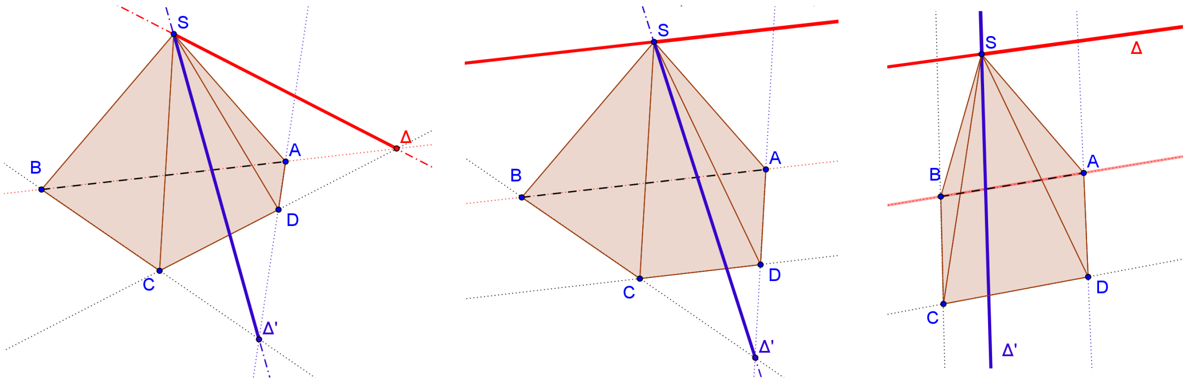
2^de	TD n°1 sur l'espace : intersections de plans et droites

CORRECTION

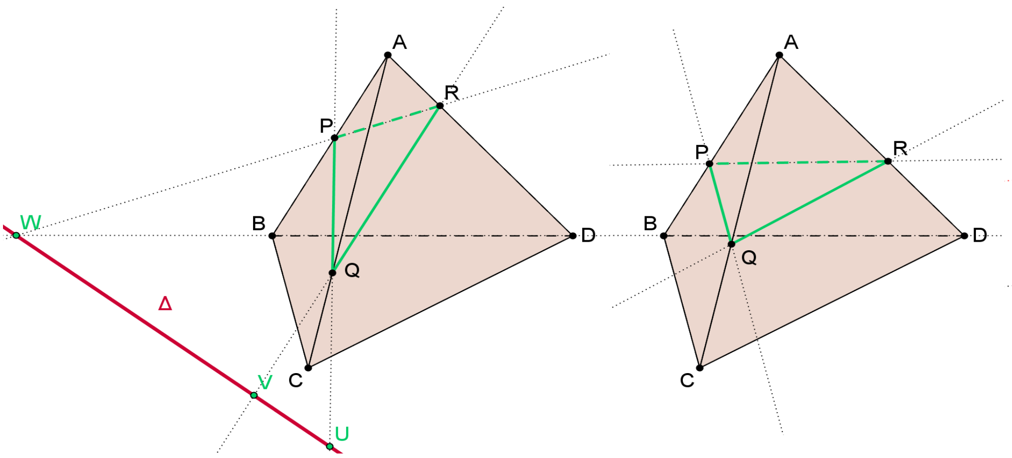
1) Intersection de deux plans

a) Les figures ci-dessous représente une pyramide *SABCD* dont la base est un quadrilatère.
Construire en rouge l'intersection Δ de (*SAB*) et (*SCD*) et en bleu l'intersection Δ' de (*SBC*) et (*SAD*), dans les trois cas suivants : *ABCD* est (1) un quadrilatère quelconque (2) un trapèze (3) un parallélogramme.



