DS n°5 : les fonctions de référence

CORRECTION

I] Polynôme du 2^d degré

On se propose d'étudier la fonction *f* définie par $f(x)=2x^2-6x-1$.

a) Écrire *f*(*x*) sous la forme $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.

On a $f(x)=2x^2-6x-1=2(x^2-3x-\frac{1}{2})=2((x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2})=2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-\frac{2}{4})=2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{4})$, soit $f(x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$, ce qui est la forme canonique voulue avec $\alpha=2$; $\beta=\frac{3}{2}=1{,}5$; $\gamma=\frac{-11}{2}=-5{,}5$.

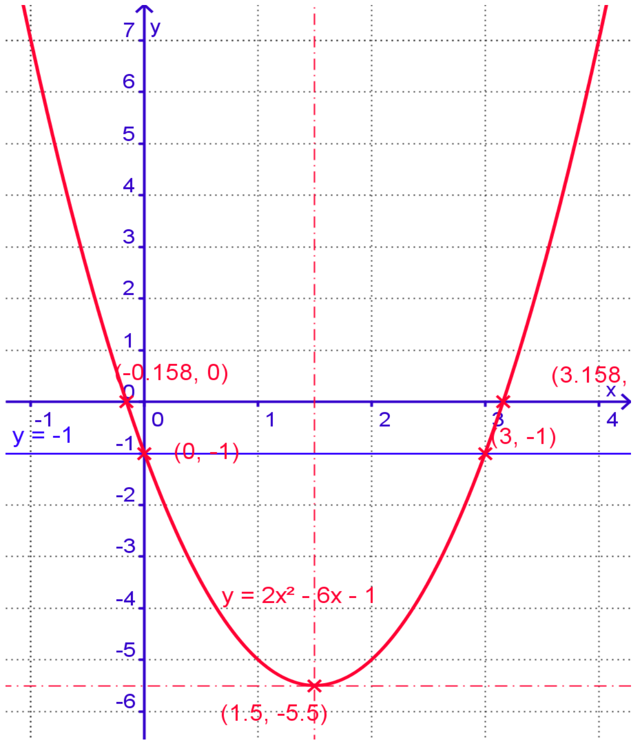
En déduire que *f* admet un minimum y_0 atteint pour une valeur x_0 de *x* à déterminer.

$f(x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$, mais $\forall x\in\mathbb{R}, (x-\frac{3}{2})^2\geq 0$ (avec l'égalité quand on a $x-\frac{3}{2}=0$) et donc $\forall x\in\mathbb{R}, (x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}\geq\frac{-11}{2}$ soit, $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq\frac{-11}{2}$ ce qui est une autre façon de dire que $y_0=\frac{-11}{2}$ est un minimum, atteint lorsque l'égalité de cette inégalité au sens large est atteinte, c'est-à-dire pour une valeur x_0 de *x* telle que $x_0-\frac{3}{2}=0$, ou encore pour $x_0=\frac{3}{2}$.

b) Déterminer le taux d'accroissement τ de *f* entre deux valeurs de x puis le sens de variation de *f* sur les intervalles $]-\infty\ ;x_0]$ et $[x_0;\ +\infty[$. Tracer alors le tableau de variation de *f*.

On peut retrouver facilement le taux d'accroissement τ par le calcul, ou utiliser la forme générale vue en cours ($\tau=\alpha(x_1-\beta+x_2-\beta)$. Ici, on a $\tau=2(x_1-\frac{3}{2}+x_2-\frac{3}{2})$. On peut aussi écrire que $\tau=2(x_1+x_2-3)$ ou même que $\tau=2(x_1+x_2)-6$ mais ces formes n'apportent qu'une simplification apparente, inutile.

Pour $x_1\leq\frac{3}{2}$ et $x_2\leq\frac{3}{2}$, on a $x_1-\frac{3}{2}\leq 0$ et $x_2-\frac{3}{2}\leq 0$, et si $x_1\neq x_2$ l'un des deux nombres au moins n'est pas nul. Donc, par addition, $x_1-\frac{3}{2}+x_2-\frac{3}{2}<0$. En multipliant par $2>0$, on obtient $2(x_1-\frac{3}{2}+x_2-\frac{3}{2})<0$. Le taux d'accroissement τ étant négatif strictement, la fonction *f* est strictement décroissante sur cet intervalle.



Les trinômes qui admettent un minimum ont un tableau de variation toujours identique :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-11}{2}$	↗

c) Factoriser $f(x)$ sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ où *a*, x_1 et x_2 sont des nombres à déterminer.

On a

$f(x)=2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{4})=2(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2})(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2})$,

ce qui est la forme factorisée voulue avec

$a=2$; $x_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{3-\sqrt{11}}{2}\approx-0{,}158$; $x_2=\frac{3+\sqrt{11}}{2}\approx 3{,}158$.

