

Définition : Une fonction numérique d'une variable est un processus qui fabrique un nombre (souvent noté y) à partir de nombres variables pris dans un ensemble (souvent noté x).

Notations: Si on note f la fonction que l'on veut définir, l'ensemble de nombres dans lequel est pris la variable x est souvent noté D_f : c'est l'ensemble de définition de f. La fonction f va donc prendre un nombre x de D_f et lui associer un autre nombre y. Comme y a été fabriqué à partir de x on le note f(x), ce qui se lit « f de x », et on dit que y est l'**image** de x par la fonction f. Le nombre de départ quant à lui, est appelé **antécédent** de y par f. Pour résumer la définition d'une fonction numérique f de la variable x, on note ceci:

$$f: D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Tout ceci paraît bien compliqué... En réalité il n'en est rien, cette notation est d'une limpidité totale. Évidemment, il faut avoir à s'en servir et c'est l'objet de ce chapitre et d'un autre à venir. Donnons quelques exemples et quelques éclaircissements.

Exemple 1: On peut définir une fonction à partir d'une suite « d'instructions machines », des opérations que l'on peut réaliser avec une calculatrice. Par exemple « Choisir un nombre. Calculer le carré de ce nombre. Multiplier le résultat par 10, puis ajouter 25. Afficher le résultat. » Cet algorithme de calcul est une fonction, si on la note f et si on note x le nombre de départ, alors l'image de x définie par le texte est $f(x) = 10x^2 + 25$. On peut calculer l'image de n'importe quel nombre réel et en l'absence de précision à ce sujet on considèrera que f est définie sur \mathbb{R} , ce que l'on note $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 10x^2 + 25$$

L'image de 2 par f est $f(2)=10\times 2^2+25=65$.

L'image de $-\frac{1}{2}$ est $f(-\frac{1}{2})=10\times(-\frac{1}{2})^2+25=27,5$.

Un antécédent de 65 par f est 2 mais rien n'assure que ce soit le seul : l'équation $10x^2+25=65$ n'a pas qu'une solution, elle en a deux (voir ce chapitre) qui sont 2 et -2. Autrement dit, 2 et -2 ont la même image qui est 65, et 65 a deux antécédents possibles qui sont 2 et -2.

D'une façon générale, une fonction attribue une seule image à tous les éléments x de son ensemble de définition. Par contre, un même nombre y de l'ensemble d'arrivée peut très bien

- · avoir un seul antécédent
- · avoir plusieurs antécédents
- n'avoir aucun antécédent

Exemple 2: La fonction $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par $n \mapsto (-1)^n$ est une fonction qui n'a que 2 images possibles pour tous les entiers relatifs. Ces images sont 1 et -1. Les antécédents de 1 par cette fonction sont en nombre infini, ce sont tous les entiers pairs. De même, les antécédents de -1 par cette fonction sont tous les entiers impairs. À part ces 2 valeurs, aucun des nombres réels n'a d'antécédent par f. On aurait pu définir cette fonction en notant l'ensemble restreint dans lequel elle prend ses valeurs $f: \mathbb{Z} \to \{-1; 1\}$.

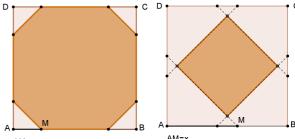
Exemple 3: La calculatrice comporte une touche qui est notée « \log » ce qui veut dire logarithme. Que fait cette touche? Comme beaucoup de touches de la calculatrice, elle calcule l'image d'un nombre par une fonction. Expérimentons cette fonction inconnue (elle sera définie et étudiée en terminale): $\log(1)=0$, $\log(10)=1$, $\log(100)=2$, ... $\log(0)=$ « Math ERROR » !! et de même: $\log(-1)=$ « Math ERROR », ... $\log(0,1)=-1$, $\log(0,01)=-2$, ..., $\log(5)=0,6989700043$, ... Les messages d'erreur (Math ERROR) doivent nous faire comprendre que nous sommes sorti de l'ensemble de définition de cette fonction. En cherchant attentivement vous arriverez à la conclusion que \log est définie pour tout réel strictement positif, ce qu'on note $\log:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Vous comprendrez aussi peut-être que pour tout entier relatif n, on a $\log(10^n)=n$.

L'ensemble de définition D_f d'une fonction f peut être un intervalle de nombres réels comme par exemple $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ ou $\left]0;+\infty\right[$ ou un ensemble de nombres particuliers comme \mathbb{N} (l'ensemble des entiers naturels). Les notations ensemblistes utilisées ici ne sont pas obligatoires et nous renvoyons à ce sujet notre lecteur/élève au chapitre spécial qui leur est consacré. On peut remplacer par exemple la notation $x\in\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ par l'encadrement $\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$, et celle-ci $x\in\left]0;+\infty\right[$ par l'inégalité x>0 tout simplement. La notation $x\in\mathbb{N}$ sera, quant-à-elle, remplacée par une phrase « x est un entier naturel (positif) ».

Parfois l'ensemble de définition est imposé par le contexte mais parfois il faudra le déterminer soi-même. Lorsqu'on cherche une longueur, il faut que celle-ci soit positive ; de même, lorsqu'on prend la racine carrée d'un nombre, il faut que celui-ci soit positif ; lorsqu'on divise par un nombre, il faut que celui-ci soit différent de 0 ; etc. Pour ces raisons, il conviendra toujours de préciser sur quel ensemble on étudie une fonction.

Exemple 4 : On enlève les coins d'un carré ABCD de côté 5 cm en les coupant en biseaux selon la figure ci-contre. La longueur AM que l'on enlève est notre variable x et l'on s'intéresse à l'aire A(x) de l'octogone restant. Quel est l'ensemble de définition de la fonction A? x étant une

longueur doit être positif, mais par nature AM doit être prinférieur à AB=5 cm donc 0 < x < 5. De plus, que se passe-t-il lorsque AM dépasse $\frac{AB}{2}$ =2,5 cm? Si on considère qu'on enlève des coins, il est possible de considérer la situation de la $2^{\text{ème}}$ figure et donc D_A =]0;5[mais le polygone restant est un carré. Si on veut se limiter à un octogone, il faut préciser que $x \in]0;2,5[$. Remarquez les crochets ouverts qui



indiquent qu'on supprime les valeurs extrêmes (M n'est pas en A ou en B, ni au milieu pour le $2^{\text{ème}}$ cas). Vérifiez que dans le 1^{er} cas ($x \in]0;2,5[$) on a $A: x \mapsto 25-2x^2$ et, dans le 2^{d} cas ($x \in]2,5;5[$) on a $A: x \mapsto 50-20x+2x^2$. Ainsi notre fonction A, qui donne l'aire de la partie restante en fonction de x est une fonction définie en 2 morceaux.

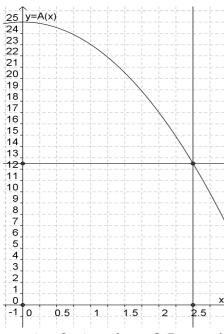
b) Tableau de données et représentation graphique

Ce sont les deux moyens généralement employés pour représenter une fonction : le **tableau** donne quelques valeurs numériques. La valeur du nombre variable x est choisie parmi la multitude des valeurs possibles contenues dans l'ensemble de définition, ceci afin de se faire une idée des valeurs que peut prendre l'autre nombre y.

