Chapitre 00 : Logique

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

I] Notations ensemblistes

a) Appartenance

Définition : Un ensemble E est une collection d'éléments e_i. On peut définir un ensemble *en extension*, c'est-à-dire en citant tous ces éléments, E={e_1, e_2, e_3, e_4, ..., e_n} lorsqu'on connait chaque élément. On note e $\in$ E le fait que l'objet e est un élément de E (on dit que e appartient à E) et on note e' $\notin$ E le fait que l'objet e' ne soit pas un élément de E.

Exemples: soit E l'ensemble de noms défini par E={camion, train, voiture, vélo, avion}. Cet ensemble contient 5 éléments. On peut affirmer que vélo $\in$ E ou que pieds $\notin$ E.
Soit F l'ensemble de noms français de couleurs. F est difficile à définir en extension, mais on peut ébaucher sa construction en écrivant F={bleu, rouge, vert, violet, jaune, etc.}. On peut toujours dire (en principe) si un nom appartient ou n'appartient pas à F, par exemple mauve $\in$ F et vélo $\notin$ F. Généralement on va utiliser des ensembles de nombres, voici par exemple l'ensemble S des diviseurs de 60 : S={1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60}.

Dénominations usuelles : Certains ensembles de nombres ont été définis au collège. On utilise une notation conventionnelle pour les désigner. L'ensemble des entiers naturels (positifs) est noté $\mathbb{N}$. On peut écrire $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$; celui des entiers relatifs est $\mathbb{Z}=\{...-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$. On a aussi l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (rationnels+irrationnels). Les notations $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^*$ désignent les mêmes ensembles privés du 0, par exemple $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,...\}$. Les notations $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{Z}^-$ désignent les ensembles des réels positifs et des entiers négatifs. On peut aussi parler de $\mathbb{R}_*^+$ qui contient tous les réels strictement positifs. Un autre ensemble a reçu un nom, c'est un ensemble qui ne contient aucun élément : on parle à son propos d'*ensemble vide* et on le note $\emptyset$.

Autre définition d'un ensemble : On peut définir un ensemble E *en compréhension*, c'est-à-dire en utilisant une notation telle que E={e_i $\in$ F / e_i vérifiant P} où P est une propriété que doit vérifier tous les éléments de E qui sont choisis dans un ensemble plus vaste noté F. On note parfois ceci E={e_i $\in$ F, P(e_i)} où P(e_i) est une propriété vérifiée par tout élément e_i de E.

Exemples: L'ensemble S des diviseurs de 60 peut être noté S={ $x\in\mathbb{N}$ / $60\div x\in\mathbb{N}$ }. Les ensembles P et I des nombres pairs et impairs sont définis par P={ $x\in\mathbb{N}$ / $x\div 2\in\mathbb{N}$ } et I={ $x\in\mathbb{N}$ / $x\div 2\notin\mathbb{N}$ }. Les ensembles $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^+$ peuvent être définis par { $x\in\mathbb{R}$ / $x\neq 0$ } et { $x\in\mathbb{R}$ / $x\geq 0$ }.

Intervalles : Pour des ensembles de nombres qui se suivent, on utilise souvent la notation des intervalles. Sans précision particulière sur l'ensemble des nombres utilisés, il s'agit de nombres réels. On utilise des intervalles fermés (lorsque les extrémités sont comprises dans l'intervalle), demi-ouverts ou ouverts (lorsque les extrémités ne sont pas comprises dans l'intervalle).

Exemples : $[2;3]$ est l'intervalle fermé contenant tous les réels compris entre 2 compris et 3 compris. Les notations $x\in[2;3]$ et $2\leq x\leq 3$ sont équivalentes (la 2ème notation est un encadrement). $[-1;5[$ est un intervalle semi-ouvert à droite contenant tous les réels compris entre -1 compris et 5 non compris. Les notations $x\in[-1;5[$ et $-1\leq x<5$ sont équivalentes.

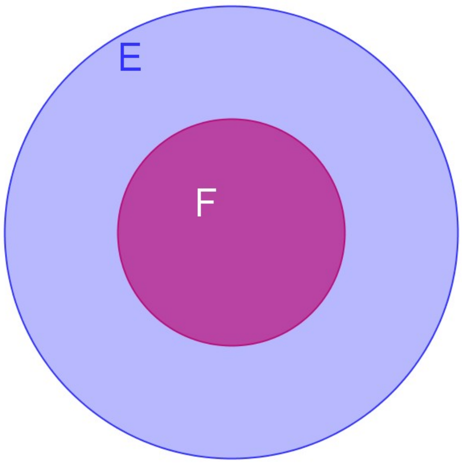
Lorsqu'on veut traduire l'inégalité $x<5$ par un intervalle, on doit utiliser l'écriture symbolique de l'infini négatif (pour des nombres infiniment petits) qui est $-\infty$. On note alors obligatoirement un l'intervalle ouvert en l'infini. L'inégalité $x<5$ se traduit donc par l'intervalle ouvert $x\in]-\infty;5[$. De même, $x\in]2;+\infty[$ traduit l'inégalité $x>2$ et $x\in[\frac{1}{2};+\infty[$ traduit l'inégalité $x\geq\frac{1}{2}$. Les ensembles $\mathbb{R}^+$ et $[0;+\infty[$ sont égaux (ils contiennent les mêmes éléments). $\mathbb{R}$ pourrait être noté $]-\infty;+\infty[$, mais cette notation n'est pas employée.