À quoi correspondent les nombres x_1 et x_2 ?

Les nombres x_1 et x_2 correspondent aux abscisses des points où la courbe de *f* coupe l'axe des abscisses. Ce sont aussi les valeurs de la variable *x* pour lesquelles *f*(*x*) change de signe.

d) Déterminer les images de -1 et de 4 par *f* puis tracer la courbe représentant *f* sur l'intervalle $[-1\ ;4]$.

$f(-1)=2(-1)^2-6\times(-1)-1=2+6-1=7$ et $f(4)=2(4)^2-6\times(4)-1=32-24-1=7$.

Voir la courbe plus haut. On y retrouve le minimum, l'axe de symétrie vertical qui passe par ce point, les autres points dont on a déjà calculé les coordonnées (intersections avec des droites).

II] Fonction homographique

La fonction g est définie par $g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$.

a) Déterminer la valeur interdite x_0 pour la fonction g et l'ensemble de définition D_g de cette fonction.

On peut calculer $\frac{2x-1}{x+1}$ pour toutes les valeurs réelles de x sauf pour $x+1=0$, il faut donc que $x\neq-1$.
L'ensemble de définition D_g est $]-\infty\ ;-1[\cup]-1\ ;+\infty[$, cet ensemble peut aussi se noter $\mathbb{R}-\{-1\}$.

b) Écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.

$\frac{2x*1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$ ce qui est bien la forme canonique voulue avec $\alpha=2, \beta=-3, \gamma=-1$.

c) Déterminer le taux d'accroissement τ de g entre deux valeurs de x.
Étudier le signe de τ sur chacun des intervalles de D_g.

L'exercice a été fait plusieurs fois, on en a conclu que, d'une façon générale, à partir de la forme canonique rappelée plus haut, on a $\tau=\frac{-\beta}{(x_1-\gamma)(x_2-\gamma)}$. Donc ici, $\tau=\frac{3}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

Ce nombre τ est strictement positif quels que soient les nombres $x_1\in]-1\ ;+\infty[$ et $x_2\in]-1\ ;+\infty[$ (les deux facteurs (x_1+1) et (x_2+1) sont alors positifs), la fonction g est strictement croissante sur $]-1\ ;+\infty[$.
De même, pour des nombres $x_1\in]-\infty\ ;-1[$ et $x_2\in]-\infty\ ;-1[$ (les deux facteurs (x_1+1) et (x_2+1) sont négatifs). La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty\ ;-1[$.

d) Donner le tableau de variation de g avec les valeurs limites quand on s'approche de l'infini et de x_0.

Nous avons déduit le sens de variation de g du signe de τ.
On peut donc dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

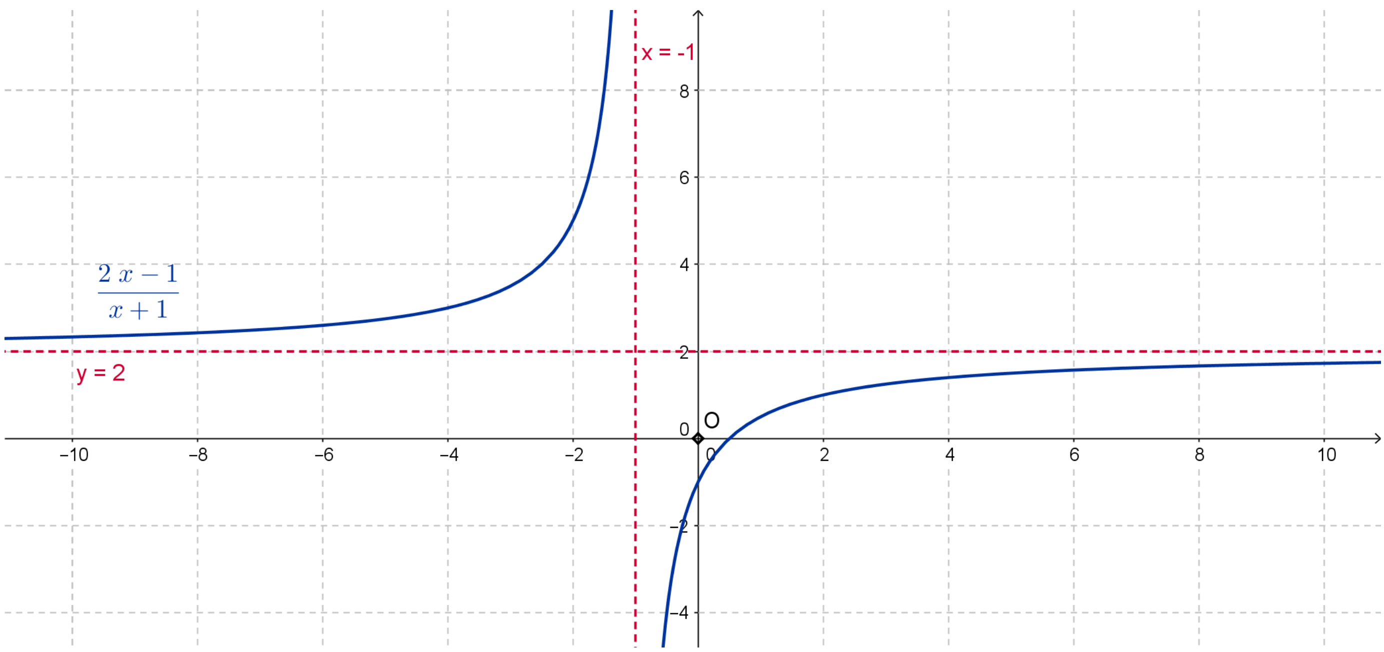
Pour des valeurs positives très grandes, le dénominateur $x+1$ est très grand, $\frac{3}{x+1}$ est alors très petit, il s'approche de 0. Et donc $2-\frac{3}{x+1}$ s'approche de 2. De même pour des valeurs infiniment petite négativement... Pour les valeurs proches de la valeur interdite -1, le nombre $g(x)$ s'approche de l'infini (positif ou négatif selon les cas).

