2de — TD de Logique

I] Initiation aux tables de vérités

a) Contraire : Le contraire de la proposition P est noté ¬P, ou $\overline{P}$ ou encore !P.

Exemples

Si la proposition P est « le chat est (tout) noir »,
la proposition $\overline{P}$ est « le chat n'est pas (tout) noir »
(le chat peut être à 99% noir...)
Si la proposition Q est $x>1$,
la proposition $\overline{Q}$ est $x\leq 1$.

Compléter la table de vérité de la négation
(on note 1 pour « vrai » et 0 pour « faux »)

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

b) Conjonction : la conjonction de P et Q, proposition notée P ∧ Q (ou P&Q), est vraie quand P et Q sont toutes les deux vraies, fausse dans tous les autres cas.

Exemples

P : « le chat est noir », Q : « le chat dort »,
P ∧ Q : « le chat est noir et il dort » ou
« le chat noir dort » ou
« le chat qui dort est noir »
Si le chat blanc dort, P ∧ Q est faux
P : $x>1$, Q: $x<5$. P ∧ Q : $1<x<5$
P : $x>1$, Q: $x<0$. P ∧ Q : impossible, $x\in\emptyset$

Compléter la table de vérité du connecteur ∧ .

P	Q	P ∧ Q
1	0	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0

c) Disjonction : la disjonction de P et Q, proposition notée P ∨ Q (ou P||Q), est fausse quand P et Q sont tous les deux fausses, et vraie dans tous les autres cas (*ou inclusif* de la langue : l'un ou l'autre ou les deux).

Exemples

P : « le chat est noir », Q : « le chat dort »,
P ∨ Q : « le chat est noir et/ou il dort » ou
« le chat est noir ou il dort ou il dort et il est noir ».
Si le chat blanc dort, P ∨ Q est vrai.
P : $x>1$, Q: $x<5$. P ∨ Q : $x\in\mathbb{R}$.
P : $x>1$, Q: $x<0$. P ∨ Q : $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

Compléter la table de vérité du connecteur ∨ .

P	Q	P ∨ Q
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	1	1

d) Propriété 1: le contraire d'une disjonction $\overline{P\vee Q}$ revient à la conjonction des contraires $\overline{P}\wedge\overline{Q}$.
Montrer cela avec les tables de vérité (pour conclure il faut que les deux colonnes grises soient identiques).

P	Q	P ∨ Q	$\overline{P\vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}\wedge\overline{Q}$
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0

La négation de « riche ou célèbre » est pauvre et inconnu.

e) Propriété 2: le contraire d'une conjonction $\overline{P\wedge Q}$ revient à la disjonction des contraires $\overline{P}\vee\overline{Q}$.
Montrer cela avec les tables de vérité (pour conclure il faut que les deux colonnes grises soient identiques).

P	Q	P ∧ Q	$\overline{P\wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}\vee\overline{Q}$
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1

La négation de « un temps chaud et humide » est « un temps froid ou sec ».

II] Implication, contraposée, réciproque & équivalence

a) L'implication : L'*implication* $P \Rightarrow Q$ correspond à l'expression « si P alors Q ». Cela exprime la causalité, P est une condition *suffisante* pour que Q soit vraie. Pour $P \Rightarrow Q$, lorsque P est vraie, Q doit être vraie aussi mais rien ne dit ce qui se passe quand P est fausse (Q peut être vraie ou fausse).

Voici la table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	1

Compléter avec VRAI ou FAUX

S'il pleut alors le trottoir est mouillé » est une implication vraie (en supposant que le trottoir est exposé à la pluie et que la pluie mouille).

Si ABCD est un rectangle alors ABCD est un carré est une implication fausse (certains rectangles ne sont pas carrés).

Si ABCD est un rectangle alors AC=BD est une implication vraie (tous les rectangles ont des diagonales de même longueur).

Si AC=BD alors ABCD est un rectangle est une implication fausse (certains quadrilatères ont des diagonales de même longueur sans être des carrés ; elles ne se croisent pas en leur milieu).

b) La contraposée : La proposition contraposée de $P \Rightarrow Q$ est la proposition $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$. Ces deux propositions ont les mêmes valeurs de vérité, elles sont équivalentes (si l'une des deux est vraie, l'autre est vraie aussi).

Établir la table de vérité de la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$; vérifier qu'elle a même valeurs que l'implication $P \Rightarrow Q$.
Vérifier aussi, à l'aide de la table de vérité que $\overline{P} \vee Q$ a mêmes valeurs de vérité que l'implication $P \Rightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1

c) La réciproque : La proposition réciproque de $P \Rightarrow Q$ est la proposition $Q \Rightarrow P$. D'une façon générale, le fait qu'une proposition soit vraie n'entraîne pas nécessairement que sa réciproque soit vraie aussi.