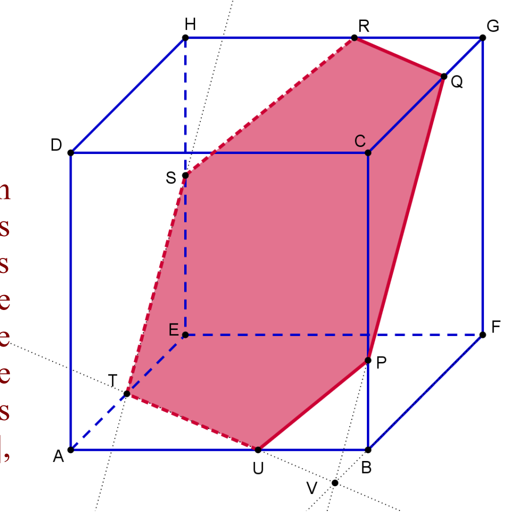
La construction est aisée dans le cas général : on trace l'intersection de (*AB*) et (*CD*) que l'on joint avec *S* pour Δ, et l'intersection de (*AD*) et (*BC*) que l'on joint avec *S* pour Δ'.
Lorsque (*AB*) // (*CD*), on trace la droite parallèle à (*AB*) passant par *S* (voir le théorème du toit).
On fait de même lorsque c'est (*AD*) // (*BC*).

b) Un tétraèdre *ABCD* est coupé par un plan (*PQR*), *P* étant sur l'arête [*AB*], *Q* étant sur l'arête [*AC*] et *R* étant sur l'arête [*AD*]. Construire l'intersection Δ de (*BCD*) et (*PQR*) sur la figure de gauche, *P* et *R* sur celle de droite où Δ est tracée. Sur la figure centrale, construire *P* et *R* de sorte que Δ n'existe pas.



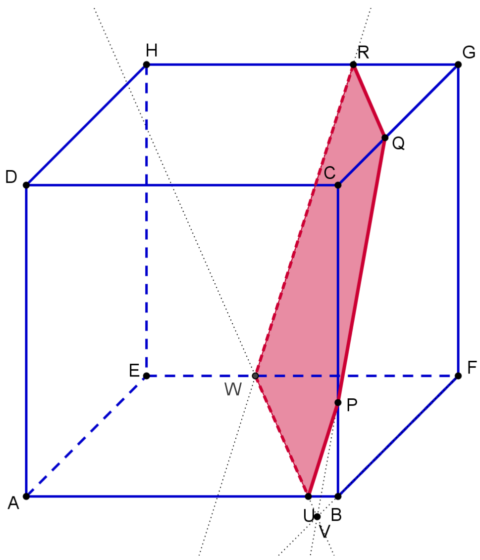
La construction est aisée dans le cas général : pour tracer Δ, on trace *U* l'intersection de (*BC*) et (*PQ*) et *V* l'intersection de (*CD*) et (*QR*). On peut aussi tracer *W* l'intersection de (*BD*) et (*PR*), mais ce n'est pas nécessaire car les points *U*, *V* et *W* sont sur Δ, donc il suffit de placer deux de ces points pour tracer Δ.

c) Un cube *ABCDEFGH* est coupé par un plan (*PQR*), *P* étant sur l'arête [*BC*], *Q* étant sur l'arête [*CG*] et *R* étant sur l'arête [*GH*]. Construire la trace du plan (*PQR*) sur les faces du cube dans les deux cas suivants.
__Indication__ : Deux plans P et P' étant parallèles, un 3^ème plan coupant P selon une droite D coupera P' selon une droite D'//D.



Ici, nous avons un cube, et par conséquent les plans des faces opposées sont parallèles On peut donc appliquer la propriété ci-dessus sachant que, sur la représentation en perspective cavalière, les droites parallèles sont représentées parallèles.
Dans le 1^er cas, la section du cube par le plan (*PQR*) est un hexagone. Pour placer *V*, le point du plan (*PQR*) qui est à la fois sur les faces de droite et de dessous du cube, nous avons prolongé (*PQ*) et (*BF*), sur sur la face de droite. Pour placer *T*, le point du plan (*PQR*) qui est à la fois sur les faces de gauche et de dessous du cube, nous avons tracé la parallèle à (*RQ*) qui passe par *V*, selon l'indication donnée (les faces du dessus et du dessous sont parallèles). De même, nous avons placé *S* sur l'arête [*HE*],