Le **graphique** représente, à l'aide d'une courbe, l'ensemble des couples (x; y=f(x)) auxquels nous conduit la fonction f. Autrement dit, un point de coordonnées (x; y) est un point de la courbe C_f d'une fonction f si l'on a y=f(x). Cette courbe est obtenue en joignant à la main les quelques points du tableau de données dans le cas où tous les points intermédiaires font partie de la courbe (on parle de fonction continue). Une autre façon d'obtenir cette courbe est d'utiliser des moyens informatiques (calculatrice graphique, ordinateur). Dans ce cas, la courbe est généralement obtenue *pixel par pixel*, selon la technologie employée pour l'écran et selon le logiciel utilisé cette courbe sera plus ou moins lisse et précise, mais on ne doit pas oublier à ce propos qu'il ne s'agit que d'une représentation graphique dont les détails peuvent tromper (voir plus loin des illustrations de ce propos).

Exemple 4 (suite): Donnons un tableau de données approximatif (arrondi au dixième le plus proche) et le graphique représentant la fonction $A: x \mapsto 25-2x^2$ définie précédemment, pour $x \in]0; 2,5[$.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$A(x) = 25 - 2x^2$	25	24,9	24,8	24,4	24,0	23,4	22,8	21,9	21,0	19,9	18,8

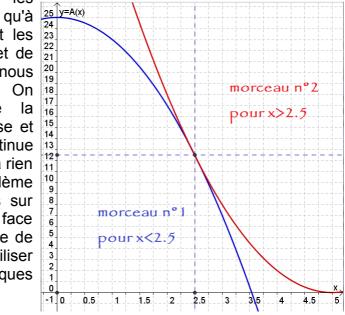


Nous avons choisi des valeurs espacées de 0,25 en 0,25 afin d'avoir un balayage relativement précis de l'intervalle étudié. Selon les moyens employés, on peut faire varier le *pas* de ce balayage. Avec un tableur, on choisira facilement des pas plus petits (comme 0,1 ou 0,01) pour affiner le tracé de la courbe et la connaissance de la fonction.

Ci-contre nous avons une courbe donnée par le logiciel GéoGebra lorsqu'on tape $y=25-x^*x$ dans la barre de saisie et

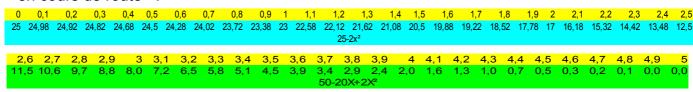
ajustant les pour axes l'écran on voit les 23 valeurs de x et de nous qui intéressent. On constate la que $\stackrel{\times}{\rightarrow}$ courbe est lisse et qu'elle continue

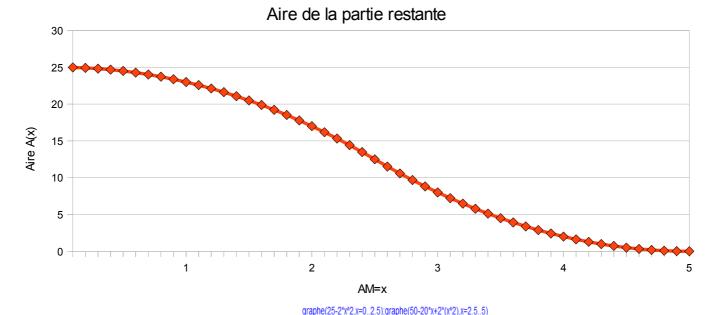
avant x=0 et après x=2,5 ce qui ne correspond à rien pour notre problème. Un autre petit problème technique, inhérent à la graduation des axes sur GéoGebra : les nombres ne sont pas bien en face des graduations... L'intérêt du traceur de courbe de ce logiciel est néanmoins évident : on peut utiliser comme variables x et y des grandeurs géométriques telles que des longueurs, des aires, des angles.



Comme on l'a vu, la fonction A est définie en 2 morceaux. Pour le $2^{\text{ème}}$ morceau, on peut procéder comme pour le 1^{er} , et ensuite il faut conserver les 2 parties de courbes qui conviennent. Essayons sur notre exemple un autre moyen technique : le tableur. Celui-ci s'accommode parfaitement d'un pas assez petit (à condition de « tirer » la formule sur suffisamment de cellules). Nous avons choisi 0,1 pour rester dans le domaine du raisonnable. Cela conduit au tableau ci-dessous et à la courbe ci-contre qui se base sur le tableau.

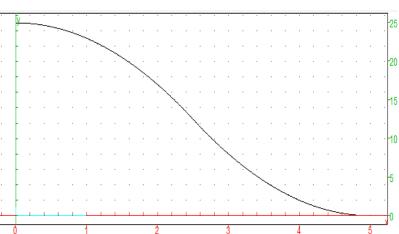
Nous avons laissé les points (carrés) mais le logiciel pourrait aussi bien les supprimer ou les dessiner plus petits. Le tableur est donc une aide appréciable dans l'étude des fonctions numériques. Il est très utilisé pour cela d'autant qu'il ne se limite pas à représenter des fonctions numériques, on l'utilisera aussi en statistiques notamment. Un 2ème avantage, pour représenter une fonction comme celle de notre exemple où il y a 2 morceaux, on peut modifier la formule « en cours de route ».





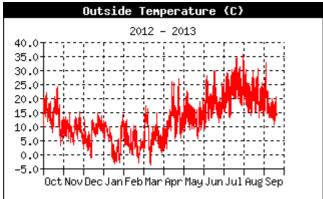
Un logiciel de calcul formel est un outilbeaucoup plus sophistiqué qui peut, entre autre nous donner un aperçu de la courbe d'une fonction. Voici par exemple ce que donne le logiciel Xcas. L'instruction graphe(25- $2*x^2$,x=0..2.5) limite le tracé aux valeurs de la variable x appartenant à l'intervalle [0;2,5].

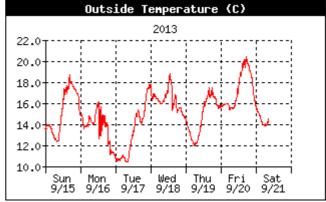
NB: La calculatrice graphique offre aussi cette facilité d'obtenir une courbe, tout en choisissant la fenêtre d'affichage.



<u>Exemple 5</u>: Certaines fonctions peuvent être définie par leur courbe, indépendamment d'une expression algébrique qui rende compte de cette courbe. Parfois cette expression n'existe pas. Imaginons que nous voulions savoir la température qu'il fait à Paris. L'expression algébrique de cette température moyenne n'existe pas mais on peut la connaître en tapant « température Paris » dans Google par exemple. Voici ce que donne le site meteo-paris.com pour la période d'une année qui vient de s'écouler et celle de la semaine écoulée. Pour ce qui est des prévisions

pour le futur, la courbe n'existe pas évidemment, il faut se contenter d'une estimation basée sur le passé. Si on appelle h le moment (h comme heure) et h la température, alors il existe une fonction h qui associe à chaque valeur de h une valeur de h. On peut lire sur la courbe la température h le une moment donné h du passé (il s'agit d'une date exprimée dans une unité spéciale mais habituelle : h ji/mm/aaaa et h, qu'on peut convertir en un seul nombre h d'heures compté depuis une origine conventionnelle, le début de la période étudiée par exemple). On connait la courbe (pour des valeurs passées de h) représentative de h, on dit le h graphe de h, mais on ne connaitra jamais d'expression algébrique de h car celle-ci n'existe pas.



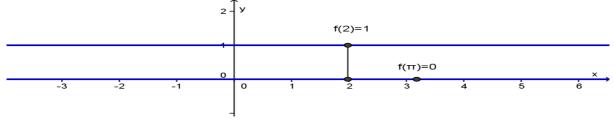


Exemple 6: Toutes les courbes représentent-elles des fonctions? Non, la courbe d'une fonction doit associer à tout nombre de l'ensemble de définition une seule image. Si une courbe propose 2 images ou davantage, ce ne peut être la courbe d'une fonction. Un cercle par exemple, ne peut pas être considéré comme la courbe d'une fonction.