Exemple : L'implication « s'il pleut alors le trottoir est mouillé » est vraie ;
sa réciproque « si le trottoir est mouillé alors il pleut » est fausse.
Donner un contre-exemple : le trottoir a été mouillé lors d'un arrosage de la voirie par des agents communaux.

d) L'équivalence : Lorsqu'une proposition $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ sont toutes les deux vraies, on parle d'*équivalence* et on note alors que $P \Leftrightarrow Q$. L'équivalence est ainsi le connecteur qui indique que P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Compléter la table de vérité de l'équivalence :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	0

Dresser la table de vérité de la formule $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ pour établir qu'il s'agit de $P \Leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$.
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0

Une autre façon de dire l'équivalence des propositions P et Q, n'utilisant que la conjonction et la négation est $\overline{P \wedge \overline{Q}} \wedge \overline{Q \wedge \overline{P}}$. Prouver cela à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	$\overline{Q}$	$P\wedge\overline{Q}$	$\overline{P\wedge\overline{Q}}$	$\overline{P}$	$Q\wedge\overline{P}$	$\overline{Q\wedge\overline{P}}$	$\overline{P\wedge\overline{Q}}\wedge\overline{Q\wedge\overline{P}}$	$P\Leftrightarrow Q$.
1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0

III] À propos d'implications

a) Condition suffisante & condition nécessaire

►compléter avec les mots *nécessaire* ou *suffisant*

Dans l'implication $P\Rightarrow Q$ la condition P est *suffisante* pour Q mais généralement pas *nécessaire*.
Exemple1 : Carré$\Rightarrow$Rectangle est une implication vraie.
La condition « carré » est *suffisante* pour avoir « rectangle », mais ce n'est pas une condition *nécessaire*.
Exemple2 : Rectangle$\Rightarrow$diagonales de même longueur est une implication vraie.
La condition « diagonales de même longueur » est une condition *nécessaire* pour avoir un rectangle.
En donner une autre : « avoir un angle droit » (ce n'est cependant pas *suffisant*).
« avoir deux angles droits » (ce n'est cependant pas *suffisant*).
« avoir trois angles droits » (c'est *suffisant* donc c'est *nécessaire* et *suffisant*).
Ne pas penser que si une implication est vraie, sa réciproque aussi : $x=3\Rightarrow x^2=9$ est vraie mais il ne faut pas en déduire que la réciproque $x^2=9\Rightarrow x=3$ est vraie aussi ; $x=3$ n'est pas une condition *nécessaire* pour que $x^2=9$ (c'est cependant une condition *suffisante*).

►Entourer les conditions *suffisantes* pour que $x^2>4$

$x>100$	$x>10^6$	$x>1{,}9$	$x<-2$	$x<-2$ ou $x>2$
$x<-10$	$x<-2{,}1$	$x<-3$ ou $x>3$	$x<0$	$x<-1$

Parmi ces conditions *suffisantes* laquelle est *nécessaire*? $x<-2$ ou $x>2$ (c'est *nécessaire* et *suffisant*)

►Conditions suffisantes sur un forum mathématiques :
Glob35 : « Je dois démontrer que ABCD est un parallélogramme et je ne sais pas comment m'y prendre »
Les réponses à la question de Glob35 ne tardent pas :
P314159 : « Connais-tu une condition suffisante pour que ABCD soit un parallélogramme ? »
Microb12 : « $\vec{AB}=\vec{DC}$
XY007 : « $AB=DC$
Coco75005 : « $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ colinéaires.
Bogoss123 : « $(AB)//(DC)$
E=mc² : « $\vec{AD}=\vec{BC}$
Ami37 : « $AC=AB+AD$
Lesquelles des conditions énoncées sont vraiment suffisantes pour que ABCD soit un parallélogramme ?
$\vec{AB}=\vec{DC}$, $\vec{AD}=\vec{BC}$ (ce sont des conditions *nécessaires* et *suffisantes*).
Énoncer une autre condition suffisante : les diagonales ont même milieu (c'est une condition *nécessaire* et *suffisante*), ABCD est un rectangle (c'est une condition *suffisante* mais pas *nécessaire*).
Certaines des conditions énoncées ne sont que des conditions nécessaires. Lesquelles ?
$AB=DC$, $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ colinéaires, $(AB)//(DC)$ ne sont *que* des conditions *nécessaires*.
Énoncer d'autres conditions nécessaires : $AD=BC$, $(AD)//(BC)$, ABCD est convexe, ABCD est un trapèze sont des conditions *nécessaires* mais pas *suffisantes*.