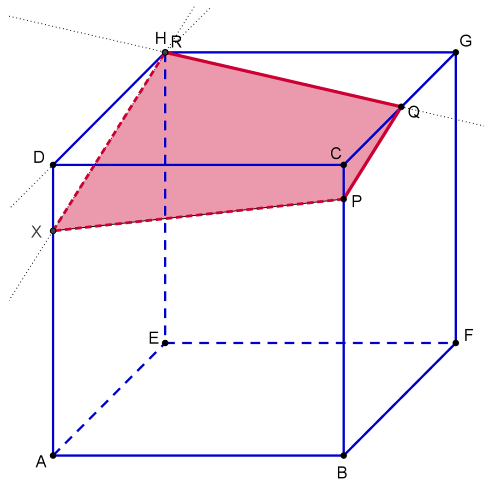
en traçant la parallèle à (PU) qui passe par R, selon l'indication donnée (les faces du devant et du derrière étant parallèles).



En géométrie dans l'espace, comme souvent, il y a bien d'autres façons de faire, ne soyez donc pas étonné d'y arriver autrement.

Dans le 2ème cas, la section du cube par le plan (PQR) est un pentagone. La face de gauche n'est pas traversée par ce plan, il n'y a donc plus les points S et T. Par contre, le plan traverse l'arête [EF] en un point noté W.

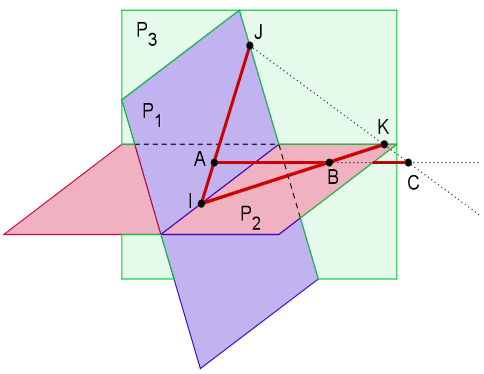
Remarque : dans cette configuration, le plan (PQR) peut aussi couper le cube selon un quadrilatère ou un triangle, à condition de déplacer les points P, Q ou R jusqu'aux sommets du cube.

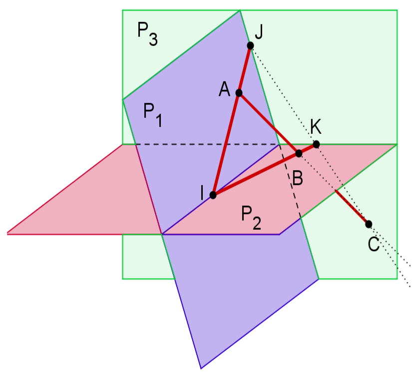


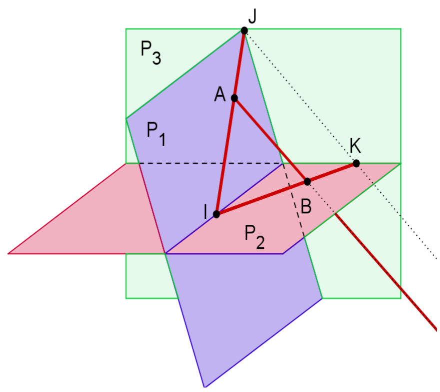
Dans cette figure additionnelle, nous avons fait coïncider *R et H* : la section du plan (PQR) avec les faces du cube est alors un quadrilatère. Vous pourriez faire coïncider alors *Q et P* : la section du plan (PQR) avec les faces du cube serait alors un triangle.