Si le cercle ci-contre représentait une fonction, quelle serait l'image de 2 ? 1 ou 5 ? Ni l'un ni l'autre car l'image doit être unique et ce n'est pas le cas ici : le cercle ne peut pas représenter une fonction.

t-elles table faut pas penser non plus que pes de vraies fonctions sont de

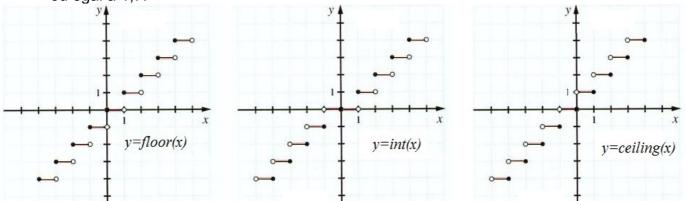
Un exemple de tel monstre serait la courbe de la fonction f suivante : l'image d'un nombre rationnel x est 1 et l'image d'un nombre irrationnel est 0. Cette fonction f est définie pour tout réel, car un nombre réel est soit rationnel, soit irrationnel. Par exemple, on a f(2)=1, $f(\frac{1}{7})=1$, etc. $f(\pi)=0$, $f(\sqrt{2})=0$. Entre deux nombres rationnels quelconques, aussi proches que l'on veut, on peut trouver un nombre irrationnel et réciproquement, entre deux nombres irrationnels quelconques, aussi proches que l'on veut, on peut trouver un nombre rationnel. On dit que cette fonction est partout discontinue. Comme pour l'exemple 2, cette fonction prend ses valeurs dans un ensemble très restreint $\{0\,;1\}$, mais la densité des nombres rationnels et irrationnels est telle que si l'on voulait tracer la courbe pour un très grand nombre de valeurs de x, on obtiendrait quelque chose comme les 2 droites horizontale. En réalité, il ne s'agit pas de droites, mais de « droites poreuses » (avec une infinité de trous...)! Cette fonction porte le nom de fonction caractéristique des rationnels ou fonction de Dirichlet¹.



¹ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) est un mathématicien allemand.

<u>Exemple 8</u>: D'autres exemples plus sympathiques de fonctions avec des ruptures dans la courbe sont fournis par les fonctions *en escalier int*, *floor* et *ceil* définies ci-dessous :

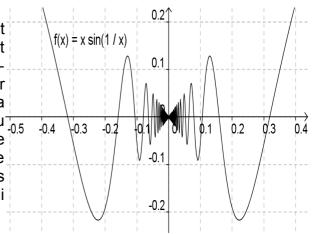
- *int* est la fonction « partie entière » d'un nombre réel x. On tronque l'écriture décimale du nombre en enlevant toute sa partie décimale. Par exemple *int*(2,9)=2, *int*(2,99999)=2, *int*(3)=3 et *int*(-1,7)=-1. Nous avons au centre l'allure de la courbe de *int* qui présente des sauts : on ne peut la tracer sans lever le crayon. Les calculatrices notent parfois cette fonction *ent* ou encore *iPart* (le *i* vient de ce qu'en anglais, entier se dit *integer*) ou tout simplement *E*.
- Pour les nombres positifs int(x) est le plus grand entier inférieur ou égal à x et d'une façon générale on note floor(x) ou [x] ce nombre. Ainsi floor(1,7)=1 mais floor(-1,7)=-2 car -2 est le plus grand entier inférieur ou égal à -1,7. De même, pour les nombres négatifs, int(x) est le plus petit entier supérieur ou égal à x, et d'une façon générale on note ceil(x) ou [x] ce nombre. Ainsi ceil(-1,7)=-1 et ceil(1,7)=2 car 2 est le plus petit entier supérieur ou égal à 1,7.



• Les fonctions g_n sont les fonctions arrondis à n chiffres après la virgule. Par exemple $g_1(\pi)=3,1$ $g_2(\pi)=3,14$ et $g_3(\pi)=3,142$. Si l'on dispose de la fonction partie entière int, on peut être tenté de définir les fonctions g_n par la relation $g_n(x)=int[10^nx+0.5]\div10^n$.

Exemple : $g_3(\pi) = int[1000\pi + 0.5] \div 1000 \approx int[3141,59+0,5] \div 1000 = int[3142,09] \div 1000 = 3,142$. Mais si cette définition de g_n convient bien pour les réels positifs, elle ne fait pas ce qu'il faudrait pour les réels négatifs : $g_1(-2,72) = int[-27,2+0.5] \div 10 = int[-26,7] \div 10 = -2,6$ et non -2,7 comme il faudrait. La bonne définition de g_n , qui convient pour tout réel est $g_n(x) = floor[10^n x + 0.5] \div 10^n$. Pour un nombre négatif cela donne bien ce qu'il faut : $g_1(-2,72) = floor[-26,7] \div 10 = -2,7$. NB : On retiendra pour la mise au point des algorithmes, qu'une idée peut sembler bonne (et elle peut l'être dans certains cas) mais il faut la tester dans tous les types de cas. Testez cette autre possibilité pour définir l'arrondi g_n : $g_n(x) = ceil[10^n x - 0.5] \div 10^n$ (on pourra prendre n=1 et tester les cas x = 1,21 ; x = 1,27 ; x = -1,27 ; x = -1,27).

Exemple 9 : Certaines courbes de fonctions exhibent des angles, d'autres sont symétriques ou sont constituées d'un motif qui se répète identique à lui-(fonctions sinusoïdales rencontrées sur l'oscilloscope en physique dont le modèle est la fonction sinus étudiée dans un autre chapitre du 0.5 cours de mathématiques). Examinons cette courbe qui oscille de plus en plus rapidement lorsqu'on se rapproche de zéro. A toutes les échelles d'observation, elle offre la même allure ce qui lui confère la qualité de « fractale ».



<u>Exemple 10</u>: Voici maintenant une autre fonction qui oscille, c'est-à-dire qui augmente puis diminue, puis augmente, etc. mais cette fois pour une variable entière n qui augmente jusqu'à

l'infini. Pour estimer un nombre irrationnel, on utilise souvent des algorithmes d'approximations rationnelles comme celui-ci, utilisé pour déterminer la valeur de $\sqrt{2}$: on calcule le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$, $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+1}}$, etc.

Ainsi la fonction $u: n \in \mathbb{N} \mapsto u(n)$ où les u(n) sont définis selon les exemples donnés plus haut, donne une valeur approchée alternativement supérieure, puis inférieure à $\sqrt{2}$. Remarquons que les termes cherchés se comprennent mieux lorsqu'ils sont écrits ainsi : 2-1, $(2+\frac{1}{2})-1$, $(2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}})-1$, $(2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+2}})-1$.

Donnons-nous alors un algorithme pour programmer cela :

- 1. u est un rationnel, i est un entier
- 2. u=2
- 3. Lire n, le nombre d'itérations à appliquer
- 4. Pour i=1 à n calculer u=2+1/u
- 5. Afficher u-1

VARIABLES U EST_DU_TYPE NOMBRE I EST_DU_TYPE NOMBRE N EST DU TYPE NOMBRE 5 DEBUT ALGORITHME 6 U PREND_LA_VALEUR 2 LIRE N POUR I ALLANT DE 1 A N 9 DEBUT_POUR 10 U PREND_LA_VALEUR 2+1/U U PREND LA VALEUR U-1 13 AFFICHER U FIN ALGORITHME

RÉSULTATS:

Algorithme lancé

1.4142136

Algorithme terminé

Voyons les premiers résultats avec Algobox. La fonction u conduit à des valeurs supérieures à $\sqrt{2}$ lorsque n est impair et à des valeurs supérieures pour n pair.