b) Quantificateur

Un énoncé utilisant le quantificateur universel $\forall$ peut être remplacé par une implication.
Pour prouver qu'une implication est fausse, il suffit qu'il existe ($\exists$) un contre-exemple.
►Compléter : $\forall\ M\in[AB],\ AM+MB=AB$ peut s'écrire si $M\in[AB]$ alors $AM+MB=AB$.
►Énoncer l'implication Carré$\Rightarrow$Rectangle à l'aide du quantificateur universel : tout carré est rectangle.
Avec le quantificateur, on doit nommer les ensembles : $\forall\ ABCD\in E_{carré},\ ABCD\in E_{rectangle}$
►L'affirmation $\forall\ n\in\mathbb{N}^*,\ 2^n+1$ est premier est-elle vraie ou fausse ? fausse.
Prouver votre affirmation précédente en exhibant un contre-exemple $2^3+1=9=3\times 3$ n'est pas premier .
L'affirmation $[AC]\perp[BD]\ \Rightarrow\ ABCD$ losange est-elle vraie ou fausse ? fausse.
Prouver votre affirmation (faire une figure) : Si $[AC]\perp[BD]$ mais que $[AC]$ et $[BD]$ n'ont pas le

même milieu, $ABCD$ n'est pas un rectangle.

c) Transitivité de l'implication : $(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R)$.
Montrer la transitivité de l'implication à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	R	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)$	$P\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)\Rightarrow(P\Rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

NB : Ce que l'on vient de montrer est une tautologie (voir plus loin) : c'est toujours vrai.

Une autre propriété à démontrer à l'aide d'une table de vérité : la distributivité de la disjonction sur la conjonction : $(P\wedge Q)\vee R = (P\vee R)\wedge(Q\vee R)$.

P	Q	R	$P\wedge Q$	$P\vee R$	$Q\vee R$	$(P\wedge Q)\vee R$	$(P\vee R)\wedge(Q\vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

IV] Raisonnements

a) Valeur de l'exemple

Pour prouver l'existence d'une chose, on peut parfois exhiber cette chose.

► Prouver l'affirmation suivante $\exists x>0, \frac{1}{1-x^2}=2$.

Il suffit que $1-x^2=\frac{1}{2}$ et donc que $x^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, et pour cela il suffit que $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Voilà notre exemple.
Il y a ici une autre valeur qui vérifie la condition, mais elle est négative.

► Prouver l'affirmation suivante $\exists x>0, x>x^2$.

Il suffit que $x=0{,}5$ car alors $0{,}5^2=0{,}25<0{,}5$, ce qui vérifie bien la condition. Voilà notre exemple.
Il y a ici une infinité d'autres valeurs qui vérifient la condition, tous les nombres de $]0\,;1[$.

Attention : un exemple ne suffit pas à prouver une propriété universelle. Pour prouver une propriété universelle (une affirmation qui concerne une infinité d'objets), on peut procéder par équivalences.

► Prouver l'affirmation suivante $\forall\ x\in\mathbb{R}, 1+x-x^2<2$.

Attention : un exemple ne suffit pas à prouver une propriété universelle. Pour prouver une propriété universelle (une affirmation qui concerne une infinité d'objets), on peut procéder par équivalences.

$1+x-x^2<2\Leftrightarrow x^2-x+1>0\Leftrightarrow(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+1>0\Leftrightarrow(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$.

Mais $\forall\ x\in\mathbb{R}, (x-\frac{1}{2})^2>0$ et $(x-\frac{1}{2})^2>0\Leftrightarrow(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>\frac{3}{4}>0$.

Les deux propositions sont donc équivalentes.

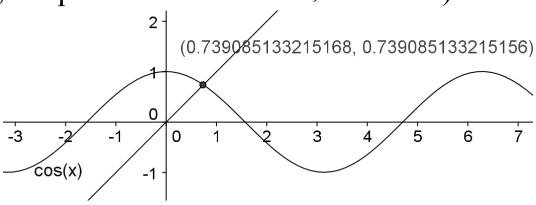
Exhiber l'exemple demandé n'est pas toujours possible, aussi peut-on se satisfaire d'une détermination constructive (on donne l'algorithme de construction)

► Comment prouve t-on l'affirmation $\exists x\in\mathbb{R}, \cos x=x$? (à propos de cette affirmation, on pourrait être plus précis et demander de prouver qu'il n'existe qu'*un seul* nombre, ce qui se note $\exists!\ x\in\mathbb{R}, \cos x=x$)

On sait que cos est décroissante sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$:

$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1\geq\cos x\geq 0$. Or, $1\geq\cos x\geq 0\Leftrightarrow -1\leq-\cos x\leq 0$.