Si on veut construire des ensembles de couples, par exemple des couples de nombres $(x;y)$ désignant des coordonnées de points, en choisissant chacun des nombres dans un ensemble particulier. Si on choisit x dans E et y dans F, on parle du *produit cartésien* des ensembles E et F que l'on note E×F. Par exemple, l'axe des abscisses est une droite D dont on peut donner la définition en compréhension: D={ $(x;y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}/y=0$ }.

b) Inclusion

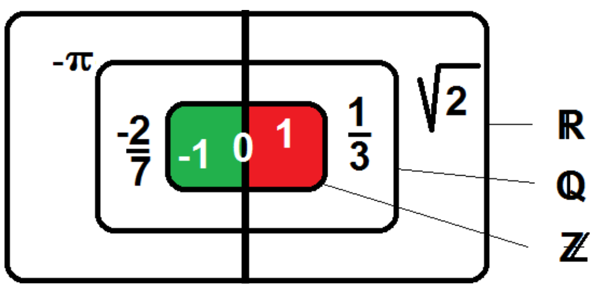
Définition : Un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F lorsque tous les éléments de E appartiennent à F, on note cela E ⊂ F.

Exemples : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ signifie que tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On a aussi $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, les ensembles de nombres sont imbriqués les uns dans les autres. L'ensemble vide est un ensemble qui est inclus dans tous les ensembles, par exemple $\emptyset\subset\mathbb{N}$. En géométrie on a de nombreuses relations d'inclusions, par exemple l'ensemble des carrés est inclus dans l'ensemble des rectangles (tous les carrés sont des rectangles), etc.



L'ensemble des *parties* de E est l'ensemble des ensembles inclus dans E. Par exemple, si E={1,2,3,4}, alors l'ensemble des parties de E est P(E)={{1,2,3,4}, {1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4},{1,2},{1,3},{1,4},{2,4},{2,3}, {3,4},{1},{2},{3},{4}, $\emptyset$ }. L'ensemble des parties de $\emptyset$ ($\emptyset$ contient 0 élément) contient donc un élément : $\emptyset$.

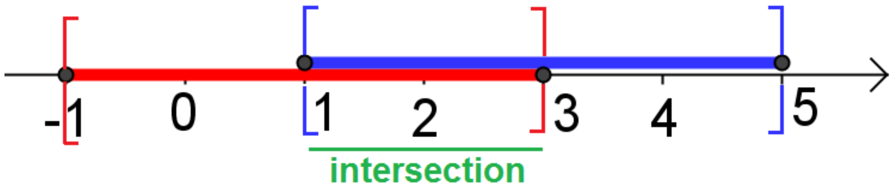
On dessine souvent les relations ensemblistes par un schéma appelé « diagramme de Venn ». Par exemple en haut, on a représenté l'inclusion de F dans E (F ⊂ E) par deux cercles concentriques, mais on pourrait dessiner des rectangles ou des formes patatoïdales (en forme de patates). En bas, on a représenté les inclusions des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ainsi que la distinction entre les parties positives et négatives. On a voulu illustrer cela en donnant pour chaque partie un exemple de nombre qu'elle contient.



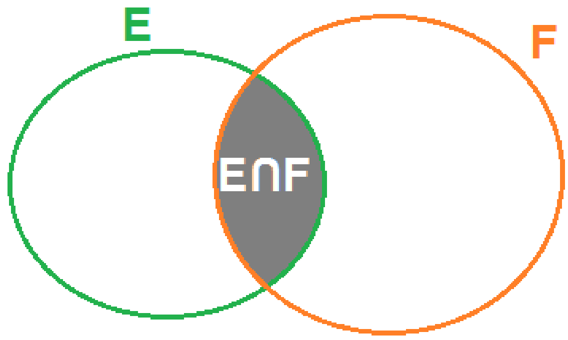
c) Intersection, réunion et complémentaire

<u>Définition</u> : Si un élément e appartient à la fois à un ensemble E et à un ensemble F, on dit qu'il appartient à l'intersection de E et de F, on note cet ensemble E ∩ F.

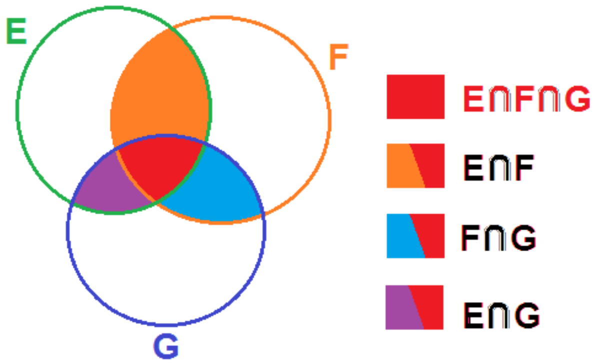
Exemples : Si E={1,2,3,4} et F={3,4,5,6} alors E ∩ F={3,4}. L'ensemble défini par $[-1;3]\cap[1;5]$ est l'intervalle $[1;3]$. Pour s'en convaincre, on aura peut-être intérêt à représenter les 2 intervalles sur une droite graduée.



L'ensemble défini par $[-1;2]\cap[2;5]$ est réduit au singleton $\{2\}$, par contre l'ensemble $]-\infty;2]\cap[5;+\infty[$ est vide. L'ensemble E= $[0;1]\cap\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1. Par exemple, $\frac{1}{2}=0{,}5$ et $\frac{89}{91}=0,\overline{978021}$ (les 6 chiffres 978021 se répètent jusqu'à l'infini) sont éléments de E alors que $\frac{\pi}{4}\approx0{,}7854$ n'en fait pas partie (car il est irrationnel), ni $\frac{11}{9}$ qui est plus grand que 1.