Notons, à titre d'information les cinquante premières décimales données par Xcas

 $\sqrt{2} \approx 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur supérieure		<mark>1</mark> ,5		<mark>1,41</mark> 66667		<mark>1,4142</mark> 857		<mark>1,41421</mark> 57		1,414213 6
Valeur inférieure	1		1,4		1,41 <mark>37931</mark>		<mark>1,4142</mark> 012		1,414213 ²	

On pourrait améliorer cet algorithme pour obtenir avec Algobox les valeurs rationnelles exactes qu'il fournit, mais le plus simple est de le programmer tel quel sur un logiciel de calcul formel (il conserve les valeurs rationnelles) comme Xcas ou Mapple.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	50
Valeur rationnelle	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	16616132878186749607
		2	5	12	29	70	169	408	985	2378	11749380235262596085

c) Autres fonctions

Nous n'avons jusqu'ici parlé que de fonctions numériques d'une seul variable. Il faut toutefois savoir qu'il existe des fonctions numériques de plusieurs variables et aussi des fonctions qui prennent leurs objets ailleurs que dans des ensembles de nombres : les transformations géométriques (symétries axiales ou centrales, rotations, translations, etc.) sont des fonctions qui prennent leurs objets dans des ensembles de points.

Pour ce qui est des fonctions numériques à 2 variables, nous pouvons déjà en imaginer quelques-unes. Par exemple, supposons que l'on repère la position d'un point du territoire français continental par 2 nombres x et y, donc par un couple (x; y). On peut imaginer une fonction qui prenne ces 2 nombres en entrée, et qui donne en sortie le nombre z = l'altitude de ce point de la surface terrestre en mètres au-dessus du niveau de la mer. La fonction « altitude » que l'on notera f pour ne pas changer associe au couple (x; y), le nombre z = f(x, y).

Exemple 11 : Prenons un exemple géométrique plus simple. ABCD est un trapèze rectangle en A et D, tel que AB = 6 cm et CD<AB. On note b la longueur CD, h la hauteur du trapèze (en cm) et

A son aire (en cm²). L'aire A dépend de b et h, on dit quelle est fonction de b et h et on note A(b;h)l'aire d'un tel trapèze de côté b et de hauteur h. Exprimons ceci plus explicitement $A(b;h)=h\times(b+6)\div2$ (cette formule a été étudiée au collège). Ainsi, pour les valeurs de la figure, on

$$A(2,1;4,56)=4,56\times(2,1+6)\div2=18,468.$$

À quels intervalles respectifs I et J doivent appartenir b et h? Pour b et h qui sont des longueurs, on doit avoir b>0 et pour bqui est la plus petite base, on doit avoir b < 6. Pour h, il n'y a pas h = 4.56de limite supérieure. Donc h prend ses valeurs dans $l = \mathbb{R}^{+*}$ qui est l'ensemble des nombres réels strictement positifs tandis que b prend ses valeurs dans J=10;6[. La fonction A prend ses valeurs dans un ensemble de couples notés J×I=10:6[× IR^{+*}.

On peut se ramener à une fonction d'une seule variable en fixant une des variables (par exemple en prenant h=1), et en regardant comment évolue l'aire A lorsque l'autre variable décrit sont ensemble de définition. On peut ainsi tracer la courbe de la fonction à une variable $f_l: b \mapsto 1 \times (b+6) \div 2 = b \div 2 + 3$ qui est une fonction affine (étudiée en 3ème). Si on fait cela pour toutes les valeurs de h d'un intervalle, et que l'on accole les courbes 2D obtenues, on obtient une sorte de courbe en 3D qui est en réalité une surface (voir l'illustration où on a pris h dans [0;10]).

Les « courbes » représentant les fonctions à 2 variables sont en fait des surfaces dans un espace à 3 dimensions (2 dimensions pour les variables et une pour la valeur de la fonction). Voici par exemple à quoi ressemble la surface représentant la fonction $f:(x;y) \mapsto x^2 + y^2$ pour x et y de l'intervalle [-60 ; 60]. Sur un plan technique, c'est le logiciel de calcul formel *Maple* (on peut utiliser aussi Xcas) qui nous a tracé la représentation en perspective de cette surface, impossible à obtenir sur un tableur (sauf erreur de notre part). Sur Maple, il suffit de taper l'instruction:

$$plot3d(x^2 + y^2, x = -60..60, y = -60..60,)$$

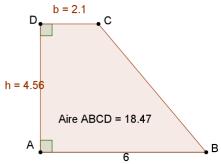
D'une façon générale, il est fait un très grand usage des fonctions à plusieurs variables dans les langages programmation. En effet, lorsqu'un programme nécessite qu'on lui entre des données, celles-ci sont en fait des nombres variables que l'on choisit lors de l'exécution du programme. On dit que la fonction prend ces nombres en argument.

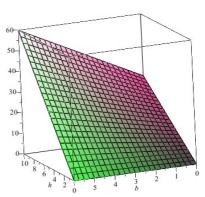
Exemple 12: Pour être plus concret, donnons-nous un algorithme qui prenne deux nombres entiers en argument a et b et renvoie le PGCD de ces nombres. Nous fabriquerons à partir de cet algorithme, un programme qui sera une fonction de 2 variables $PGCD: (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto PGCD(a,b).$

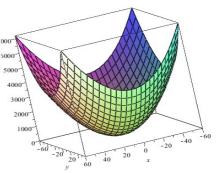
L'algorithme ressemble à cela :

- 1. a, b et c sont des entiers
- **2**. Lire *a* et *b*.
- 3. Si a < b alors inverser b et a avec la séquence $\{c=a, a=b, b=c\}$
- 4. Tant que le reste (a%b) de la division de a par b est différent de 0 faire $\{a=b, b=a\%b\}$
- 5. Afficher b

Nous avons utilisé la notation a%b pour le reste de la division







```
VARIABLES
 A EST_DU_TYPE NOMBRE
 B EST DU TYPE NOMBRE
 C EST DU TYPE NOMBRE
 T EST DU TYPE CHAINE
DEBUT_ALGORITHME
 LIRE A
 T PREND LA VALEUR "PGCD("+A+","+B+")=
 C PREND LA VALEUR A%B
 TANT_QUE (C!=0) FAIRE
    DEBUT TANT QUE
   A PREND LA VALEUR B
   B PREND LA VALEUR C
   C PREND LA VALEUR A%B
   FIN TANT QUE
 AFFICHER T
 AFFICHER B
FIN ALGORITHME
```

Algorithme lancé PGCD(477,254)=1 ***Algorithme terminé***

euclidienne de a par b car c'est une notation fréquente (utilisée par exemple dans Algobox). On trouve aussi a mod b qui se lit « a modulo b » par exemple dans le tableur scalc de OpenOffice, ou irem(a,b) pour integer remainder (reste entier) utilisé entre autres dans Xcas. Programmons cet algorithme dans Algobox (voir ci-contre) et nous obtenons une fonction (ici notée avec 4 lettres « PGCD ») de 2 variables a et b. Notre algorithme prévoit le cas où a < b car on n'impose rien sur les entiers mais notre programme Algobox n'a pas codé cela en estimant qu'on entrerait toujours un entier supérieur en premier (il a supposé a > b). Dans la pratique, il faudrait aussi prévoir le cas où l'on entre un nombre non entier.

II] Étude qualitative des fonctions

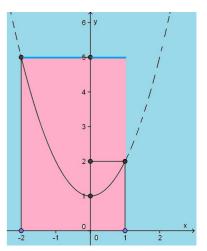
a) Extremum

La notion d'extremum (minimum ou maximum) d'une fonction sur un intervalle I est très simple à saisir, il s'agit de déterminer la valeur x_0 de la variable pour laquelle $f(x_0)$ est minimum (ou maximum).