En ajoutant ces deux encadrements, $-1\leq x-\cos x\leq\frac{\pi}{2}$.



Il y a donc une valeur de x qui convient. Pour la déterminer, on peut appliquer un algorithme (dichotomie, balayage) ou bien utiliser un logiciel qui nous en donnera une valeur approchée (GeoGebra nous donne 15 décimales $x \approx 0,739085133215168$, ce qui n'est déjà pas si mal). Mais la valeur exacte reste inaccessible...

b) Valeur du contre-exemple

Pour mettre en défaut une propriété universelle, il suffit d'exhiber un contre-exemple.

►Prouver que l'affirmation suivante $\forall\ n \in \mathbb{N}, n^2+4$ est pair est fausse.

Pour $n=1$ c'est faux car $1^2+1=5$ qui est impair (c'est faux aussi pour $n=3$, 5, 7, etc. en fait, pour toutes les valeurs impaires de n mais là n'était pas la question) donc c'est faux en général.

►Prouver que l'affirmation suivante $\forall\ n \in \mathbb{N},$ si n se termine par 3 alors n est divisible par 3 est fausse.

Pour $n=13$ c'est faux car $13=4\times3+1$ n'est pas divisible par 3 (23, 43, 53, 73, 83, etc. aussi).

NB : Cela ressemble à une propriété vraie pour la divisibilité par 2 mais ça ne marche pas pour la divisibilité par 3.

Parfois, l'absence de contre-exemple est la seule « preuve » que l'on ait. La propriété n'est alors qu'une conjecture. Pierre de Fermat affirma en 1640 que $\forall\ n \in \mathbb{N}, 2^{2^n}+1$ est premier. Le 1er contre-exemple est obtenu pour $n=5$ mais il fallait prouver l'absence de diviseur de 4 294 967 297, ce qui n'est pas aisé. Ce n'est qu'un siècle plus tard, que Euler prouva que tout diviseur premier de $2^{2^n}+1$, s'il en existe, s'écrit $k2^{n+1}+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et donc que $2^{2^5}+1$ ne pouvait se diviser que par $64k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$, ce qui facilitait grandement la recherche du contre-exemple.

►Trouver le contre-exemple cherché qui infirma définitivement cette conjecture de Pierre de Fermat (la seule conjecture fausse de ce grand mathématicien toulousain).

4 294 967 297 est divisible par 641, c'est à dire $64\times10+1$.

En effet, 4 294 967 297÷641=6 700 417. Donc ce nombre n'est pas premier.

Par contre, pour $n=0$, 1, 2, 3 et 4, on trouve les nombres premiers 3, 5, 17, 65 et 257.

Cela incita Fermat à émettre cette conjecture (qui est encore fausse après $n=5$).

c) Utilisation de la contraposée

Pour prouver une implication, il est parfois plus simple de prouver la contraposée.

►Énoncer la contraposée de l'implication n^2 pair $\Rightarrow n$ pair, puis prouver cette contraposée.

La contraposée de cette implication est n impair $\Rightarrow n^2$ impair. Montrons cela :

n impair s'écrit $\exists k \in \mathbb{N}, n=2k+1$.

Calculons alors $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2)+1=2K+1$.

En posant $K=2k^2+1$, on en conclut que n^2 est impair car $\exists K \in \mathbb{N}, n^2=2K+1$.

d) Le raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition est vraie, on part de l'hypothèse qu'elle est fausse, on utilise une chaîne d'implications qui aboutit à une contradiction. On est alors forcé d'admettre que l'hypothèse était fausse...

►Euclide, grand mathématicien de l'antiquité (-300), prouva ainsi que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Énoncer la propriété contraire.

La propriété contraire est « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. »

En déduire une contradiction (on rappelle qu'un nombre rationnel peut s'écrire de façon unique à l'aide d'une fraction *irréductible*).

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors il existe deux nombres entiers a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{2}$.

Comme $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, on doit donc avoir $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, soit $\frac{a^2}{b^2}=2$.

On en déduit que $a^2=2\times b^2$, c'est-à-dire que le nombre a^2 est pair.

Or le carré d'un nombre pair est toujours pair et le carré d'un impair est toujours impair[1].

On doit donc conclure que a est pair.

