

TD n°3 : valeurs absolues

On rappelle que $|x|=x$ si $x \geq 0$ et $|x|=-x$ si $x \leq 0$. Par exemple $|2,5|=2,5$ et $|-2,3|=2,3$.
 Si $a > 0$, $|x| < a$ équivaut à l'encadrement $-a < x < a$; mais si $a < 0$, $|x| < a$ n'a pas de solution.
 De plus, pour $a > 0$, $|x| > a$ équivaut au système $x > a$ ou $x < -a$; mais si $a < 0$, $|x| > a$ est toujours vrai.

I] Compréhension de la définition

Écrire les expressions suivantes sans les barres de valeur absolue, en précisant le domaine de validité :

$$f(x) = |x-2| ; g(x) = |3x-2| ; h(x) = f(x) + g(x) = |x-2| + |3x-2|$$

Si $x-2 > 0$, $|x-2| = x-2$, donc si $x > 2$, $|x-2| = x-2$.

De même, si $x-2 < 0$ donc si $x < 2$, $|x-2| = -(x-2) = -x+2$.

Lorsque $x-2=0$, l'expression $|x-2|$ vaut 0.

On peut mettre ces résultats dans le tableau synthétique ci-dessous.

Si $3x-2 > 0$, $|3x-2| = 3x-2$, donc si $x > \frac{2}{3}$, $|3x-2| = 3x-2$.

De même, si $3x-2 < 0$ donc si $x < \frac{2}{3}$, $|3x-2| = -(3x-2) = -3x+2$.

Si $x-2 > 0$ et $3x-2 > 0$, $|x-2| + |3x-2| = x-2 + 3x-2 = 4x-4$, donc si $x > 2$, $|x-2| + |3x-2| = 4x-4$.

En fait ici, c'est un peu long et compliqué de tout écrire sous forme de texte; on préférera le tableau suivant où ce qu'on vient d'écrire se retrouve dans la dernière ligne :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	$x-2$
$ 3x-2 $	$-3x+2$	$3x-2$	$3x-2$	$3x-2$
$ x-2 + 3x-2 $	$-3x+2 - x+2 = -4x+4$	$3x-2 - x+2 = 2x$	$3x-2 + x-2 = 4x-4$	