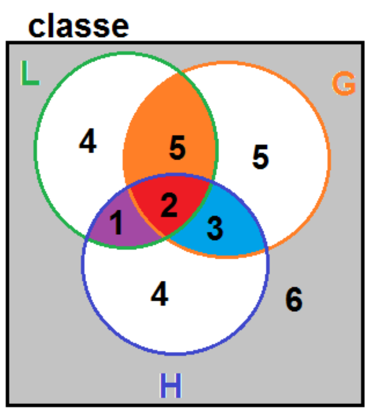


Les « diagrammes de Venn » qui représentent des ensembles qui s'interpénètrent sont particulièrement utiles dans certaines situations. E ∩ F est la partie commune aux patates représentant les ensembles E et F. Si la partie commune à 2 ensembles est vide, on dit que les ensembles sont *disjoints*. Par exemple, si E={1,2,3,4} et F={5,6,7,8} alors E et F sont disjoints et on note E ∩ F= ∅ . Si E=F alors E ∩ F=E.



Si l'on examine les intersections possibles de 3 ensembles E, F et G, on se retrouve avec, à priori, un schéma de la forme ci-contre qui contient les intersections des ensembles 2 par 2 et aussi, si elle n'est pas vide, l'intersection des 3 ensembles.

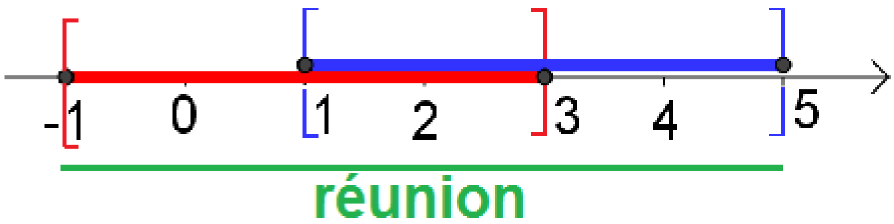
<u>Exemple</u> : les 30 élèves d'une classe peuvent choisir entre 3 options qui sont latin, grec et hébreu. 12 ont choisi le latin, 15 le grec, 10 l'hébreu, 7 ont choisi le latin et le grec, 5 le grec et l'hébreu, 3 le latin et l'hébreu. Sachant que 2 élèves ont choisi les 3 langues en option, combien n'ont pris aucune option ? Pour répondre à cette question, on rempli le schéma en partant du centre (la zone des intersections). On trouve 6 comme le montre le schéma ci-contre. Comme 3 ont choisi le latin et l'hébreu, et que parmi ceux-ci, il y a les 2 qui ont choisi les 3 langues, cela donne 1 pour ceux qui ont choisi exclusivement le latin et l'hébreu (on exclu ceux qui font latin, hébreu et grec). Etc.



Pour qu'un élément e appartienne à l'intersection de 2 ensembles E et F, il faut qu'il soit dans E **et** dans F. Nous allons maintenant examiner ce qui se passe s'il est dans E **ou** dans F :

<u>Définition</u> : Si un élément e appartient à un ensemble E ou bien à un ensemble F, ou bien encore à l'intersection E ∩ F, on dit qu'il appartient à la réunion (ou l'union) de E et de F, on note cet ensemble E ∪ F.

Exemples : Si E={1,2,3,4} et F={3,4,5,6} alors E ∪ F={1,2,3,4,5,6}. L'ensemble défini par $[-1;3]\cup[1;5]$ est l'intervalle $[-1;5]$. On a, de façon évidente $]-\infty;5]\cup[2;+\infty[=\mathbb{R}$.



Nous avons dit que pour qu'un élément e appartienne à l'union de 2 ensembles E et F, il faut qu'il soit dans E **ou** dans F : il s'agit d'un **ou** dit *inclusif* (on inclut l'intersection). Dans certaines expression de la langue courante, on utilise un ou *exclusif* (on exclu l'intersection), par exemple lorsqu'un menu propose « fromage ou dessert » on est supposé choisir un des 2, à l'exclusion de l'autre. Dans la notation ensembliste de l'union, il s'agit toujours d'un choix inclusif. Dans un algorithme, si l'on veut écrire une proposition conditionnelle avec un ou, il s'agit aussi d'un ou inclusif. Par exemple, lorsqu'on écrit *si(x>0 ou y<0)alors(P)sinonQ*, on effectuera P si x>0 (quel que soit y) ou si y<0 (quel que soit x) ou aussi bien sûr si x>0 et y<0 (condition déjà contenue dans les 2 premières). La seule façon d'avoir Q est que x≤0 et y≥0. Dans ces conditions, comment traduire le ou exclusif ? En notation ensembliste, avec la notion de *différence symétrique*, notée avec le symbole Δ. Par exemple, $x\in U\,\Delta\,V$ signifie que $x\in U\cup V$ mais que $x\notin U\cap V$.

En logique, le « ou exclusif » est souvent noté XOR (pour eXclusive OR) alors que le « ou inclusif » est noté OR, le « et » quant-à lui, est noté AND. On utilise aussi les notations suivante : $\vee$ pour le « ou inclusif », $\veebar$ pour le « ou exclusif » (peu utilisé), et $\wedge$ pour la conjonction (l'intersection) du « et ». En programmation, comme ces symboles n'existent pas sur le clavier, le « ou » (inclusif) est souvent noté | alors que le « et » est noté &, mais le « ou exclusif » n'a pas de notation particulière car il peut se traduire avec les autres symboles. Par exemple : Pour (x<0 ou$_{\text{exclusif}}$ y>0) on écrit (x<0 & y≤0)|(x≥0 & y<0).