Comme a est pair, il existe un entier a' tel que $a=2a'$.

Le carré de a est alors $a^2=(2a')^2=4a'^2$, mais comme c'est aussi $2b^2$, on en déduit que $2b^2=4a'^2$.

En simplifiant par 2 : $b^2=2a'^2$. Finalement b^2 est pair aussi, et par voie de conséquence b également.

De cette belle chaîne déductive, on obtient la certitude que a et b sont pairs tous les deux.

La fraction $\frac{a}{b}$ est donc simplifiable par 2...

Voilà notre contradiction ! Nous avions, en effet, supposé que $\frac{a}{b}$ était irréductible.

La conclusion n'est pas compatible avec l'hypothèse de départ; celle-ci est donc fausse.

Il n'existe pas de fraction égale à $\sqrt{2}$.

Ce nombre est irrationnel.

---

1 Le carré d'un nombre pair peut s'écrire $(2n)^2 = 4n^2$ qui est pair. Le carré d'un nombre impair peut s'écrire $(2n+1)^2$ qui se développe en $4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$ ce nombre est la somme de 1 et d'un nombre pair, c'est donc un nombre impair.

Une autre démonstration astucieuse de l'infinité des nombres premiers : supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers; ajoutons 1 au produit de tous ces nombres premiers. Le nombre obtenu n'est divisible par aucun des nombres premiers connus, il est donc premier...

►Construire ainsi un nombre premier en supposant connu 2, 3, 5, 7 et 11.

L'idée de cette démonstration vient de cette remarque : on peut fabriquer un nombre premier à partir de la collection des N premiers nombres premiers. À partir de la collection proposée : 2, 3, 5, 7 et 11, on fabrique le nombre $2\times3\times5\times7\times11+1=2311$ qui est bien premier car il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{2311}\approx48{,}07$ (ces nombres sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 et 47). En réalité, il n'est pas nécessaire de tester la divisibilité par ces diviseurs potentiels, car, par construction de ce nombre, il ne peut être un multiple d'aucun des N premiers nombres premiers (le reste de la division euclidienne de ce nombre par chacun de ces nombres premiers est 1).

On comprend alors qu'avec une famille plus grande, mais finie, de nombres premiers, on pourra toujours en fabriquer un autre, plus grand que tous ceux de la famille. D'où la contradiction, le rejet de l'hypothèse « la famille des nombres premiers est finie » et la certitude de son contraire « la famille des nombres premiers est infinie ».

NB : les nombres fabriqués ainsi (nombres d'Euclide) ne sont pas tous premiers. Celui qui suit 2311 est $2\times3\times5\times7\times11\times13+1=30\,031$ qui est divisible par 59 (qui est bien un nombre premier supérieur à 13 comme on vient de le montrer).

e) <u>Le raisonnement par disjonction de cas</u>

Pour établir une proposition, on distingue un nombre fini de cas recouvrant la totalité des cas possibles, et on prouve la proposition dans chacun des cas.

►Prouver que tout triangle ABC isocèle en A et possédant un angle de 60° est nécessairement équilatéral. Distinguer pour cela le cas $\widehat{ABC}=60°$ et le cas $\widehat{BAC}=60°$.

Dans le cas où $\widehat{ABC}=60°$, on sait que $\widehat{ACB}=\widehat{ABC}=60°$ (ce sont les deux angles égaux) et on en déduit que $\widehat{BAC}=180-2\times60=60°$ (la somme des trois angles d'un triangle vaut 180°). Donc le triangle ABC a trois angles égaux à 60°. Il est équilatéral.

Dans le cas où $\widehat{ACB}=60°$, on est ramené au cas précédent (car B et C sont interchangeables).

Dans le cas où $\widehat{BAC}=60°$, on calcule $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\frac{180-60}{2}=60°$, le triangle a trois angles égaux à 60°.

►Prouver que si n est entier alors $n(n+1)$ est pair en distinguant le cas où n est pair du cas où n est impair.

Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n=2k$ et on a $n(n+1)=2k(2k+1)=2(2k^2+k)=2K$ qui est pair.

Si n est impair alors il existe un entier k tel que $n=2k+1$ et on a

$n(n+1)=(2k+1)((2k+1)+1)=(2k+1)(2k^2+2)=2[(2k+1)(k^2+1)]=2K$ qui est donc bien un nombre pair.

Dans tous les cas (n est soit pair, soit impair), $n(n+1)$ est donc un nombre pair.

►Montrer de la même façon mais en distinguant 3 cas, que $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Si n est divisible par 3 alors il existe un entier k tel que $n=3k$ et on a

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3[k(3k+1)(3k+2)]=3K$ qui est divisible par 3.