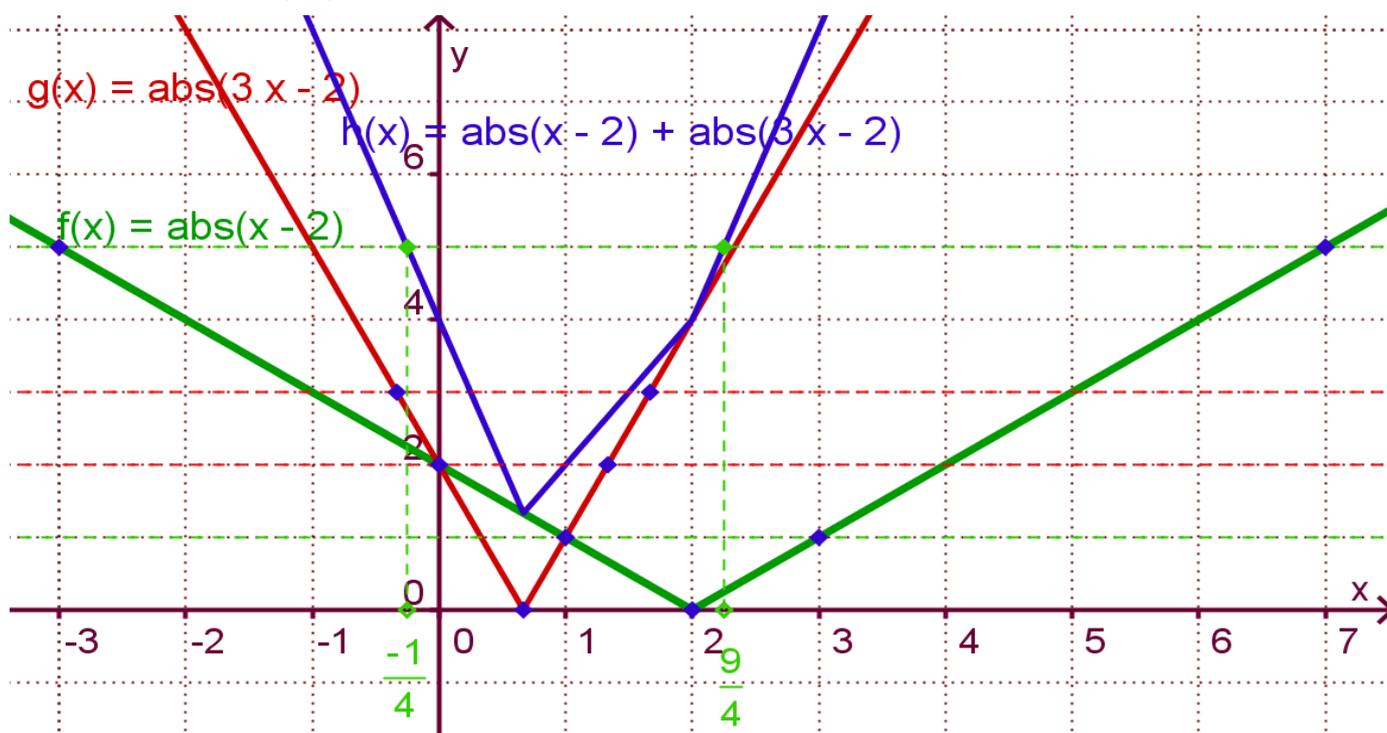
II] Courbes représentatives

a) Représenter les fonctions f , g et h sur le même graphique.

Pour f par exemple (courbe verte), on a une partie qui a pour équation $y = x-2$ (pour $x \geq 2$, c'est la partie de droite) et une autre partie qui a pour équation $y = -x+2$ (pour $x \leq 2$, c'est la partie de gauche).

Pour tracer les deux demi-droites :

- si $x > 2$, $f(x) = x-2$, la représentation est une demi-droite d'origine (2;0) passant par le point de coordonnées (4;2).
- si $x < 2$, $f(x) = -x+2$, la représentation est une demi-droite d'origine (2;0) passant par le point de coordonnées (0;2).



Pour représenter la fonction somme de f et de g , la courbe d'équation $y=h(x)$, avec GeoGebra c'est simple : On tape la formule, telle que, dans la barre de commande. Pour la construction à la main, il faut séparer les trois expressions qui conduisent chacune à une droite, et ne garder de ces droites que la partie qui convient pour le domaine de validité (exactement comme on aura pu le faire pour les fonctions f et g). On obtient donc une courbe (en bleu) en trois morceaux.

III] Équations et inéquations

En utilisant le graphique et, éventuellement, les calculs algébriques résoudre dans \mathbb{R} :

a) Les équations :

$$E_1 : |x-2|=0$$

D'après ce qui a été vu plus haut, on peut écrire $x-2=0$ ou $-x+2=0$, équations conduisant toutes deux à la solution $x=2$. D'une façon générale, pour toute fonction f , l'équation $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

$$E_2 : |3x-2|=|x-2|$$

Si on veut travailler sans le graphique, il faut envisager cette équation dans les trois domaines de validité : D'après ce qui a été vu plus haut, on peut écrire, $-3x+2=-x+2$ pour $x \leq \frac{2}{3}$, équation conduisant à la solution $x=0$ qui est bien dans le domaine de validité ($x \leq \frac{2}{3}$), donc il s'agit d'une première solution.

Pour $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ on a $3x-2=-x+2$ équation conduisant à la solution $x=1$ qui est bien dans le domaine de validité ($\frac{2}{3} \leq x \leq 2$), donc il s'agit d'une deuxième solution.

Pour le dernier domaine ($x \geq 2$), on doit avoir $3x-2=x-2$ équation conduisant à la solution $x=0$ qui n'est pas dans le domaine de validité. Il y a finalement 2 solutions à l'équation : 0 et 1.