Propriété : Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé *cardinal* de E et est noté *card* (E). La propriété suivante est toujours vérifiée : *card* (E ∪ F) = *card* (E) + *card* (F) - *card* (E ∩ F).

Dans le cas ou les ensembles E et F sont disjoints (E ∩ F= $\emptyset$, et donc *card* (E ∩ F)=0), on a évidemment *card* (E ∪ F) = *card* (E) + *card* (F).

On peut, pour conclure, définir la notion de complémentaire dans un ensemble : Si E est un ensemble inclus dans F, un élément e appartient au complémentaire de l'ensemble E dans F, s'il n'est pas dans E alors qu'il est dans F. En l'absence d'ambiguïté sur l'ensemble F, on peut omettre de mentionner F : on parle alors de *complémentaire* de E, ou de *contraire* de E.

Définition : Si un élément e appartient au complémentaire d'un ensemble E, cela signifie simplement qu'il n'appartient pas à E. On note $\overline{E}$, le complémentaire ou contraire de E.

Exemple : en probabilité, on s'intéresse souvent au contraire d'un événement E, car si on connait la probabilité de E, notée P(E), alors P($\overline{E}$)=1−P(E). Pour identifier $\overline{E}$, il suffit de considérer l'ensemble qui contient E (nous l'avions noté F) : tous les points de F qui ne sont pas dans E sont dans $\overline{E}$. Dans l'exemple sur les langues un peu plus haut, la question portait sur $\overline{L\cup G\cup H}$ l'ensemble des élèves qui n'avaient choisi aucune option alors que l'ensemble $L\cup G\cup H$ contient les élèves qui ont choisi une ou plusieurs options (1, 2 ou 3 options). Pour traiter une situation de ou$_{\text{exclusif}}$, on peut avoir recourt au contraire car A XOR B équivaut à (A AND $\overline{B}$) OR ($\overline{A}$ AND B).

II] Raisonnement logique

Une théorie mathématique commence par des définitions et des axiomes (propriétés que l'on tient pour vraies) et s'édifie grâce à des propriétés démontrées à partir de ceux-ci (théorèmes, lemmes et corollaires). Cette construction repose sur la logique qui est la science étudiant la validité d'un raisonnement. La logique est donc une partie essentielle des mathématiques. Elle s'est dotée d'un langage spécifique précis (symboles et syntaxe) pour se démarquer du langage courant et pouvoir exprimer les faits logiques sans ambiguïté.

a) Propositions et connecteurs

Définition : Une proposition est une affirmation qui peut être être vraie ou fausse.

Exemples : L'affirmation « le chat est noir » est une affirmation qui est vraie si l'on est devant un chat noir, fausse si l'on est devant un chat gris ou bicolore. Il est difficile de se prononcer sans connaître le chat dont on parle. Pareillement, l'affirmation x+1=0 est vraie si x=−1 et fausse sinon. L'affirmation x>1 est vraie pour x=2 ou pour x=π et fausse pour x=0 ou x=1. Certaines propositions peuvent être paradoxales (ni vraie ni fausse) comme cette affirmation d'une personne « je suis un menteur » car s'il ment, il dit vrai et donc n'est pas menteur et s'il dit la vérité alors c'est un mensonge et la vérité est qu'il n'est pas menteur... On écarte en général les paradoxes et toute proposition qui pourrait être autrement que vraie ou fausse.

Négation : Le *contraire* d'une proposition P est l'affirmation ¬P qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie. On dit que ¬P est la *négation* de P.

Exemples : La négation de l'affirmation « le chat est noir » est l'affirmation « le chat n'est pas noir ». La négation de x+1=0 est x+1≠0 qui est vraie quand x≠−1. La négation ou contraire de x>1 est x≤1. On illustre les différents cas qui peuvent se présenter par une table de vérité où les valeurs (vrai ou faux) sont parfois remplacées par des 0:faux et des 1:vrai. Voici la table de vérité de ¬, la négation, notre premier connecteur logique.

P	¬P
1	0
0	1

Conjonction : La *conjonction* d'une proposition P et d'une proposition Q est la proposition notée P ∧ Q qui est vraie quand P et Q sont tous les deux vraies, fausse dans tous les autres cas.

Exemples : La proposition « le chat est noir et blanc » n'est pas une conjonction car les propositions « le chat est noir » et « le chat est blanc » ne sont pas vraies simultanément. Par contre « le chat est noir et sauvage » peut être considéré comme une conjonction de 2 propriétés indépendantes et toutes les deux vraies. La conjonction de x>1 et x<5 est l'affirmation $x\in]1;5[$. La conjonction de x>1 et x<0 est l'affirmation $x\in\emptyset$ qui se comprend comme : il n'y a aucune valeur numérique qui convienne, la proposition est toujours fausse. Voici la table de vérité du connecteur $\wedge$ de la conjonction.

P	Q	P ∧ Q
1	0	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0

Disjonction (attention, ce terme peut prêter à confusion) : Le *choix inclusif* ou disjonction des propositions P et Q est la proposition notée P ∨ Q qui est fausse quand P et Q sont tous les deux fausses, et vraie dans tous les autres cas. Ce choix/disjonction correspond au *ou inclusif* de la langue (l'un ou l'autre ou les deux).