Si il existe un entier k tel que $n=3k+1$, on a

$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)=3[(3k+1)(3k+2)(k+1)]=3K$ qui est divisible par 3.

Si il existe un entier k tel que $n=3k+2$, on a

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3[(3k+2)(k+1)(3k+4)]=3K$ qui est divisible par 3.

Dans tous les cas (le reste de la division euclidienne de n par 3 est toujours égal, soit à 0, soit à 1, soit à 2), $n(n+1)(n+2)$ est donc un nombre qui est divisible par 3.

►À quelle condition portant sur $n\in\mathbb{N}$, le nombre n^2+3n+2 est-il divisible par 3 ?

Pour traiter cette question, on peut faire un raisonnement par disjonction des cas car il y en a peu (trois). Mais si la question était « à quelle condition portant sur $n\in\mathbb{N}$, le nombre n^2+2n est-il divisible par 23 ? », on aura sans doute une meilleure idée d'essayer de répondre par un raisonnement analytique.

Commençons par la disjonction des cas proposée :

Si n est divisible par 3 alors il existe un entier k tel que $n=3k$ et on a

$n^2+3n+2=(3k)^2+3(3k)+2=9k^2+9k+2=3(3k^2+3k)+2=3K+2$ qui n'est pas divisible par 3.

Si il existe un entier k tel que $n=3k+1$, on a

$n^2+3n+2=(3k+1)^2+3(3k+1)+2=9k^2+6k+1+9k+3+2=9k^2+15k+6=3(3k^2+5k+2)=3K$ qui est divisible par 3.

Si il existe un entier k tel que n=3k+2, on a
$n^2+3n+2=(3k+2)^2+3(3k+2)+2=9k^2+12k+4+9k+6+2=9k^2+21k+12=3(3k^2+7k+4)=3K$ qui est divisible par 3.
Conclusion : n^2+3n+2 est divisible par 3 quand n ne l'est pas.
Vérifications : Pour n=7=3×2+1, $n^2+3n+2=72=3\times 24$; pour n=8=3×2+2, $n^2+3n+2=90=3\times 30$; pour n=9=3×3, $n^2+3n+2=110=3\times 36+2$.

À quelle condition portant sur $n\in\mathbb{N}$, le nombre n^2+2n est-il divisible par 23 ? Nous n'allons pas distinguer les 23 restes possibles dans la division euclidienne de n^2+2n par 23. Traduisons le fait que ce nombre est divisible par 23 : il existe un entier k tel que $n^2+2n=23k$, donc $n^2+2n-23k=0$ (k est ici un paramètre de l'équation de second degré en n).
Le discriminant de cette équation est $\Delta=2^2+4\times 23k=4(1+23k)$. Le nombre n doit être une solution entière de cette équation, or les solutions s'écrivent $\frac{-2\pm\sqrt{4(1+23k)}}{2}=-1\pm\sqrt{1+23k}$. Il faut donc que $\sqrt{1+23k}$, soit entier pour que n le soit. Il faut donc que $1+23k$ soit le carré d'un entier, disons K^2. On doit donc avoir $K^2=1+23k$. Une petite recherche au tableur montre les premières valeurs de k qui conviennent : 1 (K=1, n=0=0×23), 21 (K=22, n=21=0×23+21), 25 (K=24, n=23=1×23), 88 (K=45, n=44=1×23+21), 96 (K=47, n=46=2×23), 201 (K=68, n=67=2×23+21), 213 (K=70, n=69=3×23), etc.
On voit se dessiner un schéma qu'il faudrait confirmer : les seuls nombres n qui conduisent à n^2+2n divisible par 23 sont les multiples de 23 et les nombres qui s'écrivent $n'\times 23+21$.
Mais comment prouver cela sans effectuer la fastidieuse disjonction des cas ?
Pour le cas où $n=n'\times 23$, c'est évident.
Pour le cas où $n=n'\times 23+21$, on a
$n^2+2n=(23n'+21)^2+2(23n'+21)=529n'^2+966n'+441+46n'+42=529n'^2+1012n'+483$ et donc $n^2+2n=23(23n'^2+44n'+21)=23K'$ qui est bien divisible par 23.
Dans les autres cas, je vous laisse faire la preuve qu'on tombe toujours sur un nombre non multiple de 23 (il y a des jours où l'on n'a rien à faire de mieux...).
Sinon, on peut aussi essayer de réfléchir. La factorisation $n^2+2n=n(n+2)$ nous indique, assez indirectement je l'avoue, que ce produit ne sera divisible par 23 que si l'un des facteurs l'est. Donc n doit être divisible par 23 (il s'écrit 23n') ou bien c'est n+2 qui l'est et dans ce cas n+2=23n', ce qui s'écrit n=23n'−2 ce que nous avions trouvé, par des moyens bien plus lourd... Dans les autres cas, le produit de deux nombres qui ne contiennent pas 23 dans leur décomposition en facteurs premiers ne peut faire apparaître ce facteur. Imaginez deux nombres A et B qui se décomposent en facteurs premiers :
$A=a^i b^j c^k$... et $B=a^{i'} b^{j'} c^{k'}$... , mais sans jamais voir apparaître le facteur premier 23.
Le produit $AB=a^{i+i'} b^{j+j'} c^{k+k'}$...... ne contient pas non plus le facteur premier 23.