Tout ce raisonnement trouverait sa place dans un tableau, il suffit d'ajouter une ligne en dessous, et on résout les équations sans les barres de valeur absolue dans chacun des domaines.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$ x-2 $	$-x+2$		$-x+2$	$x-2$
$ 3x-2 $	$-3x+2$		$3x-2$	$3x-2$
$ x-2 = 3x-2 $	$-x+2=-3x+2$ $2x=0$ $x=0$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré	$-x+2=3x-2$ $4=4x$ $x=1$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré	$x-2=3x-2$ $0=2x$ $x=0$ On rejette cette solution qui n'est pas dans l'intervalle considéré, mais ce rejet ne concerne que ce domaine (la solution 0 a été retenue par ailleurs)	

Mais le plus simple est de raisonner directement sur le graphique (c'était d'ailleurs la méthode suggérée par la consigne) : la courbe de f (verte) et la courbe de g (rouge) se croisent en deux points. Il y a donc deux solutions à l'équation : les abscisses de ces points d'intersection 0 et 1.

$$E_3 : |x-2|+|3x-2|=5$$

Nous pouvons résoudre cette équation dans un tableau ou faire un raisonnement qui distingue les trois cas (les trois domaines du tableau). Utilisons la méthode du tableau et les résultats trouvés plus haut :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$ x-2 + 3x-2 =5$	$-4x+4=5$ $-4x=1$ $x=\frac{-1}{4}$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré		$2x=5$ $x=\frac{5}{2}$ On rejette cette solution qui n'est pas dans l'intervalle considéré ($\frac{5}{2} > 2$)	$4x-4=5$ $4x=9$ $x=\frac{9}{4}$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré

Finalement, l'équation proposée a deux solutions : $\frac{-1}{4}=-0,25$ et $\frac{9}{4}=2,25$.

Encore une fois, le plus simple est de raisonner directement sur le graphique : la courbe de h (bleue) coupe la droite d'équation $y=5$ (pointillés verts) en deux points. Il y a donc deux solutions à l'équation : les abscisses de ces points d'intersection sont moins évidentes à déterminer graphiquement. On peut alors avoir recours au calcul algébrique : la 1^{ère} est solution de $-4x+4=5$, c'est $x=\frac{-1}{4}$ et l'autre est solution de $4x-4=5$, c'est $x=\frac{9}{4}$. Les expressions sans les barres de valeur absolue sont empruntées à l'étude du I.

b) Les inéquations :

$$I_1 : |x-2| < 5$$

Utilisons les résultats de la 2^{ème} ligne de cours ci-dessus : cette inéquation revient à $-5 < x-2 < 5$, qui revient à $-3 < x < 7$ ce qui revient à prendre x dans l'intervalle $[-3; 7]$.

On aurait pu aussi raisonner dans un tableau, avec les deux domaines, cela conduit à résoudre deux inéquations et on cherche l'intersection de leurs ensembles solutions.

Graphiquement, on lit directement l'intervalle solution en constatant que la courbe de f (verte) est en-dessous de la droite d'équation $y=5$ (pointillés verts) pour $-3 < x < 7$.

$$I_2 : |x-2| > 1$$

Utilisons les résultats de la 3^{ème} ligne de cours ci-dessus :

Cette inéquation revient à $x-2 > 1$ ou $x-2 < -1$, soit $x > 3$ ou $x < 1$. L'ensemble solution est ici la réunion de deux intervalles ouverts : on doit prendre x dans $] -\infty; 1[\cup] 3; +\infty [$.