Exemples : Attention à une proposition comme celle des menus : « fromage ou dessert » qui ne correspond pas au ou inclusif car on considère généralement qu'il y a un choix à faire entre « fromage » et « dessert », il s'agit d'un ou exclusif (une forme restrictive de disjonction). En mathématiques, le ou est toujours inclusif. Par exemple, lorsqu'on écrit que si AB=0 alors A=0 ou B=0, il s'agit d'un ou inclusif. Lorsque le « ou » relie 2 propositions contradictoires, le ou inclusif revient à un ou exclusif, comme dans $x<1$ ou $x>2$ qui correspond à l'affirmation $x\in]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ qui ne peut pas être vraie quand x<1 et x>2. Mais la proposition x<1 ou

$x>0$ est vraie pour tout réel, même ceux de l'intervalle $]0;1[$ qui satisfait aux 2 conditions. Voici la table de vérité du connecteur $\vee$ de la conjonction.

P	Q	$P \vee Q$
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	1	1

Nous avons examiné dans la partie I] les notions ensemblistes qui correspondent à ces connecteurs. Nous avons en particulier vu que la négation d'une disjonction $\overline{P \vee Q}$ revient à la proposition $\overline{P} \wedge \overline{Q}$, ceci peut se montrer facilement avec les tables de vérité.

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0

Ainsi, la négation de « riche ou célèbre » est « pauvre **et** inconnu ». De façon réciproque, attention aux erreurs de logique : le contraire de « un temps chaud et humide » est, du point de vue de la logique, « un temps froid **ou** sec ». La conjonction « et » est en effet invalidée lorsqu'une des propositions est fausse (ou les deux). On peut dresser, si on veut s'en convaincre, la table de vérité de $\neg(P \wedge Q)$ et celle de $\neg P \vee \neg Q$, pour conclure que ces deux notations sont équivalentes. Ainsi on a $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ comme on a aussi $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$.

En informatique, pour gagner du temps lorsqu'on doit effectuer un grand nombre de test, par exemple pour tester si l'un des nombres x ou y est divisible par 2 on écrira la condition suivante (x%2==0||y%2==0) dans laquelle on utilise un symbole spécial || qui ne teste la 2ème condition que si la 1ère est fausse (la quantité x%2 désignant le reste dans la division euclidienne de x par 2). Remarque : cet exemple est mal choisi car alors, il suffit de tester si le produit xy est divisible par 2 car xy n'est divisible par 2 que si l'un ou l'autre des deux nombres l'est (xy%2==0).

Implication : L'*implication* $P \Rightarrow Q$ correspond à l'expression « si …. alors …. » (donc ici « si P alors Q ») et exprime la causalité (relation de cause à effet). En effet, $P \Rightarrow Q$ est vraie lorsque P étant vraie, Q est *nécessairement* vraie mais rien ne dit ce qu'il se passe quand P est fausse (Q peut être vraie ou fausse). $P \Rightarrow Q$ est fausse lorsque P étant vraie, Q est fausse aussi.

Exemples : L'affirmation « s'il pleut alors le trottoir est mouillé » est une implication. Le trottoir pourrait bien être mouillé par autre chose que de la pluie, cela n'enlève pas la vérité de cette affirmation. Très nombreux sont les exemples d'implications en mathématiques qui énonce la plupart de ses propriétés par des énoncés en « si … alors …. », c'est-à-dire par des implications. La partie directe du théorème de Pythagore « si un triangle ABC est rectangle en A alors on a $BC^2=AB^2+AC^2$ » est une implication. L'affirmation $x<0 \Rightarrow x<1$ en est une aussi qui est vraie, alors que l'affirmation $x<1 \Rightarrow x<0$ en est une également mais elle est fausse, car si $x=0{,}5$ on a bien la condition $x<1$ qui est vraie mais la conclusion $x<0$ est fausse. La table de vérité de ce connecteur est donnée ci-dessous.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	1

Règle du *modus ponens* : on peut effectuer une déduction en utilisant une implication P⇒Q, pour cela on doit s'assurer que 2 conditions sont réalisées : P⇒Q doit être vraie (il faut l'avoir prouvé) et P doit être vrai. Par exemple ABCD est un carré et on sait que carré⇒losange, on peut écrire la déduction « ABCD est donc un losange ».

Contraposée : La proposition contraposée de P⇒Q est la proposition ¬Q⇒¬P. Ces deux propositions ont la même table de vérité, elles sont donc équivalentes, c'est-à-dire que pour prouver l'une on peut prouver l'autre (si l'une des deux est vraie, l'autre est vraie). Par exemple l'implication « s'il pleut alors le trottoir est mouillé » correspond à la contraposée « si le trottoir est sec alors il ne pleut pas ». La contraposée de « si un triangle ABC est rectangle en A alors on a $BC^2=AB^2+AC^2$ » est « si $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A » (il pourrait être rectangle en B ou en C). La contraposée de « si un nombre est divisible par 6 alors il est divisible par 2 et par 3 » est « si un nombre n'est pas divisible par 2 **ou** par 3 alors il n'est pas divisible par 6 » Conséquence : s'il n'est pas divisible par 2 alors on n'a pas besoin de tester sa divisibilité par 3 pour savoir qu'il ne sera pas divisible par 6.

Exercice : On peut établir la table de vérité de la contraposée ¬Q⇒¬P et vérifier qu'elle a même valeurs que l'implication P⇒Q. Une autre façon d'écrire l'implication, en tout cas une formule qui a mêmes valeurs de vérité que l'implication est $\neg P \vee Q$ qui revient à $\neg(P \wedge \neg Q)$.