<u>Définition</u>: f étant une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 étant une valeur de I, si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \ge f(x_0)$ alors on dira que f admet un **minimum** sur I en x_0 .

De même, une fonction définie sur I admet un **maximum** sur I en $x'_0 \in I$ si, pour tout $x \in I$ on a $f(x) \le f(x'_0)$.

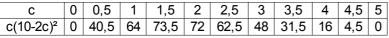
Exemple 13: Pour tout réel x on sait que $x^2+1\ge 1$ (car un carré est toujours positif) donc la fonction $f: x \mapsto x^2+1$ admet un minimum en 0 sur \mathbb{R} car $f(0)=0^2+1=1$ et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a bien $f(x)\ge f(0)$. Par contre, cette fonction f n'admet pas de maximum sur \mathbb{R} car f(x) peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on



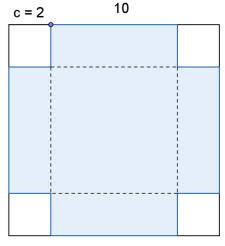
veut. Si on avait limité l'intervalle de définition de la fonction f, par exemple à l'intervalle [-2 ; 1], alors on aurait eu un maximum sur cet intervalle, atteint pour x=-2 car $f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$ et pour tout réel x tel que $-2 \le x \le 1$, on a bien $f(x) \le 5$. On peut tracer la courbe représentative de f limitée à [-2; 1] pour s'assurer de cela. La courbe représentant une fonction va nous être très utile pour apprécier l'existence d'un extremum et sa position approximative, mais on va voir avec l'exemple suivant que la détermination précise d'un extremum ne va pas toujours de soi.

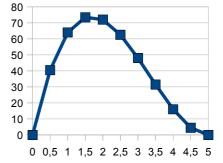
Exemple 14: Supposons que nous souhaitions découper les 4 coins d'une feuille de carton carrée de 10 cm de côté afin d'obtenir une boîte parallélépipédique, sans couvercle, selon le patron ci-contre. Sur notre illustration, nous avons donné aux côtés des carrés qu'on enlève la valeur 2 cm. Mais cette valeur est en réalité variable. Si on note c la longueur de ces côtés, alors on peut voit que c peut prendre toutes les valeurs réelles entre 0 et 5.

Nous allons réaliser la boîte en pliant les bords de cette feuille découpée selon les pointillés et en collant les coins. Selon la valeur de c on aura une boîte plus ou moins volumineuse : pour c=0 et pour c=5, le volume de la boîte serait nul, c'est la valeur minimum de la fonction volume. Exprimons ce volume qui dépend de c: la hauteur de la boîte est c et sa base est un carré de côté 10-2c. Le volume est donc égal à $v(c)=c(10-2c)^2$. Utilisons un tableur pour obtenir quelques valeurs et l'allure de la courbe de la fonction V.



Le pas que nous avons choisi n'est pas très petit (on incrémente les valeurs de c de 0,5 en 0,5), mais on remarque la présence

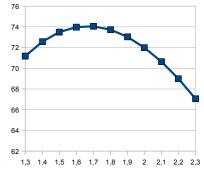




d'un maximum pour la fonction V sur l'intervalle [0 ; 5]. La valeur c_0 de c pour laquelle V atteint ce maximum $V(c_0)$ est approximativement de 1,5 et le maximum est $V(c_0)\approx73$ cm³. Mais ces valeurs sont des lectures graphiques, on peut les préciser autant qu'on le souhaite. Prenons un pas de 0,1 autour de la valeur estimée de c_0 .

X	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3
x(10-2x) ²	71,19	72,58	73,5	73,98	74,05	73,73	73,04	72	70,64	68,99	67,07

Notre valeur de c_0 se situe donc davantage aux alentours de 1,7 que de 1,5 et le maximum du volume est supérieur ou égal à 74,05. En continuant ainsi nous finirions par obtenir une valeur très précise, mais cette méthode n'est pas bien adaptée pour déterminer la valeur exacte. En fait ici, on pourrait la deviner car on trouve $c_0 \approx 1,666666\dots$ 64 Ce n'est qu'une conjecture mais elle s'avère exacte, d'autres méthodes montre en effet que la valeur qui maximise $c(10-2c)^2$ sur [0;5] est $c_0=\frac{5}{3}$.

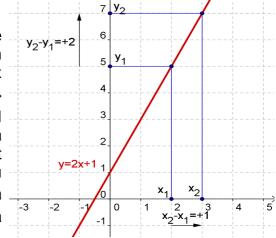


b) Sens de variation

<u>Définition</u>: On dit d'une fonction numérique f d'une variable x qu'elle est *croissante* sur un intervalle I, si pour des valeurs croissantes de la variable x on obtient des valeurs croissantes de l'image de x par f. Autrement dit, pour une fonction croissante, les antécédents et les images sont rangés dans le même ordre. Plus formellement, f est croissante sur un intervalle f si pour tout f et f

Nous définissons évidemment de la même manière, une fonction *décroissante* sur un intervalle I: si pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$. Il faut alors noter qu'une fonction décroissante inverse l'ordre des antécédents et des images (les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents).

Exemple 15: La fonction affine $f: x \mapsto 2x+1$ est une fonction croissante sur \mathbb{R} . On a étudié ces fonctions en $3^{\text{ème}}$ et on a montré en particulier que le taux d'accroissement $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ d'une fonction affine $f: x \mapsto a\,x+b$ entre deux valeurs x_1 et x_2 de la variable x est égal au coefficient a qu'on appelle aussi pente de la droite (la courbe est alors une droite). Lorsque a est positif, et c'est le cas ici puisque a=2, la droite « monte » ce qui est dû au fait que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ et donc, si $x_2-x_1>0$ on a $f(x_2)-f(x_1)>0$ ce qui revient à dire que si $x_1< x_2$, on a $f(x_1)< f(x_2)$.



Avec des valeurs particulières : comme 2 < 3, on a f(2) < f(3) et c'est bien vrai car f(2)=5, f(3)=7 et 5 < 7. De même, comme -3 < -2, on a f(-3) < f(-2) ; c'est bien vrai car f(-3)=-5, f(-2)=-3 et -5 < -3.

<u>Définition</u>: Le taux d'accroissement t d'une fonction f définie sur un intervalle I, entre deux valeurs quelconques $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ est égal au quotient de l'accroissement des images par l'accroissement de la variable, soit à $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ou $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

L'intérêt d'une telle définition se comprend aisément si l'on considère le signe de ce taux t : Si **t>0**, l'accroissement des images a le même signe que l'accroissement de la variable. C'est-à-dire que si x_1 - x_2 <0 on a $f(x_1)$ - $f(x_2)$ <0, soit encore, si x_1 < x_2 on a $f(x_1)$ < $f(x_2)$ et donc, la fonction f est **croissante**.

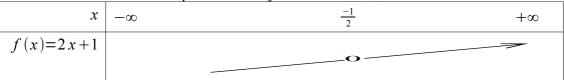
Si $\underline{t<0}$, c'est évidemment le contraire : l'accroissement des images a signe opposé de l'accroissement de la variable. C'est-à-dire que si $x_1-x_2<0$ on a $f(x_1)-f(x_2)>0$, soit encore, si $x_1< x_2$ on a $f(x_1)>f(x_2)$ et donc, la fonction f est <u>décroissante</u>.

<u>Propriété</u> : Si le signe du taux d'accroissement t d'une fonction reste constant sur un intervalle *I*, la fonction conserve le même sens de variation : croissant si t>0 et décroissant si t<0.