e) Déterminer les équations des asymptotes (droites vers lesquelles se rapproche la courbe de g aux bornes de son ensemble de définition) à la courbe de la fonction g, puis tracer la courbe de g sur $[-10\ ;10]$ ainsi que ses asymptotes.

Il y a deux asymptotes :

- la verticale correspond à la valeur interdite ; son équation est $x=-1$.
- l'horizontale correspond à la valeur α de la forme canonique ; son équation est $y=2$.

Les asymptotes sont tracées en pointillés rouge. La courbe de g est en bleu.



III] Valeur absolue

La fonction h est définie par $h(x)=h_1(x)-h_2(x)$, avec $h_1(x)=|x+1|$ et $h_2(x)=|1-2x|$.

a) Écrire les expressions $|x+1|$, $|1-2x|$ et $|x+1|-|1-2x|$ sans les barres de valeur absolue, en précisant le domaine de validité de chacune des expressions (présenter les résultats dans un tableau).

Nous pouvons distinguer 3 cas selon la valeur de x.

$x+1>0$ pour $x>-1$ et $1-2x>0$ pour $x<\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$\lvert 1-2x\rvert$		$1-2x$		$1-2x$	0	$-1+2x$	
$\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert$		$-x-1-(1-2x)=-2+x$		$x+1-(1-2x)=3x$		$x+1-(-1+2x)=2-x$	

b) Donner le tableau de variation de h à partir des résultats du premier tableau.

Sur les deux premiers intervalles, les expressions affines sont croissantes (car le coefficient de x est positif), puis sur le derniers intervalle, l'expression affines est décroissante.

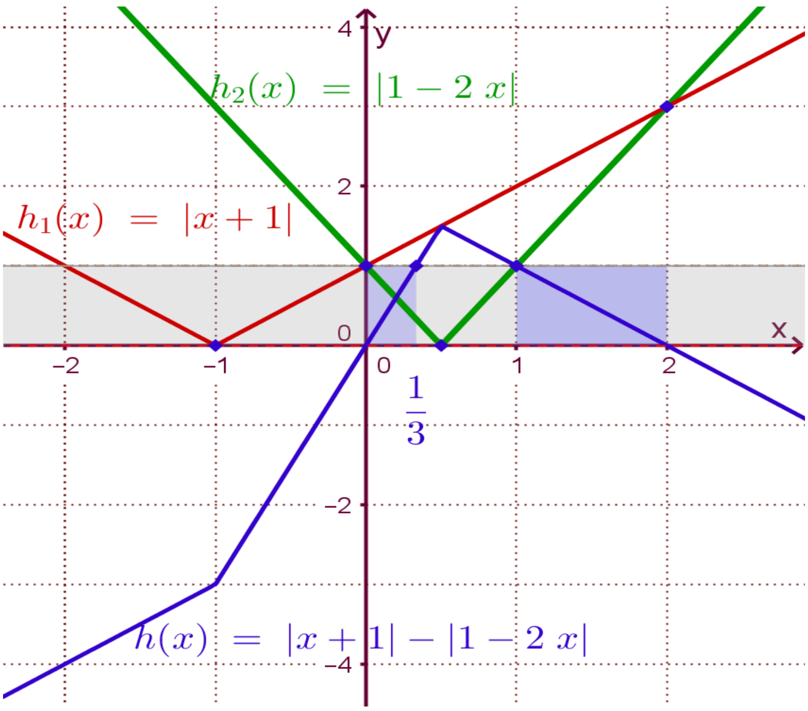
x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h(x)=\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert$		$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

Montrer que h admet un maximum Max atteint pour une valeur x_{Max} à déterminer.

