$2^{de}3$	DS n°5 : les fonctions de référence	17/01/17

CORRECTION

I] Polynôme du 2^d degré

On se propose d'étudier la fonction *f* définie par $f(x)=2x^2-6x-1$.

a) Écrire *f*(*x*) sous la forme $\alpha(x-\beta)^2+\gamma$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.

On a $f(x)=2x^2-6x-1=2(x^2-3x-\frac{1}{2})=2((x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2})=2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-\frac{2}{4})=2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{4})$,
soit $f(x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$, ce qui est la forme canonique voulue avec $\alpha=2$; $\beta=\frac{3}{2}=1{,}5$; $\gamma=\frac{-11}{2}=-5{,}5$.

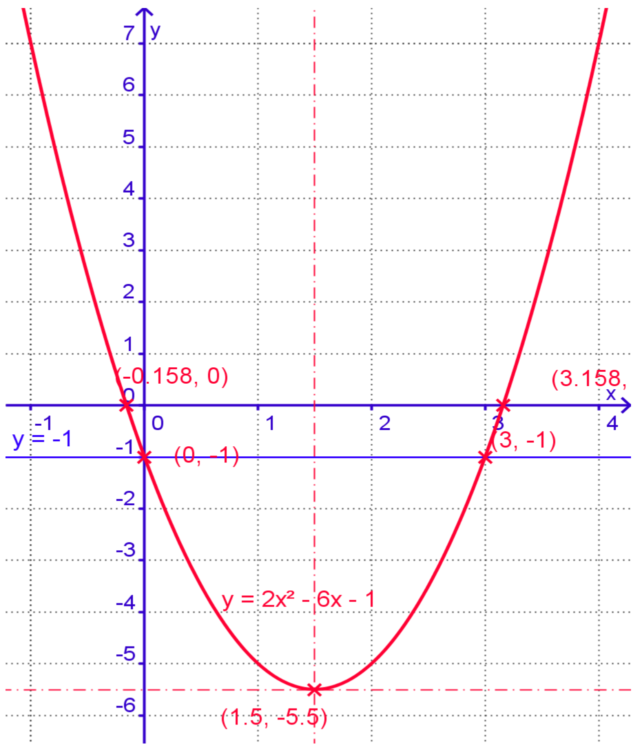
En déduire que *f* admet un minimum y_0 atteint pour une valeur x_0 de *x* à déterminer.

$f(x)=2(x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}$, mais $\forall x\in\mathbb{R}, (x-\frac{3}{2})^2\geq 0$ (avec l'égalité quand on a $x-\frac{3}{2}=0$) et donc $\forall x\in\mathbb{R}, (x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{2}\geq\frac{-11}{2}$ soit, $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq\frac{-11}{2}$ ce qui est une autre façon de dire que $y_0=\frac{-11}{2}$ est un minimum, atteint lorsque l'égalité de cette inégalité au sens large est atteinte, c'est-à-dire pour une valeur x_0 de *x* telle que $x_0-\frac{3}{2}=0$, ou encore pour $x_0=\frac{3}{2}$.

b) Déterminer le taux d'accroissement τ de *f* entre deux valeurs de x puis le sens de variation de *f* sur les intervalles $]-\infty$; $x_0]$ et $[x_0$; $+\infty[$. Tracer alors le tableau de variation de *f*.

On peut retrouver facilement le taux d'accroissement τ par le calcul, ou utiliser la forme générale vue en cours ($\tau=\alpha(x_1-\beta+x_2-\beta)$. Ici, on a $\tau=2(x_1-\frac{3}{2}+x_2-\frac{3}{2})$. On peut aussi écrire que $\tau=2(x_1+x_2-3)$ ou même que $\tau=2(x_1+x_2)-6$ mais ces formes n'apportent qu'une simplification apparente, inutile.