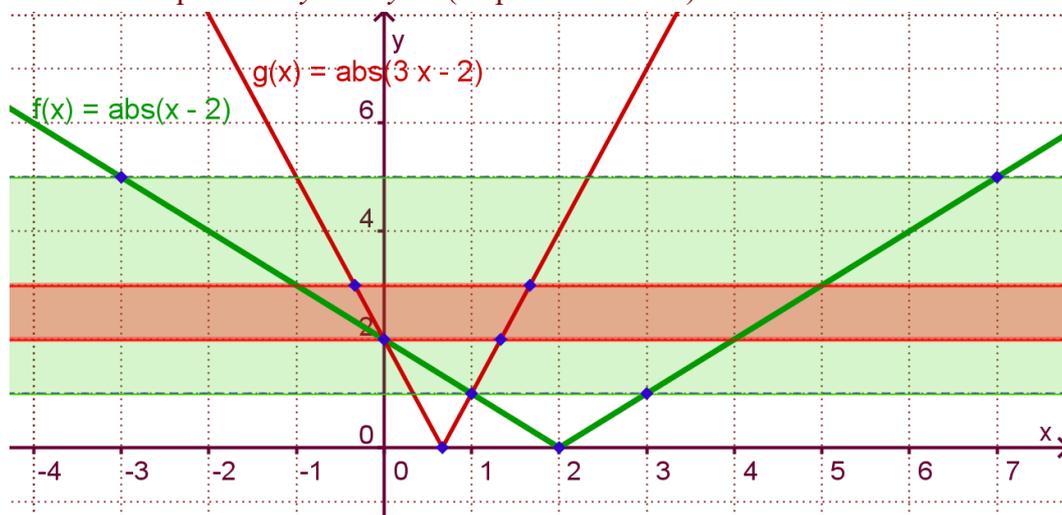
Graphiquement, on lit directement les deux intervalles solutions en constatant que la courbe de f (verte) est au-dessus de la droite d'équation $y=1$ (pointillés verts) pour $x-2 > 1$ ou $x-2 < -1$.

c) En déduire les solutions des encadrements

$$I_3 : 1 < |x-2| < 5$$

Les solutions sont les nombres de l'ensemble $] -3; 1[\cup] 3; 7 [$.

Graphiquement, il faut lire les abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la bande verte limitée par les droites d'équations : $y=1$ et $y=5$ (en pointillés verts).



$$I_4 : 2 \leq |3x-2| \leq 3$$

Si on veut raisonner algébriquement, on peut procéder de même : d'abord une inégalité, ensuite l'autre. L'inéquation $|3x-2| \geq 2$ s'écrit $3x-2 \geq 2$ ou $3x-2 \leq -2$, soit $x \geq \frac{4}{3}$ ou $x \leq 0$.

On peut noter que l'on doit avoir $x \in] -\infty; 0] \cup [\frac{4}{3}; +\infty [$.

L'inéquation $|3x-2| \leq 3$ s'écrit $-3 \leq 3x-2 \leq 3$, soit $-1 \leq 3x \leq 5$ et donc $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$.

On peut noter que l'on doit avoir $x \in] [-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}]$.

Prenons enfin l'intersection des deux ensembles solutions. Cela se fait en examinant un axe gradué où l'on a colorié (hachuré) les deux ensembles solutions. Les solutions de I_4 sont les parties qui ont été coloriées deux fois. Ici, on doit conclure que $x \in [-\frac{1}{3}; 0] \cup [\frac{4}{3}; \frac{5}{3}]$.

Graphiquement, il faut lire les abscisses des points d'intersection de la courbe de g (rouge) et de la bande rose limitée par les droites d'équations : $y=2$ et $y=3$ (en pointillés rouges).

IV] Petits problèmes

a) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x-1| + |x+1| - |2x|$.

Calculer les images par f des nombres de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, -1, -2, -3, -4, -5\}$.

$$f(1) = |1-1| + |1+1| - |2 \times 1| = 0 + 2 - 2 = 0 ; f(2) = |2-1| + |2+1| - |2 \times 2| = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$f(3) = |3-1| + |3+1| - |2 \times 3| = 2 + 4 - 6 = 0 ; f(4) = |4-1| + |4+1| - |2 \times 4| = 3 + 5 - 8 = 0$$

$$f(5) = |5-1| + |5+1| - |2 \times 5| = 4 + 6 - 10 = 0 ; f(-1) = |-1-1| + |-1+1| - |2 \times -1| = 2 + 0 - 2 = 0 ;$$

$$f(-2) = |-2-1| + |-2+1| - |2 \times -2| = 3 + 1 - 4 = 0 ; f(-3) = |-3-1| + |-3+1| - |2 \times -3| = 4 + 2 - 6 = 0 ;$$

$$f(-4) = |-4-1| + |-4+1| - |2 \times -4| = 5 + 3 - 8 = 0 ; f(-5) = |-5-1| + |-5+1| - |2 \times -5| = 6 + 4 - 10 = 0$$

Peut-on, à partir de ces valeurs, simplifier l'expression de $f(x)$?