f) <u>Le raisonnement par récurrence</u>
C'est une forme de raisonnement visant à démontrer une propriété portant sur *tous* les entiers à partir d'un certain rang. On commence par prouver que la propriété est vraie à partir de n_0 (initialisation). On montre ensuite que, si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour n+1 (au rang suivant, c'est l'hérédité).
► Montrer par récurrence que la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n :
$P(n)$: $1+3+\ \ldots\ +(2n-1)=n^2$. On commencera par montrer $P(1)$, puis $P(n)\Rightarrow P(n+1)$, puis on conclura.
$P(1)$: $(2\times 1-1)=1=1^2$.
Pour le plaisir, on peut aussi aller jusqu'à montrer $P(2)$: $1+(2\times 2-1)=1+3=4=2^2$.
Admettons maintenant que $P(n)$ est vrai. Montrons qu'alors $P(n+1)$ est vrai aussi :
$1+3+\ \ldots\ +(2n-1)+(2(n+1)-1)=[1+3+\ \ldots\ +(2n-1)]+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.
Conclusion : $P(1)$ est vrai, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ donc $\forall\ n\in\mathbb{N}^+$, $P(n)$ est vrai.

► Montrer par récurrence que la somme des n premiers entiers est égale à :
$P_1(n)$: $1+2+3+\ \ldots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}$.
$P_1(1)$: $1=\frac{1\times 2}{2}$. Pour le plaisir, $P_1(2)$: $1+2=3=\frac{2\times 3}{2}$.
Admettons maintenant que $P_1(n)$ est vrai. Montrons qu'alors $P_1(n+1)$ est vrai aussi :
$1+2+3+\ \ldots\ +n+(n+1)=[1+2+3+\ \ldots\ +n]+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui est précisément le résultat attendu. Conclusion : $P_1(1)$ est vrai, $P_1(n)\Rightarrow P_1(n+1)$ donc $\forall\ n\in\mathbb{N}^+$, $P_1(n)$ est vrai.

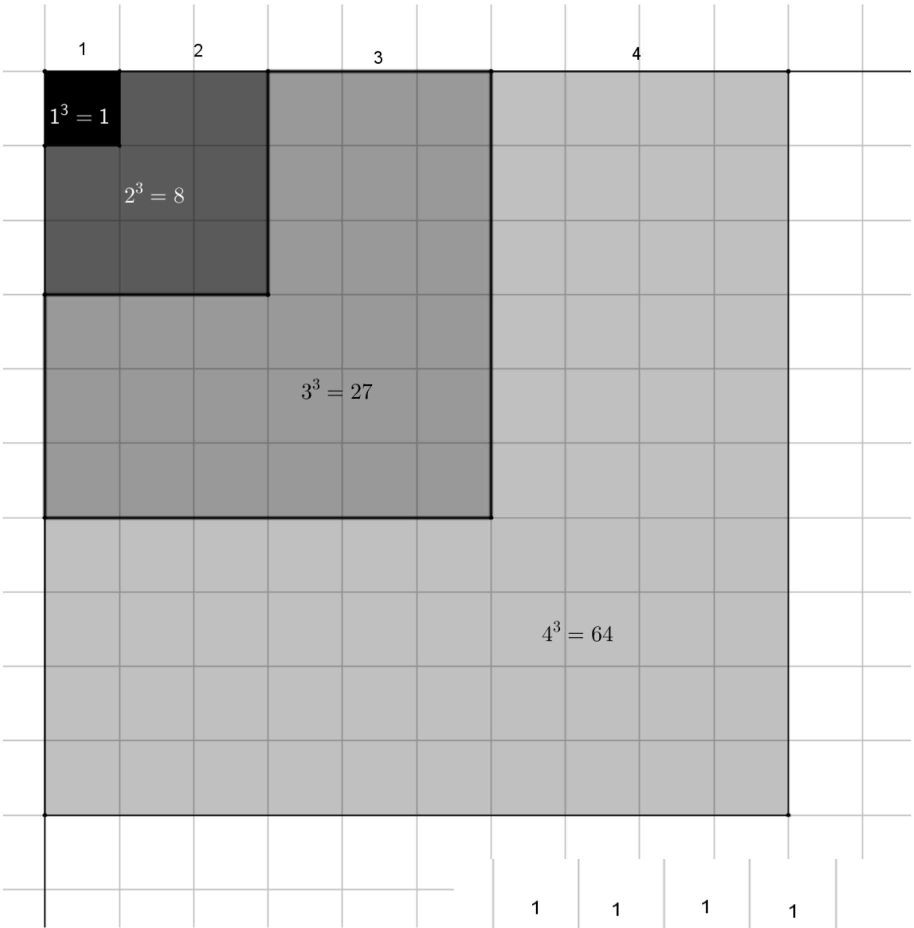
Montrer de même, par récurrence, que la somme des carrés des n premiers entiers est égale à :