2) intersection d'une droite et d'un plan

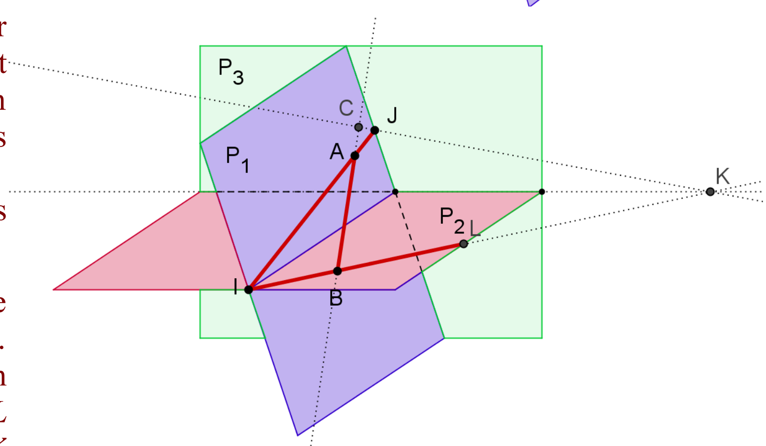
a) Trois plans P_1, P_2, et P_3 sont deux à deux sécants. A est sur P_1, B est sur P_2.
Construire, s'il existe, le point C d'intersection de la droite (AB) et du plan P_3.
Indication : la construction d'un point se réalise par intersection de deux droites. On peut placer un point I quelque part sur $P_1 \cap P_2$ *puis tracer (IA) et (IB) pour déterminer l'intersection de (IAB) et de* P_3*. Le point C est sur cette droite et sur (AB).*



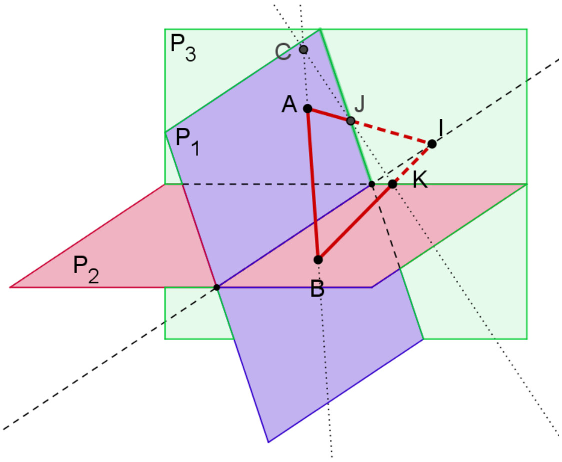




On place un point I n'importe où sur l'intersection de P_1 et P_2, et on trace (IA) et (IB). Ces droites sécantes définissent un plan qui coupe P_3 en J et K. Le point C est alors l'intersection de (AB) et (IK).
Si (AB) est parallèle à P_3 alors C n'existe pas bien sûr (figure de droite).



Employons la méthode n°1 pour construire le point C dans le cas de la figure de droite. Même en repoussant le point I le plus loin possible, la droite (IB) sort du plan P_2 en L pour percer le plan P_3 beaucoup plus loin (en K toujours).
Pour trouver le point C sans sortir des plans tracés, il suffit de placer I a un endroit plus approprié, par exemple derrière le plan P_3, en prolongeant $P_1 \cap P_2$ (voir ci-dessous).

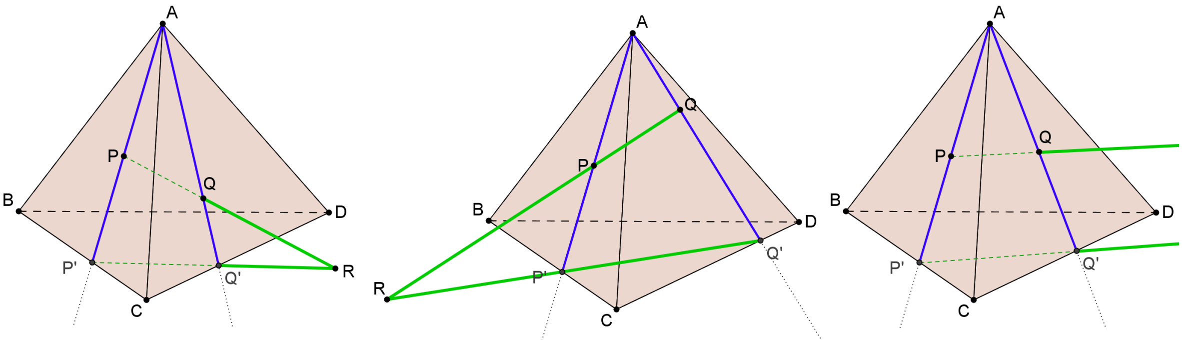


b) Les points P et Q appartiennent aux faces ABC et ACD d'un tétraèdre $ABCD$. Construire le point R d'intersection de la droite (PQ) et du plan (BCD). À droite, R est un point de la face ABD. Construire l'intersection du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre.