La fonction h est croissante jusqu'à $x=\frac{1}{2}$ puis décroissante, donc h admet un maximum $Max=h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ atteint pour la valeur $x_{Max}=x=\frac{1}{2}$.

c)Tracer la courbe de h sur $[-2\,;2]$ ainsi que les courbes des fonctions h_1 et h_2.

Voici (à droite) en bleu la courbe de h, en rouge celle de h_1 et en vert celle de h_2.



Pour les tracer, il suffit de prendre les points déterminés précédemment, et si besoin, les expressions algébriques (sans les valeurs absolues).

Par exemple, le segment intermédiaire de la courbe de h joint les points de coordonnées $(-1\,;-3)$ et $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, d'après le tableau. À gauche et à droite de ce segment, les droites ont une pente égale à 1 ou -1 ce qui aide beaucoup la construction, lorsqu'on la fait à la main.

d) Résoudre graphiquement l'équation $h(x)=1$, vérifier algébriquement les résultats.

Graphiquement, on voit que l'équation $h(x)=1$ a deux solutions réelles : une égale à 1 et l'autre environ égale à 0,3. Cette dernière valeur mérite d'être précisée par le calcul algébrique.

Il s'agit du domaine intermédiaire, où $-1<x<\frac{1}{2}$ et l'équation s'écrit alors $3x=1$.

La solution est donc $\frac{1}{3}\approx 0{,}333$ et non 0,3. Les deux solutions sont donc $\frac{1}{3}$ et 1.

e) Résoudre l'inéquation $0<h(x)\leq 1$.

Pour $x<-1$, on a $0<-2+x\leq 1$, soit $2<x\leq 3$, ce qui ne convient pas.

Pour $-1<x<\frac{1}{2}$, on a $0<3x\leq 1$, soit $0<x\leq\frac{1}{3}$, ce qui convient.

Pour $x>\frac{1}{2}$, on a $0<2-x\leq 1$, soit $-2<-x\leq -1$, et donc $2>x\geq 1$ ce qui convient aussi.

Finalement on a trouvé que $0<x\leq\frac{1}{3}$ ou $1\leq x<2$. Il faut donc que $x\in\left]0\,;\frac{1}{3}\right]\cup[1\,;2[$.

Les valeurs qui conviennent sont les abscisses des points situés dans la bande grisée, en enlevant les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses (car on veut 0<h(x)).

IIII] Problème

Une réaction enzymatique peut se symboliser par le schéma suivant : $S \xrightarrow{E} P$ qui se lit : « le substrat S est transformé par l'enzyme E en un produit P ». Quantitativement, on décrit l'évolution d'une telle réaction par la vitesse de réaction initiale $V(x)$, où x est la concentration en substrat S (notée habituellement $[S]$). On peut considérer que cette vitesse suit la relation suivante, dite équation de Michaelis-Menten : $V(x)=V_{max}\times\frac{x}{K_M+x}$ où V_{max} et K_M sont des constantes strictement positives. Comme $x\geq 0$ (il s'agit d'une concentration), on étudie V sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Biologiquement, on doit avoir $V(x)\geq 0$, et pour $x=0$ (pas de substrat), la vitesse de réaction est nulle ($V(0)=0$). La courbe d'équation $y=V(x)$ présente une asymptote d'équation $y=V_{max}$. La constante V_{max} est donc la vitesse initiale maximale de la réaction ; elle correspond à une situation saturée en substrat). La constante de Michaelis K_M est, quant-à elle, égale à la concentration en substrat pour une vitesse égale à $\frac{V_{max}}{2}$.

a) Montrer que V est une fonction homographique de x et que l'on peut écrire $V(x)=V_{max}-\frac{\lambda}{K_M+x}$ où λ est une constante positive à déterminer. En déduire que la fonction V est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

La forme donnée est de la forme standard pour une fonction homographique : $V(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, avec $a=V_{max}, b=0, c=1, d=K_M$. Le coefficient c est bien différent de 0 et la quantité $ad-bc=V_{max}\times K_M$ aussi puisque c'est le produit de deux constantes strictement positives.

$V(x)=V_{max}\times\frac{x}{K_M+x}=\frac{V_{max}(K_M+x)-V_{max}\times K_M}{K_M+x}=V_{max}-\frac{V_{max}\times K_M}{K_M+x}$, on a donc la forme cherchée, qui, soit dit en passant, est la forme canonique, avec $\lambda=V_{max}\times K_M$.