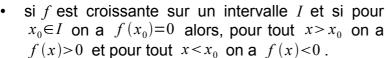
Exemple 16: La fonction $g: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$, c'est-à-dire sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. Montrons que cette fonction est décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie. Prenons $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$, tels que $x_1< x_2$, le taux t d'accroissement $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ de f sur $]1;+\infty[$ est égal à :

 $\frac{\frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_1-1}}{x_2-x_1} = \frac{\frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}}{\frac{1}{x_2-x_1}} = \frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)(x_2-x_1)} = \frac{-1}{(x_2-1)(x_1-1)}$, et comme $x_1>1$ et $x_2>1$ on a $x_1-1>0$ et $x_2-1>0$ et donc t<0, la fonction est bien décroissante sur 1; $+\infty$ [. De même, on montrerai qu'elle est décroissante sur $1-\infty$; 1[(car au dénominateur du taux on a un produit de 2 nombres négatifs).

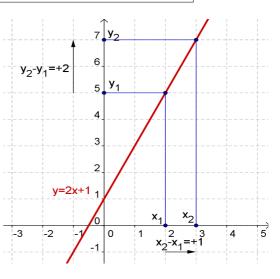
<u>Notation</u>: Le *tableau de variation* résume les informations concernant le sens de variation d'une fonction. Pour la fonction affine précédente $f: x \mapsto 2x+1$, on tracerait le tableau suivant :



Dans ce tableau de variation, nous avons ajouté une information qui ne n'a pas de rapport directement avec le sens de variation : nous avons indiqué pour l'antécédent de 0 qui est $\frac{-1}{2}$. En effet, $f(\frac{-1}{2}){=}2{\times}(\frac{-1}{2}){+}1{=}{-}1{+}1{=}0$. Pourquoi avons-nous fait cela ? Pour connaître le signe d'une expression algébrique (positif ou négatif), nous devons savoir si elle est croissante ou décroissante et nous devons connaître l'antécédent de 0, car



• si f est décroissante sur un intervalle I et si pour $x_0 \in I$ on a $f(x_0) = 0$ alors, pour tout $x > x_0$ on a f(x) < 0 et pour tout $x < x_0$ on a f(x) < 0.



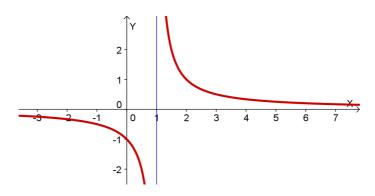
Les informations concernant le signe d'un expression algébrique peuvent être synthétisées dans un tableau spécial appelé *tableau de signes*. Pour notre expression affine 2x+1, on peut dresser ce petit tableau récapitulatif :

abioda rocapitala	•••		
x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$-\infty$
Signe de $2x+1$	_	0	+

Pour la fonction $g: x \mapsto \frac{1}{x-1}$ de l'exemple 16, on tracerait le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x) = \frac{1}{x-1}$		<u> </u>	>>>

Dans ce tableau de variation, nous avons ajouté deux barres verticales pour l'image de 1 qui n'est pas définie. La fonction est décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie, mais elle n'est pas globalement décroissante, car si 0<2 on a g(0)=-1 et g(2)=1 et donc g(0)<g(2). La courbe de cette fonction est appelée une *hyperbole*, nous étudierons ce genre de fonction au chapitre sur les fonctions de référence (fonctions homographiques).



Exemple 17: Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur \mathbb{R} , décroissante sur $1-\infty:21$ puis croissante sur $12:+\infty1$:

x	$-\infty$ -1	2	5	$+\infty$
g(x)		-5		

D'après ce tableau, on peut se faire une idée de l'allure de la courbe représentant cette fonction. Cela pourrait être quelque chose comme ce qui est dessiné plus bas.

Nous avons tracé à droite la courbe d'équation $y=\frac{5(x-2)^2}{9}-5$). On constate en tout cas que la fonction passe par un minimum qui est -5, atteint lorsque x=2. On ne sait pas s'il y a un

maximum : g(x) pourrait croître jusqu'à des valeurs infiniment grandes comme sur la courbe que nous avons tracé mais g(x) pourrait tout aussi bien, avec ce tableau de variations, croître très lentement au point de ne pas dépasser une certaine valeur comme sur la courbe de gauche où pour tout réel x on a g(x) < 3. Dans ce dernier cas, on dira que la fonction g admet un maximum sur $\mathbb R$ qui est 3, mais ce maximum n'est jamais atteint...

Si on ne sait pas tout de la courbe de g, par contre, on connait très précisément le signe de $g\left(x\right)$ selon les valeurs de x, nous

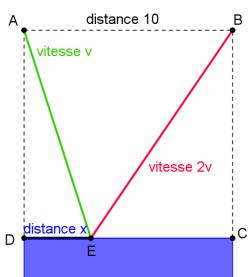
pouvons donner le tableau des signes de g:

x	$-\infty$	-1		5		$-\infty$	
Signe de $g(x)$	+	0	_	0	+		
y =g()	х) у						
	2						
	0						× 、
-5 -4 -3 -2 -1	0 1	2 3	4 5	6	7 8	9 1	0 11
	-2		/				
	-3 -4					<u> </u>	
	-5	/				ļ	

c) <u>Détermination algorithmique d'un extremum</u>

En seconde, on n'a pas encore tous les outils pour déterminer algébriquement l'extremum d'une fonction. Par contre, on peut déterminer cette valeur grâce à un algorithme, pour peu que l'on connaisse l'expression algébrique de la fonction (pour effectuer les calculs) dont on cherche l'extremum et aussi, <u>un intervalle à l'intérieur duquel se situe **un seul** extremum</u> : pour la recherche d'un minimum par exemple, la fonction doit être décroissante puis croissante sur cet intervalle.

Exemple 18 : Un homme veut aller d'un point A à un point B



y=g(x)

où il y a le feu. En A, il porte deux seaux vides et court à la vitesse v vers une rivière (CD) où il remplit ses seaux en un point E. Ensuite, de E vers B, il court deux fois moins vite car il est chargé. On demande à quelle distance de D se situe le point E pour minimiser la durée du trajet. Pour simplifier la situation, on prendra un schéma où ABCD est un carré.

On peut essayer de mettre en équation ce problème. Ce n'est pas forcément la seule méthode,

mais on peut toujours essayer. La distance AE vaut $\sqrt{x^2+10^2}$ et donc la durée du trajet AE est $\frac{AE}{v} = \frac{\sqrt{x^2+10^2}}{v}$. De E à B, la vitesse est 2v et le trajet $EB = \sqrt{(10-x)^2+10^2}$ donc la durée du trajet EB est $\frac{EB}{2v} = \frac{\sqrt{(10-x)^2+10^2}}{2v}$. La durée à minimiser dépend à la fois de x et de v, mais v étant supposé constant nous le prendrons égal à 1. On a donc une fonction f de x définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{(10-x)^2+10^2}}{2} + \sqrt{x^2+10^2} = \frac{\sqrt{(10-x)^2+100}+2\sqrt{x^2+100}}{2}$$