$P_2(n)$: $1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$P_2(1)$: $1^2=1=\frac{1\times2\times3}{6}$. Pour le plaisir (non, vraiment on n'est pas obligé), $P_2(2)$: $1^2+2^2=5=\frac{2\times3\times5}{6}$.
Admettons maintenant que $P_2(n)$ est vrai. Montrons qu'alors $P_2(n+1)$ est vrai aussi :
$1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$,
Le facteur $n(2n+1)+6(n+1)=2n^2+n+6n+6=2n^2+7n+6$ est-il égal à $(n+2)(2(n+1)+1)$?
$(n+2)(2(n+1)+1)=(n+2)(2n+2+1)=(n+2)(2n+3)=2n^2+4n+3n+6=2n^2+7n+6$.
Et bien oui, par identification terme à terme, on comprend qu'il s'agit bien du même facteur.
$1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$ ce qui est précisément le résultat attendu.
Conclusion : $P_2(1)$ est vrai, $P_2(n)\Rightarrow P_2(n+1)$ donc $\forall\ n\in\mathbb{N}^+$, $P_2(n)$ est vrai.

Tant qu'on y est, soyons fou, montrons de même que la somme des cubes des *n* premiers entiers vaut :
$P_3(n)$: $1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
$P_3(1)$: $1^3=1=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Je vous laisse le plaisir de montrer que $P_3(2)$ est vrai aussi.
Admettons maintenant que $P_3(n)$ est vrai. Montrons qu'alors $P_3(n+1)$ l'est aussi :
$1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+(n+1)\right)=(n+1)^2\frac{n^2+4(n+1)}{4}=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$
et c'est précisément le résultat attendu.
Conclusion : $P_3(1)$ est vrai, $P_3(n)\Rightarrow P_3(n+1)$ donc $\forall\ n\in\mathbb{N}^+$, $P_3(n)$ est vrai.

Pour illustrer cette propriété étonnante, on peut faire un dessin : Les carrés construits sur les côtés égaux à 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, etc. ont pour aire $1^2=1$, $3^2=9$, $6^2=36$, $10^2=100$, etc. Pour le 1[er] carré, on a $1^3=1^2$ la relation est bien vérifiée pour n=1 ; pour le 2[ème] carré, le gnomon de côté 2 a une aire de 8, soit 2^3, on a donc $1^3+2^3=(1+2)^2$ la relation est bien vérifiée pour n=2 ; etc.
Ce qui est étonnant est que l'aire du gnomon bâti sur *n* soit égale à n^3. On le voit sur la figure (pour les premières valeurs de *n*), on l'a démontré (d'une façon indirecte certes) plus haut, mais ce n'est pas pour autant que c'est évident à saisir...



Tant qu'on y est dans les illustrations, on peut bien donner celle de la première identité qui est assez voisine de celle-ci bien que plus simple à comprendre. Il s'agit de $1+3+\ \dots\ +(2n-1)=n^2$.
Les gnomons ont, cette fois, toujours un côté égal à 1 et une aire égale à un nombre impair. La somme des nombres impairs donne donc toujours un carré.
Pour le 1[er] carré, on a $1=1^2$ la relation est bien vérifiée pour n=1 ; pour le 2[ème] carré, le gnomon de côté 1 a une aire de 3, on a donc $1+3=2^2$ la relation est bien vérifiée pour n=2 ; etc.