Réciproque : La proposition réciproque de P⇒Q est la proposition Q⇒P. D'une façon générale, le fait qu'une proposition soit vraie n'entraîne pas nécessairement que sa réciproque soit vraie aussi. Par exemple, carré⇒losange est vraie mais sa réciproque losange⇒carré est fausse. L'implication « s'il pleut alors le trottoir est mouillé » correspond à la réciproque « si le trottoir est mouillé alors il pleut » est fausse car le trottoir a pu être mouillé par autre chose que la pluie (un sceau d'eau). Si on sait que « tous les hommes d'affaire portent la cravate » le fait de voir quelqu'un en cravate permet-il de conclure qu'il s'agit d'un homme d'affaire ? Non, l'implication homme-d'affaire⇒cravate a une réciproque cravate⇒homme-d'affaire qui est fausse (il y a aussi les hommes politiques...). En mathématiques, l'implication est généralement asymétrique (sa réciproque est fausse), c'est le cas des relations d'inclusion : si on a $E \subset E'$ alors on aura $e \in E \Rightarrow e \in E'$ mais la réciproque $e \in E' \Rightarrow e \in E$ sera fausse, sauf dans le cas où $E = E'$.

Équivalence : Lorsqu'une proposition P⇒Q et sa réciproque Q⇒P sont toutes les deux vraies, on parle d'*équivalence* et on note alors que P⇔Q. L'équivalence est ainsi le connecteur qui indique que P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

La table de vérité de l'équivalence est la suivante.

P	Q	P⇔Q
1	0	0
1	1	1
0	0	1
0	1	0

Exemples : « un triangle ABC est rectangle en A » et « $BC^2=AB^2+AC^2$ » sont deux propositions équivalentes. Dans un autre domaine, écrire $x^2=9$ ou écrire $x \in \{3 ; -3\}$ sont deux proposition équivalentes.

Pour que deux propositions P et Q soient équivalentes, il faut qu'elles soient vraies ou fausses simultanément. Lorsque P⇔Q, on dit que P est vraie *si et seulement si* Q est vraie, en abrégé on note cela P *ssi* Q. On parle aussi de « condition nécessaire et suffisante : lorsque P⇔Q, on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q, nécessaire dans le sens que si P est vraie alors Q aussi (P⇒Q), et suffisante dans le sens que si Q est vraie alors P aussi (Q⇒P). Une condition *suffisante* pour que ABCD soit un losange est que ABCD soit un carré (car carré⇒losange) mais ce n'est pas une condition nécessaire. Une condition *nécessaire* pour que

ABCD soit un losange est que ABCD soit un parallélogramme (car losange $\Rightarrow$ parallélogramme) mais ce n'est pas une condition suffisante. Une condition *nécessaire et suffisante* pour que ABCD soit un losange est que ABCD soit un parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires. Les conditions « ABCD est un parallélogramme » et « ABCD a ses diagonales perpendiculaires » sont nécessaires et insuffisantes séparément, mais leur conjonction les rend suffisantes. Une troisième expression traduit l'équivalence « il faut et il suffit que ». Lorsque P $\Leftrightarrow$ Q, on dit ainsi que pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q soit vrai. « Il faut » exprime la condition nécessaire et « il suffit » exprime la condition suffisante. Pour prouver que 2 propositions P_1 et P_2 sont équivalentes, on doit montrer que $P_1 \Rightarrow P_2$ et $P_2 \Rightarrow P_1$ ou bien, on peut choisir de montrer que $P_1 \Rightarrow P_2$ et $\neg P_1 \Rightarrow \neg P_2$.

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
condition nécessaire	condition suffisante
il faut	il suffit
seulement si	si

<u>Exercice</u> : Dresser la table de vérité de l'équivalence P $\Leftrightarrow$ Q et celle de la formule $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{P})$ pour établir qu'il s'agit de deux formules équivalentes (on dit aussi tautologie). Une autre façon de dire l'équivalence des propositions P et Q, n'utilisant que la conjonction et la négation, est $\neg(\mathrm{P} \wedge \neg \mathrm{Q}) \wedge \neg(\mathrm{Q} \wedge \neg \mathrm{P})$. Prouver cela à l'aide d'une table de vérité.

<u>Propriétés</u> : Les connecteurs logiques ont des propriétés, comme les opérations algébriques, dont celles qui suivent, qu'on prouve facilement à l'aide des tables de vérité.

- Distributivité : $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R} \Leftrightarrow (\mathrm{P} \vee \mathrm{R}) \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$ et $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R} \Leftrightarrow (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}) \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$
- Associativité : $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R})$ et $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R})$
- Commutativité : $\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{Q} \wedge \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \vee \mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{Q} \vee \mathrm{P}$

On peut ajouter encore celle de la transitivité de l'implication $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{R}) \Rightarrow (\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{R})$.
Pour prouver que 3 propositions P, Q et R sont équivalentes, il suffit d'un *raisonnement circulaire* : P $\Rightarrow$ Q, Q $\Rightarrow$ R et R $\Rightarrow$ P. Mais rien n'empêche de procéder plus classiquement, en montrant successivement les 4 propriétés :P $\Rightarrow$ Q et Q $\Rightarrow$ P et Q $\Rightarrow$ R et R $\Rightarrow$ P.

b) <u>Quantificateurs</u>

Certaines propriétés sont vraies pour tout un ensemble d'éléments alors que d'autres sont vraies pour un individus en particulier, ou au moins pour un individus. On précise cela en logique par l'utilisation des quantificateurs universel et existentiel.