Le taux d'accroissement de la fonction V est $\tau=\frac{V_{max}\times K_M}{(K_M+x_1)(K_M+x_2)}$.

Ce nombre est strictement positif quels que soient les nombres $x_1\in[0\ ;\ +\infty[$ et $x_2\in[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction V est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) Pour déterminer expérimentalement K_M et V_{max}, on procédait historiquement à des mesures donnant quelques points, puis on effectuait un ajustement linéaire de ces points. Montrer que $\frac{1}{V(x)}=\frac{K_M}{V_{max}}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{V_{max}}$, et en déduire que la représentation de $Y=\frac{1}{V(x)}$ en fonction de $X=\frac{1}{x}$ est une droite. Quelle est la pente de cette droite, quelle est son ordonnée à l'origine et quelle est l'abscisse X_0 du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses ?

$\frac{1}{V(x)}=\frac{K_M+x}{V_{max}\times x}=\frac{K_M}{V_{max}\times x}+\frac{x}{V_{max}\times x}=\frac{K_M}{V_{max}}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{V_{max}}$.

En remplaçant $\frac{1}{V(x)}$ par Y et $\frac{1}{x}$ par X, cela donne $Y=\frac{K_M}{V_{max}}\times X+\frac{1}{V_{max}}$, c'est-à-dire une expression de la forme $Y=AX+B$, une équation de droite, où A est la pente de cette droite ($A=\frac{K_M}{V_{max}}$) et B est l'ordonnée à l'origine de cette droite ($B=\frac{1}{V_{max}}$). L'abscisse X_0 du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est le nombre $\frac{-B}{A}$, soit $X_0=\frac{\frac{-1}{V_{max}}}{\frac{K_M}{V_{max}}}=\frac{-1}{V_{max}}\times\frac{V_{max}}{K_M}=\frac{-1}{K_M}$.

c) On a effectué des mesures pour une enzyme (la pepsine) qui conduisent aux estimations de l'ordonnée à l'origine : 2 s et de X_0 : $-3300\quad M^{-1}$. En déduire les valeurs de K_M et V_{max} correspondantes (on ne se préoccupera pas des unités ici).

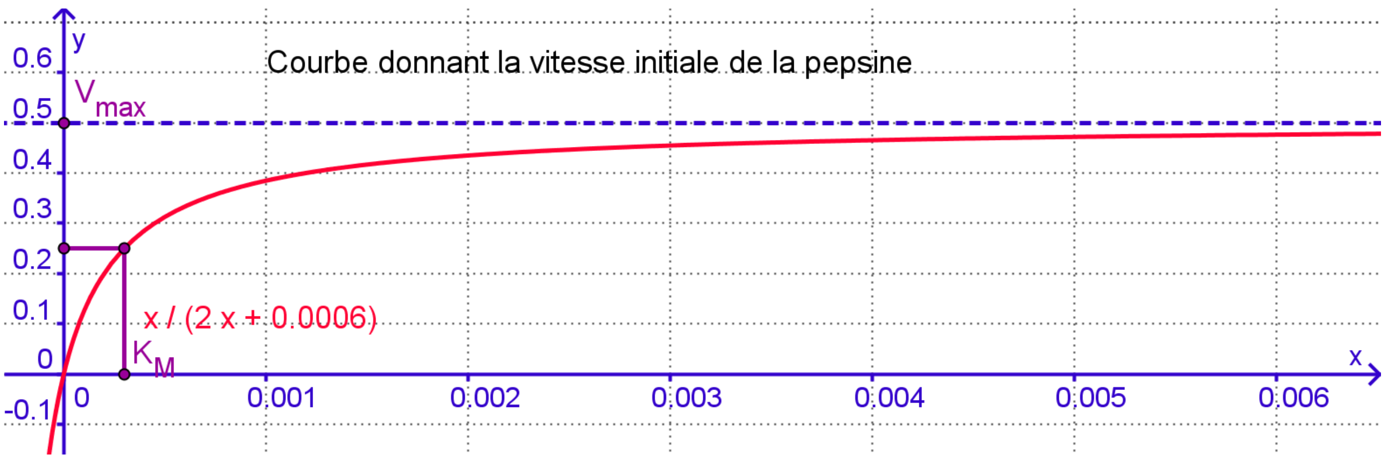
$X_0=\frac{-1}{K_M}=-3300$, donc $K_M=\frac{-1}{-3300}=\frac{1}{3300}\approx 3{,}0\times 10^{-4}$.