Minimiser f sur l'intervalle [0;10] n'est pas une mince 10^{-1} 10^{-1} affaire. Il ne s'agit pas de résoudre ici une équation, même si plus tard ce problème sera converti en équation (il faut chercher quand s'annule f', la fonction dérivée de f). Il s'agit juste de trouver la plus petite valeur de f(x) sur l'intervalle. L'allure de la courbe de f sur cet intervalle est donnée

```
CODE DE L'ALGORITHME
       VARIABLES
         A EST DU TYPE NOMBRE
         B EST_DU_TYPE NOMBRE
         C EST_DU_TYPE NOMBRE
A_f EST_DU_TYPE NOMBRE
         C_f EST_DU_TYPE NOMBRE
         N EST DU TYPE NOMBRE
         I EST_DU_TYPE NOMBRE
         P EST_DU_TYPE NOMBRE
         J EST_DU_TYPE NOMBRE
       L EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
12
13
14
         AFFICHER "Entrer la borne inférieure de l'intervalle : "
         LIRE A
15
16
         AFFICHER "Entrer la borne supérieure de l'intervalle : '
18
         AFFICHER E
19
         AFFICHER "Entrer l'exposant de la précision désirée : 10 puissance
20
21
22
         AFFICHER "Entrer le nombre de parties créées à chaque découpages :
23
25
         I PREND_LA_VALEUR 2
J PREND_LA_VALEUR 1
         A_f PREND_LA_VALEUR F1(A)
L PREND_LA_VALEUR (B-A)/P
         C PREND_LA_VALEUR A+L
30
         C f PREND LA VALEUR F1(C)
         TANT QUE ((B-A)>pow(10,N)) FAIRE
32
           DEBUT TANT QUE
           TANT QUE (A f>C f) FAIRE
34
35
             DEBUT TANT QUE
             A PREND LA VALEUR C
             A_f PREND_LA_VALEUR C_f
37
             C PREND LA VALEUR A+L
             C_f PREND_LA_VALEUR F1(C)
39
             I PREND LA VALEUR I+1
             FIN TANT QUE
           B PREND_LA_VALEUR C
           A PREND LA VALEUR A-L
           A f PREND LA VALEUR F1(A)
           L PREND LA VALEUR (B-A)/P
           J PREND_LA_VALEUR J+1
           C PREND_LA_VALEUR A+L
C_f PREND_LA_VALEUR F1(C)
46
47
48
49
           I PREND LA VALEUR I+1
           FIN_TANT_QUE
50
51
         AFFICHER "La solution cherchée est environ égale à : "
         AFFICHER C
         AFFICHER "Le nombre I d'appels à f qui a été nécessaire est de : "
53
         AFFICHER I
54
         AFFICHER "Le nombre J de découpages qui a été nécessaire est de :"
55
56
         AFFICHER J
       FIN ALGORITHME
57
58
     Fonction numérique utilisée :
     F1(x) = sqrt((10-x) * (10-x) +100) +2*sqrt(x*x+100)
```

urer le nombre de parties créées à chaque découpages : solution cherchée est environ égale à : 2.994608 nombre I d'appels à f qui a été nécessaire est de : 56 nombre J de découpages qui a été nécessaire est de :17 "Alporithme terminé": par un logiciel. On constate que f décroit de 0 à x_0 puis croit de x_0 à 10. Elle passe donc par un minimum qui est $x_0 \approx 3$. La réponse cherchée est donc environ 3 mais ce n'est pas très précis comme détermination. En modifiant la fenêtre d'affichage et la précision de la mesure, on peut donner cette valeur $x_0 \approx 2.9934$ (voir figure). Peut-on faire mieux qu'une lecture approximative? Oui, en programmant la recherche à l'aide d'un algorithme. L'idée de cet algorithme est de décrire un intervalle [a;b] où se situe ce maximum et d'effectuer un balayage. On découpe pour cela en fragments l'intervalle pour déterminer les bornes d'un nouvel intervalle, plus restreint, sur lequel on pourra recommencer. Les fragments sont des portions adjacentes, disons 10 portions, ou p portions (p étant paramétrable). Pour l'algorithme de balayage qui suit, nous avons supposé que f est décroissante puis croissante (comme dans notre situation) et que l'on détermine donc un minimum. Pour un maximum, il y a une adaptation à faire (nous avons mis en rouge ce qu'il faut changer).

(2.9934, 33.0872)

(2.9934, 0)

- 1. Entrer A et B (B plus grand que A), les extrémités du segment et N l'exposant de la précision souhaitée ainsi que P (le nombre de découpages à chaque étape). A', L, C et C' sont des nombres.
- 2. Calculer A'=f(A), L=(B-A)/P, C=A+L et C'=f(C)
- 3. Tant que (B-A)> 10^{N} faire {
 Tant que A'>C' faire {A=C, A'=C', C=A+L et C'=f(C)}

B=C, A=A-L, A'=f(A), L=(B-A)/P, C=A+L etC'=f(C)

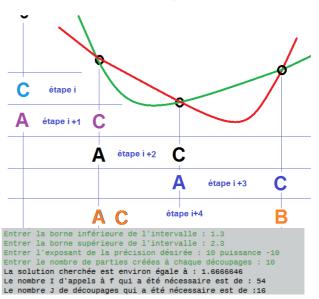
4. Afficher C.

On trouve ainsi une valeur très précise 2.994608 qui correspond, en la précisant, à celle du graphique.

Notre algorithme semble donc correct. Sur quelle idée repose t-il?

On balaye l'intervalle tant que les valeurs de f(C) sont inférieures à celles de f(A). On est sûr que la fonction décroit alors. Lorsqu'on détecte qu'une valeur de f(C) est supérieure, on est obligé de revenir en arrière d'un rang, car (voir figure) le minimum cherché peut se situer dans le dernier intervalle visité (courbe rouge) ou bien dans l'intervalle d'avant (courbe verte). Les nouvelles bornes de l'intervalle d'étude seront l'ancienne valeur de C (rebaptisée B) et la valeur avant A (recalculée et baptisée A). Un nouveau pas de balayage est alors calculé, plus petit que le précédent, et on commence le balayage avec ce pas : nouvelle valeur de C, etc.

Cet algorithme a l'avantage d'être utilisable pour toutes les recherches d'extremum. Il suffit de modifier l'expression de la fonction dans Algobox. et éventuellement de l'adapter pour un maximum. Essayons le avec notre fonction de l'exemple 14, la fonction est $v(c)=c(10-2c)^2$ et passe par un maximum dans l'intervalle [1,3;2,3]. Si la mise au point de l'algorithme nous a pris 30 minutes, il nous suffit maintenant de 1 minute pour l'adapter à cette nouvelle situation. Nous retrouvons la valeur déjà estimée : 1,6666646. Les derniers chiffres ne sont pas corrects mais on touche à une limitation Entrer la borne inférieure de l'intervalle : 1.3 technique d'Algobox : les nombres décimaux (on travaille toujours avec des décimaux en La solution cherchée est environ égale à : 1.66666646 programmation) n'ont pas suffisamment de Le nombre I d'appels à f qui a été nécessaire est de : 54 Le nombre J de découpages qui a été nécessaire est de : 16



décimales pour atteindre la précision souhaitée correctement. Ici, du fait qu'on doit atteindre l'égalité des valeurs décimales calculées (ce ne sont pas les bonnes car il manque de décimales), l'algorithme se fixe sur un point qui n'est pas exactement le meilleur, même avec les décimales affichées. En essayant avec un autre pas, on pourra tomber au plus près de la bonne valeur (ici 1,6666667) ou plus loin.

Avec P=7, on trouve 1,6666636 - avec P=8, on trouve 1,6666643 - avec P=9, on trouve 1,6666636 - avec P=11, on trouve 1,6666637 - avec P=13, on trouve 1,6666647...

Lisez à ce sujet l'avertissement des auteurs d'Algobox :

Dans AlgoBox, comme avec tous les langages de programmation, la représentation interne des nombres qui ne sont ni des entiers, ni des décimaux simples (du style 0.05) peut engendrer des problèmes de précision et d'arrondis. Une égalité mathématique peut donc se retrouver non vérifiée lors de l'exécution réelle d'un algorithme. L'utilisateur doit être conscient de ces problèmes de précision dès qu'il manipule des nombres non entiers. La prudence est notamment de mise lors de l'utilisation d'un bloc TANT QUE : une condition ne prenant pas en compte les problèmes de précision en informatique peut engendrer une boucle infinie (qui sera stoppée par le mécanisme de sécurité interne d'AlgoBox). Il convient donc de tenir compte de ces limites de précision lors de la conception de certains algorithmes.