Le quantificateur universel $\forall$ est employé dans une expression comme $\forall e \in E, P(e)$ pour signifier que la propriété $P(e)$ est vraie pour tous les éléments e d'un ensemble E. On lit ceci « quelque soit e appartenant à E, la propriété $P(e)$ est vraie ».

Exemples : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une propriété vraie qui est énoncée pour tous les nombres réels, le quantificateur universel permet de préciser cela. La propriété $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \in]0;1[$ est fausse car pour $n=0$ le nombre $\frac{1}{n}$ n'est pas défini, il faudrait écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \in]0;1[$. L'égalité suivante, portant sur les distances entre 3 points du plan : $AB+BC=AC$, est vraie pour tous les points B du segments [AC], on peut donc affirmer $\forall B \in [AC], AB+BC=AC$. Pour énoncer avec un quantificateur que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle, on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=0$.

Pour prouver qu'une propriété est fausse, il suffit ainsi de donner un *contre-exemple*. Par exemple si l'on veut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n}+1$ est un nombre premier, on peut toujours donner des exemples, ainsi :
$2^{2^0}+1=2^1+1=3$ est premier , $2^{2^1}+1=2^2+1=5$ est premier , $2^{2^2}+1=2^4+1=17$ est premier , $2^{2^3}+1=2^8+1=257$ est premier et $2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$ est premier , sont des exemples de cette

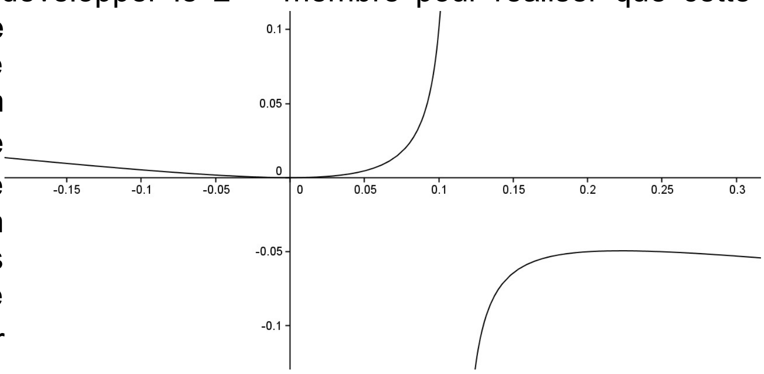
propriété qui semble donc vraie (ce n'est pourtant, à ce stade, qu'une conjecture). Mais pour $n=5$, on a $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4\,294\,967\,297$ n'est pas premier car le nombre $4\,294\,967\,297$ est composé car divisible par 641 (voir la décomposition donnée par Xcas). Ce dernier nombre contredit donc à lui seul la conjecture.

```
facteurs_premiers(4294967297 )
                                    [641, 1, 6700417, 1 ]
```

Le quantificateur existentiel $\exists$ est employé dans une expression comme $\exists e \in E, P(e)$ pour signifier que la propriété $P(e)$ est vraie pour au moins un élément e d'un ensemble E. On lit « il existe un élément e appartenant à E tel que $P(e)$ soit vraie ».

Exemples : $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{1-9x}>0$ est une propriété vraie car il suffit d'exhiber le nombre -1 par exemple, car $\frac{(-1)^2}{1-9\times(-1)}=\frac{1}{10}=0{,}1>0$.

On utilise aussi le symbole $\exists!$ (le quantificateur existentiel suivi d'un point d'exclamation) pour préciser qu'il n'existe qu'un seul exemple. On déclare ainsi l'*existence* et l'*unicité* d'un élément vérifiant une certaine propriété. L'égalité $x^2+1=(x+1)^2$ est-elle vraie pour certains nombres x ou pour tous les nombres réels ? Il suffit de développer le 2ème membre pour réaliser que cette proposition est équivalente à $x=0$. Il existe donc un nombre unique qui vérifie cette propriété. De même, l'affirmation $\exists!\, x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{1-9x}=0$ est vraie car il n'y a qu'une seule valeur réelle qui annule cette expression (c'est $x=0$). Exhiber un exemple suffit à montrer l'existence mais pour prouver l'unicité, il faut faire une étude plus poussée de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1-9x}$ (voir sa courbe ci-joint).



La négation d'une proposition avec le quantificateur universel $\forall$ d'une expression quelconque $\forall e \in E, P(e)$ est $\exists e \in E, \neg P(e)$. Par exemple, le contraire de « tous les dauphins sont gris » est « il existe au moins un dauphin qui n'est pas gris ».

Certains mots de la langue sont trompeurs. Nous avons déjà parlé de ou qui peut avoir deux sens (inclusif ou exclusif) mais le mot indéfini « un » a aussi plusieurs sens : lorsqu'on dit « Trace un cercle C » on parle d'un seul cercle, lorsqu'on dit « un cercle est une courbe fermée » on parle de tous les cercles, lorsqu'on dit « tous les élèves ont tracé un cercle sur leur feuille? » on parle d'au moins un cercle (certains ont pu en tracer plusieurs) et lorsqu'on dit « repasse en gras un cercle de la feuille? » il s'agit d'un cercle parmi d'autres. Il faut donc comprendre, selon le contexte, le sens des mots employés. Par exemple, lorsqu'on demande l'équation $x^2-1=0$ a t-elle une solution ? Il faut évidemment comprendre qu'on demande s'il en existe au moins une. La réponse est donc oui (il en existe deux qui sont 1 et -1) mais si on croit que la question est « existe t-il une seule solution ? » on va vouloir répondre non. Pour lever l'ambiguïté, on pourra demander « existe t-il au moins une seule solution ? » On remarquera que le même problème peut se rencontrer avec d'autres mots indéfinis : « l'équation $x-1=0$ a t-elle des solutions ? » l'emploi du pluriel ici n'est pas vraiment indiqué mais on s'attend à une réponse affirmative, même s'il n'y en a qu'une. L'affirmation « une équation à une inconnue du second degré a toujours deux solutions, parfois confondues et parfois complexes » n'est pas fausse, mais encore faut-il savoir ce qu'est un nombre complexe (par exemple, i et $-i$ sont les solutions de l'équation $x^2=-1$) et encore faut-il accepter que parfois 2=1 (les 2 solutions sont confondues en une seule, comme dans $x^2+2x+1=0$ qui a une seule solution $x=-1$)...

