DS n°5 : les fonctions de référence — *Sujet et compléments pour s'entraîner*

I] Polynôme du 2d degré

On se propose d'étudier la fonction *f* définie par $f(x)=2x^2-6x-1$.

a) Écrire *f*(*x*) sous la forme $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.
En déduire que *f* admet un minimum y_0 atteint pour une valeur x_0 de *x* à déterminer.

b) Déterminer le taux d'accroissement τ de *f* entre deux valeurs de x puis le sens de variation de *f* sur les intervalles] $-\infty$; x_0] et [x_0 ; $-\infty$ [. Tracer alors le tableau de variation de *f*.

c) Factoriser $f(x)$ sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ où *a*, x_1 et x_2 sont des nombres à déterminer.
À quoi correspondent les nombres x_1 et x_2 ?

d) Déterminer les images de -1 et de 4 par *f* puis tracer la courbe représentant *f* sur l'intervalle [-1 ;4].

II] Fonction homographique

La fonction *g* est définie par $g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$.

a) Déterminer la valeur interdite x_0 pour la fonction *g* et l'ensemble de définition D_g de cette fonction.

b) Écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.

c) Déterminer le taux d'accroissement τ de *g* entre deux valeurs de x .
Étudier le signe de τ sur chacun des intervalles de D_g.

d) Donner le tableau de variation de *g* avec les valeurs limites quand on s'approche de l'infini et de x_0.

e) Déterminer les équations des asymptotes (droites vers lesquelles se rapproche la courbe de *g* aux bornes de son ensemble de définition) à la courbe de la fonction *g*, puis tracer la courbe de *g* sur [-10 ;10] ainsi que ses asymptotes.

III] Valeur absolue

La fonction *h* est définie par $h(x)=h_1(x)-h_2(x)$, avec $h_1(x)=|x+1|$ et $h_2(x)=|1-2x|$.

a) Écrire les expressions $|x+1|$, $|1-2x|$ et $|x+1|-|1-2x|$ sans les barres de valeur absolue, en précisant le domaine de validité de chacune des expressions (présenter les résultats dans un tableau).

b) Donner le tableau de variation de *h* à partir des résultats du premier tableau.
Montrer que *h* admet un maximum *Max* atteint pour une valeur x_{Max} à déterminer.

c) Tracer la courbe de *h* sur [-2 ;2] ainsi que les courbes des fonctions h_1 et h_2.

d) Résoudre graphiquement l'équation $h(x)=1$, vérifier algébriquement les résultats.
Résoudre l'inéquation $0<h(x)\leq 1$.

IV] Problème

Une réaction enzymatique peut se symboliser par le schéma suivant : $S\xrightarrow{E}P$ qui se lit : « le substrat *S* est transformé par l’enzyme *E* en un produit *P* ». Quantitativement, on décrit l’évolution d’une telle réaction par la vitesse de réaction initiale $V(x)$, où x est la concentration en substrat *S* (notée habituellement $[S]$). On peut considérer que cette vitesse suit la relation suivante, dite équation de Michaelis-Menten : $V(x)=V_{max}\times\frac{x}{K_M+x}$ où V_{max} et K_M sont des constantes strictement positives. Comme $x\geq 0$ (il s'agit d'une concentration), on étudie *V* sur l’intervalle $[0\ ;+\infty[$. Biologiquement, on doit avoir $V(x)\geq 0$, et pour $x=0$ (pas de substrat), la vitesse de réaction est nulle ($V(0)=0$). La courbe d'équation $y=V(x)$ présente une asymptote d’équation $y=V_{max}$. La constante V_{max} est donc la vitesse initiale maximale de la réaction ; elle correspond à une situation saturée en substrat). La constante de Michaelis K_M est, quant-à elle, égale à la concentration en substrat pour une vitesse égale à $\frac{V_{max}}{2}$.

a) Montrer que *V* est une fonction homographique de *x* et que l'on peut écrire $V(x)=V_{max}-\frac{\lambda}{K_M+x}$ où λ est une constante positive à déterminer. En déduire que la fonction *V* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Pour déterminer expérimentalement K_M et V_{max} , on procédait historiquement à des mesures donnant quelques points, puis on effectuait un ajustement linéaire de ces points. Montrer que $\frac{1}{V(x)}=\frac{K_M}{V_{max}}\times\frac{1}{x}+\frac{1}{V_{max}}$, et

en déduire que la représentation de $Y=\frac{1}{V(x)}$ en fonction de $X=\frac{1}{x}$ est une droite. Quelle est la pente de cette droite, quelle est son ordonnée à l'origine et quelle est l'abscisse X_0 du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses ?
c) On a effectué des mesures pour une enzyme (la pepsine) qui conduisent aux estimations de l'ordonnée à l'origine : 2 s et de X_0 : $-3300 \quad M^{-1}$. En déduire les valeurs de K_M et V_{max} correspondantes (on ne se préoccupera pas des unités ici).
d) Donner l'expression de la vitesse de réaction initiale $V(x)$ pour la pepsine, puis tracer la courbe donnant cette vitesse en fonction de la concentration en substrat pour $x \in [0 \; ; 2 \times K_M]$.

Vous en voulez d'autres ?

1. *Le sujet II du DM est extrait de ce DS de l'an dernier (vous pouvez le faire à double titre, pour vous entraîner au DS et pour le DM).*
2. *Deux problèmes concernant les paraboles :*

Parabole, droite et point

Soit Γ la parabole d'équation $y=x^2$. On note M un point de Γ d'abscisse $m\neq 0$. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M coupe celui-ci en H. La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par M coupe celui-ci en K.
a) Exprimer en fonction de m les coordonnées de M, H et K.
b) Exprimer en fonction de m l'équation de la droite (HK).
c) Comment choisir m pour que la droite (HK) passe par le point $A(2;-1)$?
La droite (HK) passe t-elle alors par le point $B(-1;2)$?
d) Comment choisir m pour que la droite (HK) passe par le point $B(-1;2)$ sans passer par le point A ?

Parabole passant par 3 points

On estime qu'une parabole Γ passe par les 3 points $A(3\,;4)$, $B(1\,;-6)$ et $C(-1\,;0)$.
a) Écrire le système de 3 équations en a, b et c qui traduit l'appartenance des points A, B et C à Γ.
b) Résoudre ce système. En déduire l'équation de la parabole Γ.
c) Appliquer votre équation pour déterminer l'ordonnée du point D de Γ d'abscisse 5.

3. *Un dernier problème concernant une hyperbole (courbe d'une fonction homographique) :*

Hyperbole et quadrilatère

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$. On note M un point de $\mathcal{H}$ de coordonnées $(m;\frac{1}{m})$ avec $m\neq 0$. Soient D_1 et D_2 les droites d'équations $y=mx$ et $y=\frac{1}{m}x$. La droite D_1 coupe $\mathcal{H}$ en A et B. La droite D_2 coupe $\mathcal{H}$ en C et D.
a) Sur notre illustration, on a pris $m=\frac{1}{2}$. Tracer D_1 et D_2.
b) Placer A, B, C et D et déterminer les coordonnées de ces points.
c) Quelle semble être la nature du quadrilatère $ACBD$?
Est-ce un cas particulier lié au choix de m ou bien est-ce une propriété générale? (Justifier votre réponse)