Indication : Tracer l'intersection de (PQ) avec (BCD), puis de (RQ) avec (BCD).

Cela permet de construire l'intersection de (PQR) avec (BCD). De là, le reste s'en déduit.

On trace l'intersection du plan (APQ) avec la face (BCD) du tétraèdre, en traçant les intersections P' et Q' de (AP) et (AQ) avec, respectivement, (BC) et (CD). Il suffit alors de tracer l'intersection R de (PQ) et $(P'Q')$. Si (PQ) est parallèle à (BCD) alors R n'existe pas, bien sûr.

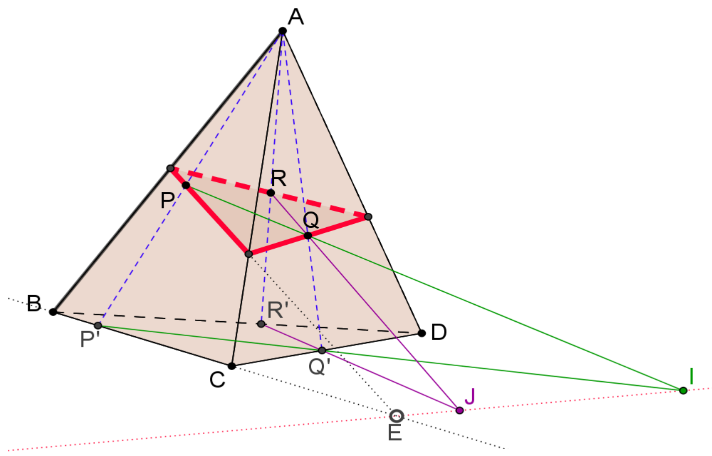


Dans la figure de droite, on applique cette méthode pour tracer deux des points suivants :

- l'intersection I de (PQ) avec la face (BCD) du tétraèdre (en vert)
- l'intersection J de (RQ) avec la face (BCD) du tétraèdre (en violet)
- l'intersection K de (PR) avec la face (BCD) du tétraèdre (non tracé sur ma figure)

On peut alors tracer la droite $\Delta=(IJ)=(IK)=(JK)$ qui est l'intersection du plan (PQR) avec la face (BCD) du tétraèdre.

À partir cette droite Δ, on retrouve les traces cherchées du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre : j'ai prolongé (BC) jusqu'à Δ de manière à trouver le point E de (PQR) qui est dans la face ABC, comme le point P. En traçant (EP), j'obtiens la trace de (PQR) sur la face ABC. Il n'y a plus qu'à poursuivre ensuite le tracé (en rouge) pour trouver les deux autres intersections du plan (PQR) avec les faces du tétraèdre.

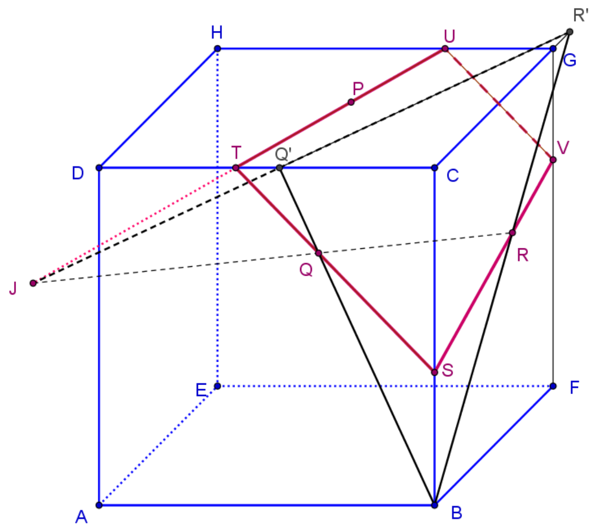


c) Un cube $ABCDEFGH$ est coupé par un plan (PQR), P étant sur la face DCG, Q étant sur la face ABC et R étant sur la face BCG.