c) Démonstrations

Le *syllogisme* est un mode de raisonnement bien connu. L'exemple le plus connu étant « tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme donc Socrate est mortel » Une propriété P est vraie pour tout les éléments d'un ensemble. Les éléments d'une partie de cet ensemble vérifie donc nécessairement cette propriété P. Attention à ce mode de raisonnement qui peut cacher des fautes comme dans « Toutes les choses rares sont chères, or un cheval bon marché est rare, donc un cheval bon marché est cher »! Le syllogisme appartient davantage au vocabulaire de la philosophie que des mathématiques. En mathématiques, on utilisera plutôt la règle du *modus ponens* : on peut effectuer une déduction en utilisant une implication P$\Rightarrow$Q qui a été prouvée et le fait que P soit vrai.

Nous avons déjà montré qu'un *contre-exemple* permet d'invalider une proposition. C'est la façon la plus simple d'apporter une preuve : on exhibe un contre-exemple d'une propriété P, cela prouve la propriété ¬P. Un bel exemple de ce type de raisonnement est donné par Euclide qui prouve par l'absurde qu'il y a un nombre infini de nombres premiers : il suppose qu'il y en a un nombre fini, noté N. Il construit un nombre premier N' supérieur à N en prenant le nombre $N'=2\times3\times5\times7\times11\times13\times...\times N+1$ qui n'est divisible par aucun des N premiers nombres premiers. Comme il arrive à une conclusion qui contredit l'hypothèse de départ, c'est que celle-ci est fausse.

Le *raisonnement par l'absurde* est souvent utilisé en mathématiques : on part d'une hypothèse (proposition supposée vraie) et on déroule une chaîne déductive, en utilisant des propriétés qui sont supposées démontrées précédemment (lemmes) et en arrivant à une conclusion qui contredit l'hypothèse. Celle-ci doit donc être fausse (sinon le résultat ne serait pas contradictoire). On arrive ainsi à prouver le contraire de l'hypothèse. Une des plus célèbres démonstrations, encore due à Euclide, montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Il part de l'hypothèse : $\sqrt{2}$ est rationnel. Il a donc une écriture irréductible de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres premiers entre eux (aucun diviseur en commun à part 1). Le carré de $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ étant $2=\frac{a^2}{b^2}$, il en déduit que $a^2=2b^2$ et donc que a^2 est pair. Un 2^ème^ lemme est utilisé : si a^2 est pair alors a est pair (c'est facile à montrer). On peut donc écrire que $a=2a'$ où a' est un entier. Mais alors $a^2=2b^2$ s'écrit $2b^2=(2a')^2=4a'^2$ et donc $b^2=2a'^2$, ce qui, d'après le 2^ème^ lemme revient à dire que b est pair aussi. L'hypothèse suppose que la fraction $\frac{a}{b}$ était irréductible et la conclusion est qu'on peut simplifier la fraction par 2. Il faut donc renoncer à cette hypothèse et admettre que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Le raisonnement par *disjonction des cas* est une autre méthode de démonstration : on traite séparément des cas qui s'excluent mutuellement et dont la réunion forme l'ensemble de tous les possibles. Par exemple, montrons que si n est un entier, alors le produit P=n(n+1) est pair. On peut séparer les cas n est pair et n est impair. Dans le 1er cas n=2n' et le produit P=2n'(2n'+1)=2[n'(2n'+1)]=2N qui est donc pair. Dans le 2d cas n=2n'+1 et le produit P=(2n'+1)(2n'+2)=2[(2n'+1)(n'+1)]=2N qui est donc pair aussi. Comme les 2 cas forment tout l'ensemble des possibles, la propriété est vraie. De la même façon, si on veut prouver que pour un entier quelconque supérieur à 0 le produit P=n(n+1)(n+2) est un multiple de 3, on peut séparer 3 cas : n=3k (n est un multiple de 3 donc P aussi), n=3k+1 (n+2 est un multiple de 3 donc P aussi) et n=3k+2 (n+1 est un multiple de 3 donc P aussi) et conclure que, comme on est forcément dans un des 3 cas et que dans chaque cas la proposition est vraie, on doit en conclure que la proposition est toujours vraie. La proposition « tout nombre entier supérieur à 2 est de la forme 4k±1 » est facile à prouver si on envisage les 4 cas possibles : n=4k, n=4k+1, n=4k+2 et n=4k+3. Attention, il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante, 15 par exemple n'est pas premier alors qu'il est de la forme 4k-1. De même, on montrera que « tout nombre entier supérieur à 3 est de la forme 6k±1 » en distinguant 6 cas (il s'agit encore d'une condition nécessaire mais non suffisante).