$B=\frac{1}{V_{max}}=2$, donc $V_{max}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

d) Donner l'expression de la vitesse de réaction initiale $V(x)$ pour la pepsine, puis tracer la courbe donnant cette vitesse en fonction de la concentration en substrat pour $x\in[0\ ;\ 2\times K_M]$.

Pour la pepsine $V(x)=V_{max}\times\frac{x}{K_M+x}=0{,}5\times\frac{x}{x+0{,}0003}=\frac{x}{2x+0{,}0006}$.

Traçons la courbe de V pour $x\in[0\ ;\ 0{,}0006]$.



Vous en voulez d'autres ?

1. *Le sujet II du DM est extrait de ce DS de l'an dernier (vous pouvez le faire à double titre, pour vous entraîner au DS et pour le DM).*
2. *Deux problèmes concernant les paraboles :*

Parabole, droite et point

Soit Γ la parabole d'équation $y=x^2$. On note M un point de Γ d'abscisse $m\neq 0$. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M coupe celui-ci en H. La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par M coupe celui-ci en K.

a) Exprimer en fonction de m les coordonnées de M, H et K.

$M(m\,;m^2)$, $H(m\,;0)$ et $K(0\,;m^2)$.

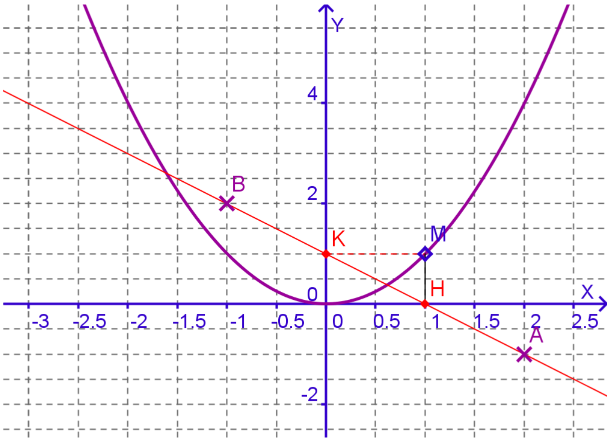
b) Exprimer en fonction de m l'équation de la droite (HK).

L'équation de la droite (HK) est de la forme $y=ax+b$, où $b=m^2$ (ordonnée à l'origine) et $\frac{-b}{a}=m$ (abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des x), soit $a=\frac{-b}{m}=\frac{-m^2}{m}=-m$. On aurait aussi pu calculer le taux de variation (pente) $a=\frac{y_K-y_H}{x_K-x_H}=\frac{m^2-0}{0-m}=-m$. Finalement ($HK$) a pour équation $y=-mx+m^2$.

c) Comment choisir m pour que la droite (HK) passe par le point $A(2;-1)$?

Pour que la droite (HK) passe par le point $A(2;-1)$ il faut que $-1=-m\times 2+m^2$ et donc que $m^2-2m+1=0$, soit $(m-1)^2=0$ ou encore $m=1$. Le point M doit avoir pour coordonnées (1;1).

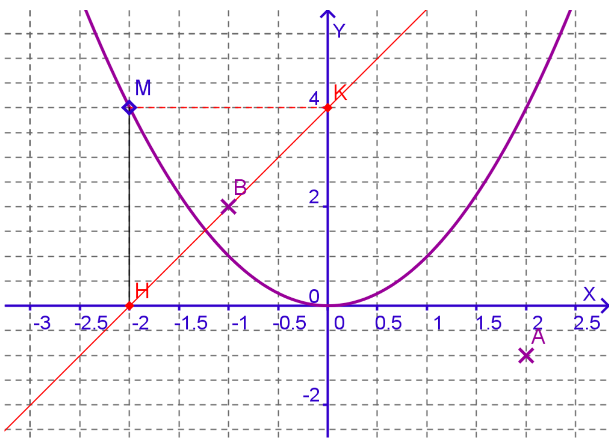
La droite (HK) passe t-elle alors par le point $B(-1;2)$?



L'équation de la droite (HK) est maintenant $y=-x+1$ (car m vaut 1). Il suffit, donc de vérifier que les coordonnées de B vérifient cette équation : $-(-1)+1=1+1=2$. La figure ci-dessous nous confirme, si besoin est, le passage de la droite en question par les points A et B.

d) Comment choisir m pour que la droite (HK) passe par le point $B(-1;2)$ sans passer par le point A ?1)

Cette question semble bien difficile... Que pouvons-nous faire sinon traduire cela avec les coordonnées : l'équation de la droite est toujours $y=-mx+m^2$, et nous voulons passer par B. Il faut donc avoir $2=-m\times(-1)+m^2=m+m^2$, soit $m^2+m-2=0$ ou encore (c'est devenu une seconde nature) $(m+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-2=0$ ou aussi, après calcul, $(m+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}=0$ et finalement $(m+\frac{1}{2}-\frac{3}{2})(m+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})=0$ qui se simplifie en $(m-1)(m+2)=0$. On retrouve donc la valeur 1 (droite passant par B et A), et on découvre l'autre valeur de m qui nous fait passer par B mais pas par A : m= -2. L'équation de la droite (HK) est maintenant $y=2x+4$ (car m vaut -2). Vérifiez le passage par B et pas par A si vous le voulez (ce n'était pas demandé), la figure nous montre cette droite.