On demande de construire la trace du plan (PQR) sur les faces du cube dans le cas ci-contre.

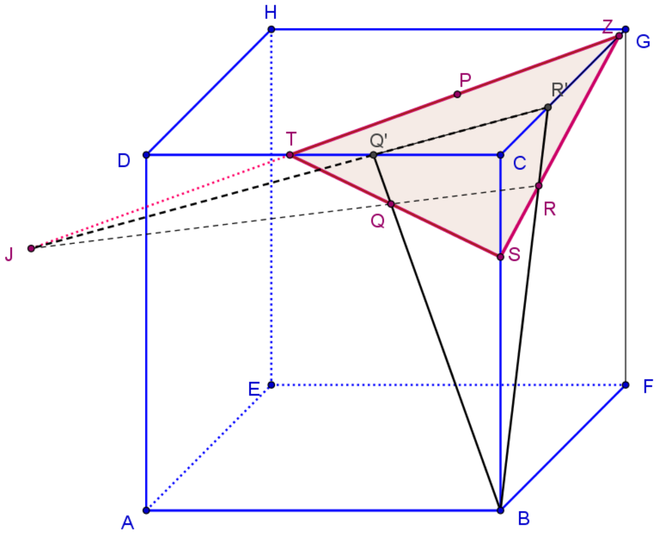
Indication : construire, avec la méthode vue à la question a), l'intersection de la droite (QR) et du plan (DCG) : on doit choisir un point I sur [BC] et tracer l'intersection de (IQR) et (DCG)...

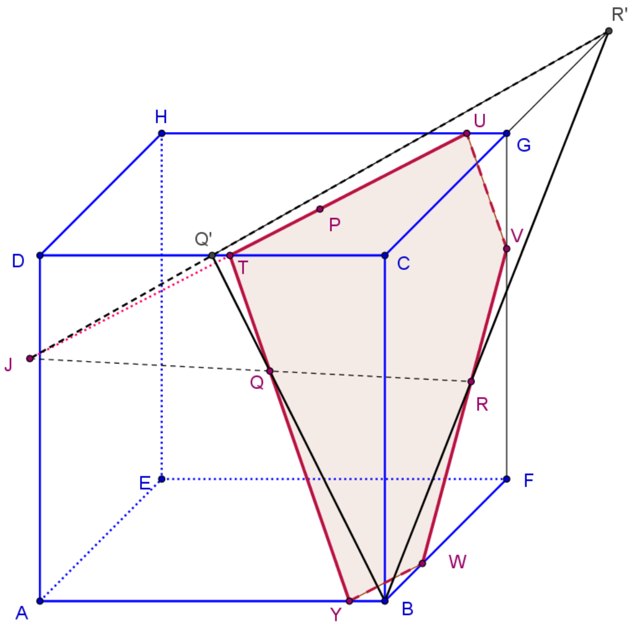
La droite (QR), qui appartient au plan (BQR), coupe le plan (DCG) sur cette droite en un point J. Déterminer J, puis tracer (PJ) qui est la trace du plan (PQR) sur la



face supérieure du cube. Le reste suit aisément.

On choisit comme point I sur $[BC]$ le point B (pourquoi pas?). On trace alors l'intersection de (IQR) et (DCG) : la droite $(Q'R')$ qui coupe (QR) en J. Comme J est sur la face DCG et dans le plan (PQR), comme P, on trace (JP) qui donne la trace cherchée sur DCG *(en rouge)*. Le reste suit : on place T, on trace (TQ) qui donne S. On trace (SR) qui donne V ou Z selon l'arête du cube qu'elle coupe.





Notez que la trace obtenue dépend énormément de la position de P, Q et R. C'est normal, vous me direz ! Mais la construction est robuste : si vous déplacez un des points, vous allez changer l'emplacement des points d'intersection. Peut-être que le plan (PQR) ne coupera pas les mêmes arêtes, peut-être qu'il ne coupera pas le cube selon un quadrilatère. Ce peut-être aussi un triangle, un pentagone ou un hexagone.