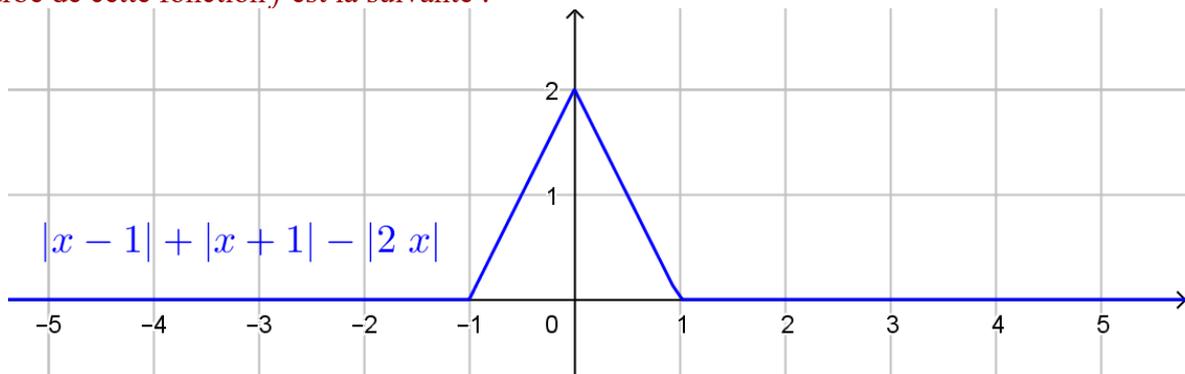
Non, pourtant il semble bien qu'on trouve à chaque fois 0. Même si on continue avec d'autres valeurs ($x=6$ ou 1000). On ne peut généraliser sur des exemples, mêmes nombreux. Il suffit d'un contre-exemple : pour $x=0$, on trouve $f(0)=|0-1|+|0+1|-|2 \times 0|=1+1-0=2$! Alors ? Il faut exprimer $f(x)$ sans les barres de valeur absolue pour pouvoir conclure.

Simplifier l'expression de $f(x)$. Présentons les expressions simplifiées dans un tableau, comme dans la question I.

On trouve finalement que $f(x) = 2x+2$ pour $-1 < x < 0$ et $f(x) = -2x+2$ pour $0 < x < 1$, sinon $f(x) = 0$.

x		-1		0		1	
$ x-1 $	$-x+1$	2	$-x+1$	1	$-x+1$	0	$x-1$
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	1	$x+1$	2	$x+1$
$- 2x $	$2x$	-2	$2x$	0	$-2x$	-2	$-2x$
$ x-1 + x+1 - 2x $	0	0	$2x+2$	2	$-2x+2$	2	0

La courbe de cette fonction f est la suivante :



b) Tracer à la main la courbe de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ||x+1|+|x-1|-6|$.

indication: considérer que $f(x) = |g(x)|$ où $g(x)$ est une expression que l'on cherchera à écrire sans les barres de valeurs absolues. Présentons ici encore, les expressions simplifiées dans un tableau.

On trouve finalement que $f(x) = 2x+2$ pour $-1 < x < 0$ et $f(x) = -2x+2$ pour $0 < x < 1$, sinon $f(x) = 0$.

x		-1		1	
$ x-1 $	$-x+1$	2	$-x+1$	0	$x-1$
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	2	$x+1$
$g(x)= x-1 + x+1 -6$	$-2x-6$	-4	-4	-4	$2x-6$

Du coup, il faut étudier le signe des expressions $2x-6$ pour $x > 1$ et de $-2x-6$ pour $x < -1$:

$2x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ et $-2x-6 > 0 \Leftrightarrow x < -3$. Il y a donc deux autres valeurs à mettre au tableau :

x		-3		-1		1		3	
$g(x)$	$-2x-6$	0	$-2x-6$	-4	-4	-4	$2x-6$	0	$2x-6$
$ g(x) $	$-2x-6$	0	$2x+6$	4	4	4	$-2x+6$	0	$2x-6$

Normalement, on devrait alors pouvoir tracer la courbe avec ces expressions.