Parabole passant par 3 points

On estime qu'une parabole Γ passe par les 3 points $A(3\,;4)$, $B(1\,;-6)$ et $C(-1\,;0)$.

a) Écrire le système de 3 équations en a, b et c qui traduit l'appartenance des points A, B et C à Γ.

Comme on doit avoir $a x^2+b x+c=y$ pour tous les points de coordonnées (*x;y*) de Γ, cela donne pour *A* : $9a+3b+c=4$, pour *B* : $a+b+c=-6$ et pour *C* : $a-b+c=0$. On a donc le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 4 & (L_1) \\ a + b + c = -6 & (L_2) \\ a - b + c = 0 & (L_3) \end{cases}$$

b) Résoudre ce système. En déduire l'équation de la parabole Γ.

Gardons L_2 (la ligne 2) inchangée pour le calcul de *c*. Supprimer *c* dans les autres équations en effectuant les transformations $L_1-L_2 \to L_1$ et $L_3-L_2 \to L_3$.

Cela conduit à :

$$\begin{cases} 8a + 2b = 10 & (L_1) \\ a + b + c = -6 & (L_2) \\ -2b = 6 & (L_3) \end{cases}$$

On voit alors que L_3 permet de déterminer *b*, de là on déterminera *a* avec L_1 et c avec L_2.

$$\begin{cases} a = \frac{10-2\times(-3)}{8}=\frac{16}{8}=2 & (L_1) \\ c = -6-2-(-3)=-5 & (L_2) \\ b = \frac{-6}{2}=-3 & (L_3) \end{cases}$$

L'équation de la parabole Γ est donc avoir $2x^2-3x-5=y$.

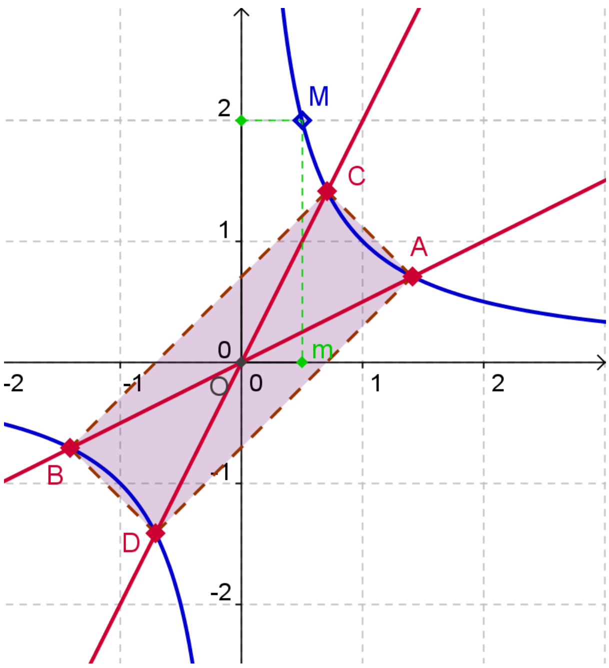
Vérifions : $2\times9-3\times3-5=18-9-5=4$; $2-3-5=-6$; $2+3-5=0$.

c) Appliquer votre équation pour déterminer l'ordonnée du point *D* de Γ d'abscisse 5.

$2\times25-3\times5-5=50-15-5=30$. Le point *D* de Γ d'abscisse 5 a pour coordonnées (5 ; 30).

3. *Un dernier problème concernant une hyperbole (courbe d'une fonction homographique) :*

Hyperbole et quadrilatère



Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$. On note *M* un point de $\mathscr{H}$ de coordonnées $(m;\frac{1}{m})$ avec $m\neq0$. Soient D_1 et D_2 les droites d'équations $y=mx$ et $y=\frac{1}{m}x$. La droite D_1 coupe $\mathscr{H}$ en *A* et *B*. La droite D_2 coupe $\mathscr{H}$ en *C* et *D*.

a) Sur notre illustration, on a pris $m=\frac{1}{2}$. Tracer D_1 et D_2.

b) Placer *A*, *B*, *C* et *D* et déterminer les coordonnées de ces points.