Programmer dans un autre environnement : Algobox est limité car sa vocation première est l'initiation à l'algorithmique/ programmation. On peut essayer d'autres environnements de programmation pour tester nos algorithmes. Le logiciel de calcul formel Xcas possède notamment un module de programmation. Dans la situation de l'exemple 18 (recherche d'un extremum sur un intervalle), l'implémentation de l'algorithme conduit à un programme légèrement différent car la syntaxe est différente, mais il ne va pas être limité par des guestions

d'arrondis car il fonctionne avec des valeurs extremum(a,b,n,p):={ exactes. Nous avons transformé multiplication par 0,05 en une division par 20 car sinon, l'utilisation d'un nombre considéré comme approché conduira à travailler avec des valeurs approchées (avec un certain nombre de décimales, 14 par défaut dans Xcas). Voici pour information, ce que donne cet algorithme extremum(0,10,-4,10); valeur calculée = 2.9946 dans l'environnement Xcas. La valeur c nombre d'appels à la fonction = 50 nombre de niveaux du découpage= 9 calculée pour 4 chiffres après la virgule (n=-4)

```
local cpt1,cpt2,1,c,fa,fb,fc;
 local F:=x->sqrt((10-x)^2+100)/2+sqrt(x^2+100);
 cpt1:=2;cpt2:=1;
 fa:=F(a);1:=(b-a)/p;c:=a+1;fc:=F(c);
 while(b-a>10^n) {while(fa>fc){a:=c;fa:=fc;c:=a+1;fc:=F(c);cpt1:=cpt1+1;}
                          b:=c;a:=a-1;fa:=F(a);1:=(b-a)/p;cpt2:=cpt2+1;
b:=c;a:=a-1;fa:=r(a);1:=(b-a)/p;
c:=a+1;fc:=F(c);cpt1:=cpt1+1;}
print("valeur calculée = " + evalf(c,-n));
print("nombre d'appels à la fonction = " + cpt1);
print("nombre de niveaux du découpage= " + cpt2);
return c;}
```

est affichée avec 4 chiffres grâce à l'instruction « evalf(c,-n) » mais la valeur obtenue est exactement connue, il s'agit de la fraction retournée par l'instruction « return c ». Les mots anglais de la syntaxe Xcas appartiennent au langage de programmation C++ mais heureusement pour les francophones, les concepteurs de Xcas étant français, il est aussi possible d'écrire en français (if sera écrit si, etc.). On ne se lasse pas d'observer la puissance du calcul informatique : pour trouver les 20 premiers chiffres de l'écriture décimale du nombre cherché, il ne faut que 7 secondes, les fractions utilisées comportant des entiers de 23 chiffres!

<u>Prolongement</u>: notre pompier de l'exemple 18 a t-il réussi à éteindre le feu ? L'histoire ne le dit pas, mais c'est évident que s'il devait écrire, puis exécuter cet algorithme d'une façon pratique, le feu pouvait bien se propager... Imaginons

extremum(0,10,-20,10);

Valeur calculée = 2.99465439562170753540

nombre d'appels à la fonction = 115

nombre de niveaux du découpage= 32

Evaluation time: 4.664

13944946209069842171876 4656612873077392578125

que ce problème soit vraiment utile, disons que le pompier doit faire 100 aller-retours avec, à chaque fois, passage par le point E. Peut-il trouver celui-ci d'une façon pratique (sans calculs) ? Oui, en supposant qu'il se chronomètre et qu'il puisse marquer un point près de l'eau avec un bâton d'une longueur de 1 m. Disons qu'au début, il se dirige vers le milieu E_1 du segment [CD], il effectue le trajet en un temps t_1 . Ensuite, il essaie en passant par E_0 qui est 1 m avant E_1 , il effectue le trajet en un temps t_0 . Puis il essaie en passant par E_2 qui est 1 m après E_1 , il effectue le trajet en un temps t_2 . S'il se retrouve dans la situation de la figure précédente : avec $t_2 > t_0$ et $t_0 < t_1$, alors c'est que le point qu'il cherche est entre E_0 et E_2 . Il peut donc recommencer sont stratagème avec une longueur de bâton plus courte, disons un demi-bâton. Si il n'est pas dans cette situation où l'extremum est localisé, il est soit dans une situation croissante (où $t_0 < t_1$ $< t_2$), soit dans une situation décroissante (où $t_0 > t_1 > t_2$). Dans le 1^{er} cas, il va déplacer son bâton <u>vers</u> l'avant d'une longueur de bâton et il effectue le prochain trajet en passant par le nouveau point E_0 (les autres sont rebaptisés E_1 et E_2). Dans le 2^d cas, il va déplacer son bâton vers l'arrière d'une longueur de bâton et il effectue le prochain trajet en passant par le nouveau point E_2 (les autres sont rebaptisés E_0 et E₁). Dans tous les cas, il va finir par se retrouver dans une situation où l'extremum est localisé par 3 points, comme sur la figure précédente. Il pourra ainsi affiner son estimation en cassant en deux son bâton. Cette façon de procéder à l'avantage de ne pas demander de calculs au pompier qui se perfectionne de trajet en trajet. Si nous voulons programmer sa méthode, il va falloir utiliser le calcul (c'est aussi plus facile à réaliser qu'avec un chronomètre et un bâton) : on calcule les distances et les temps comme précédemment. C'est juste l'algorithme qui change (afin de pouvoir être réalisé par le pompier en situation).

- 1. Entrer A et B (B plus grand que A) les extrémités du segment, N le nombre de trajets à faire et L la longueur du bâton. I, A', B', C et C' sont des nombres.
- **2.** Calculer C=(A+B)/2, C'=f(C), A=C-L, A'=f(A), B=C+L, B'=f(B)
- **3.** Pour I allant de 3 à N faire {
 Tant que (A'>C' et C'>B') faire {A=C, A'=C', C=B et C'=B', B=C+L, B'=f(B), I=I+1} //vers l'arrière
 Tant que (A'<C' et C'<B') faire {B=C, B'=C', C=A et C'=A', A=C-L, A'=f(A), I=I+1} //vers l'avant
 L=L/2, A=C-L, A'=f(A), B=C+L, B'=f(B), I=I+2
- **4.** Afficher C.

Réalisons la programmation de cet algorithme sur Algobox et testons-le en prenant un bâton de 1 m et 100 trajets. On trouve 4 chiffres après la virgule qui correspondent avec la valeur précédente (2,9946). Comparons ces algorithmes en reportant

Entrer la borne inférieure de l'intervalle : 0 Entrer la borne supérieure de l'intervalle : 10 Entrer le nombre de trajets à faire : 100 Entrer la longueur du bâton : 1 La solution cherchée est environ égale à : 2.9946594 Le nombre I d'appels à f qui a été nécessaire est de : 101

l'évolution de la valeur trouvée en fonction du nombre d'appels de la fonction

1 evolution de	e ia valej	ui iiouvee eii i	onction du noi	libre d'appeis	de la lonction.		
Nmbr of fnctn	d'appels	5	10	20	30	40	50
Méthode du	ı bâton	3 (pour 8)	3 (pour 11)	3 (pour 20)	2,9922 (pour 30)	2,9951 (pour 42)	2,9946289 (pour 52)
Méthode ba	alayage	1 (pour 2)	2,84 (pour 12)	2,968 (pour 18)	2,99392 (pour 31)	2,9943 (pour 35)	2,9946138 (pour 48)

Ils semblent vraiment comparables en terme d'efficacité. N'oublions pas que notre algorithme « bâton » à l'avantage de pouvoir être mis en exécution sans calculs ni mesures (évidemment la précision trouvée ne sera identique à celle que nous trouvons avec des calculs).