Pour $\mathscr{H}$ et D_1 : $y=mx=\frac{1}{x}$ et donc, comme $x\neq0$ et $m\neq0$, $x^2=\frac{1}{m}$. Si $m>0$, $x=\frac{1}{\sqrt{m}}$ ou $x=\frac{-1}{\sqrt{m}}$, ce qui conduit aux 2 points $A(\frac{1}{\sqrt{m}};\sqrt{m})$ et $B(\frac{-1}{\sqrt{m}};-\sqrt{m})$. Si $m<0$, le problème n'a pas de solution.

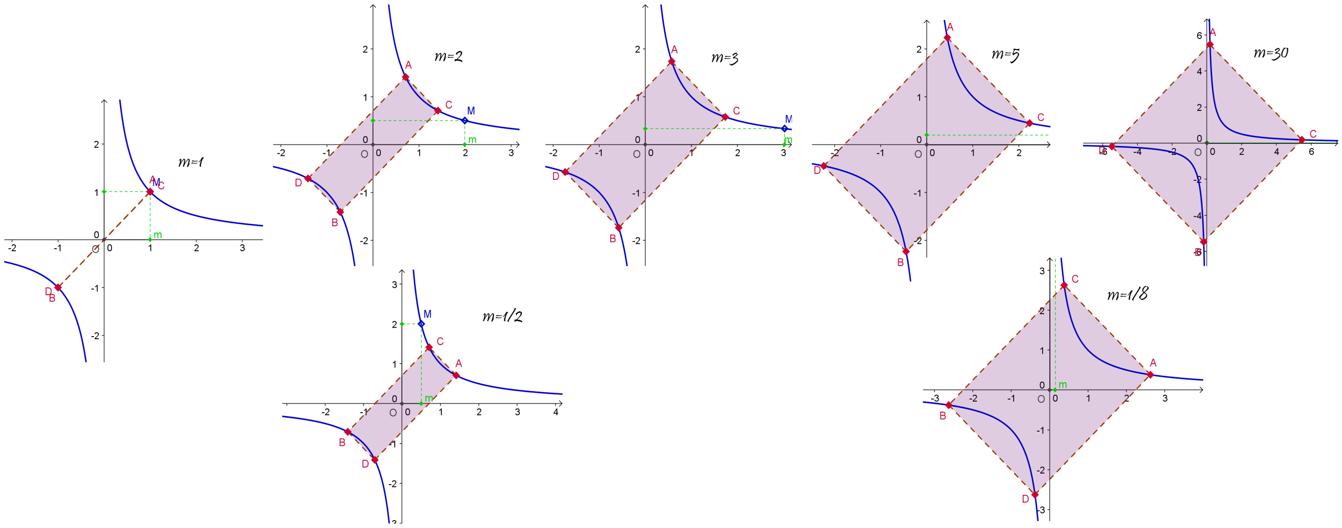
Pour $\mathscr{H}$ et D_2 : $y=\frac{1}{m}\times x=\frac{1}{x}$ et donc, comme $x\neq0$ et $m\neq0$, $x^2=m$. Si $m>0$, $x=\sqrt{m}$ ou $x=-\sqrt{m}$, ce qui conduit aux 2 points $C(\sqrt{m};\frac{1}{\sqrt{m}})$ et $D(-\sqrt{m};-\frac{1}{\sqrt{m}})$.

c) Quelle semble être la nature du quadrilatère *ACBD* ?

Le quadrilatère *ACBD* est un rectangle car [*AB*] et [*CD*] ont, d'une part, le même milieu *O* (ces points sont symétriques par rapport à *O*, suite à l'imparité de la fonction inverse), et d'autre part, la même longueur : $OA^2=OB^2=OC^2=OD^2=(\frac{1}{\sqrt{m}})^2+(\sqrt{m})^2=\frac{1}{m}+m$ *(les signes des nombres n'importent pas car on en prend le carré, et l'ordre des termes de la somme n'importe pas non plus).*

Est-ce un cas particulier lié au choix de *m* ou bien est-ce une propriété générale? (Justifier votre réponse)

C'est une propriété générale bien sûr. Pour s'en apercevoir, il suffit de faire les calculs comme nous l'avons fait avec *m* et non avec la valeur particulière $m=\frac{1}{2}$. Pour illustrer cette propriété générale voici plusieurs rectangles associés à quelques valeurs particulières de *m*.



On peut remarquer quelques autres caractéristiques de la situation : les rectangles sont d'autant plus allongés qu'on se rapproche de la valeur m=1. Pour des valeurs inverses de m on se trouve avec des rectangles de même forme (par exemple pour m=2 et pour $m=\frac{1}{2}$). Pour des valeurs de m infiniment grandes ou proche de 0, on obtient un carré. Tout cela reste à démontrer, c'est juste une conjecture fondée sur l'observation...