Pour $x_1\leq\frac{3}{2}$ et $x_2\leq\frac{3}{2}$, on a $x_1-\frac{3}{2}\leq 0$ et $x_2-\frac{3}{2}\leq 0$, et si $x_1\neq x_2$ l'un des deux nombres au moins n'est pas nul. Donc, par addition, $x_1-\frac{3}{2}+x_2-\frac{3}{2}<0$. En multipliant par $2>0$, on obtient $2(x_1-\frac{3}{2}+x_2-\frac{3}{2})<0$. Le taux d'accroissement τ étant négatif strictement, la fonction *f* est strictement décroissante sur cet intervalle.



Les trinômes qui admettent un minimum ont un tableau de variation toujours identique :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-11}{2}$	↗

c) Factoriser $f(x)$ sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$ où *a*, x_1 et x_2 sont des nombres à déterminer.

On a
$f(x)=2((x-\frac{3}{2})^2-\frac{11}{4})=2(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2})(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2})$,
ce qui est la forme factorisée voulue avec

$a=2$; $x_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{3-\sqrt{11}}{2}\approx-0{,}158$; $x_2=\frac{3+\sqrt{11}}{2}\approx 3{,}158$.

À quoi correspondent les nombres x_1 et x_2 ?

Les nombres x_1 et x_2 correspondent aux abscisses des points où la courbe de *f* coupe l'axe des abscisses. Ce sont aussi les valeurs de la variable *x* pour lesquelles *f*(*x*) change de signe.

d) Déterminer les images de -1 et de 4 par *f* puis tracer la courbe représentant *f* sur l'intervalle $[-1$;4].

$f(-1)=2(-1)^2-6\times(-1)-1=2+6-1=7$ et $f(4)=2(4)^2-6\times(4)-1=32-24-1=7$.

Voir la courbe plus haut. On y retrouve le minimum, l'axe de symétrie vertical qui passe par ce point, les autres points dont on a déjà calculé les coordonnées (intersections avec des droites).

II] Fonction homographique

La fonction g est définie par $g(x)=\frac{2x-1}{x+1}$.

a) Déterminer la valeur interdite x_0 pour la fonction g et l'ensemble de définition D_g de cette fonction.

On peut calculer $\frac{2x-1}{x+1}$ pour toutes les valeurs réelles de x sauf pour $x+1=0$, il faut donc que $x\neq-1$. L'ensemble de définition D_g est $]-\infty\ ;-1[\cup]-1\ ;+\infty[$, cet ensemble peut aussi se noter $\mathbb{R}-\{-1\}$.

b) Écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha+\frac{\beta}{x-\gamma}$ où α, β et γ sont des nombres à déterminer.

$\frac{2x*1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=2-\frac{3}{x+1}$ ce qui est bien la forme canonique voulue avec $\alpha=2,\beta=-3,\gamma=-1$.

c) Utiliser cette forme canonique pour :

- Déterminer le taux d'accroissement τ de g entre deux valeurs de x .

L'exercice a été fait plusieurs fois, on en a conclu que, d'une façon générale, à partir de la forme canonique rappelée plus haut, on a $\tau=\frac{-\beta}{(x_1-\gamma)(x_2-\gamma)}$. Donc ici, $\tau=\frac{3}{(x_1+1)(x_2+1)}$.

- Déterminer les équations des asymptotes (droites vers lesquelles se rapproche la courbe de g aux bornes de son ensemble de définition) à la courbe de la fonction g.

Il y a deux asymptotes : la verticale correspond à la valeur interdite ; son équation est $x=-1$. l'horizontale correspond à la valeur α de la forme canonique ; son équation est $y=2$.

d) Étudier le signe de τ sur chacun des intervalles de D_g.

Ce nombre τ est strictement positif quels que soient les nombres $x_1\in]-1\ ;+\infty[$ et $x_2\in]-1\ ;+\infty[$ (les deux facteurs (x_1+1) et (x_2+1) sont alors positifs), la fonction g est strictement croissante sur $]-1\ ;+\infty[$.
De même, pour des nombres $x_1\in]-\infty\ ;-1[$ et $x_2\in]-\infty\ ;-1[$ (les deux facteurs (x_1+1) et (x_2+1) sont négatifs). La fonction g est donc strictement croissante sur $]-\infty\ ;-1[$.

Donner le tableau de variation de g avec les valeurs limites quand on s'approche de l'infini et de x_0.

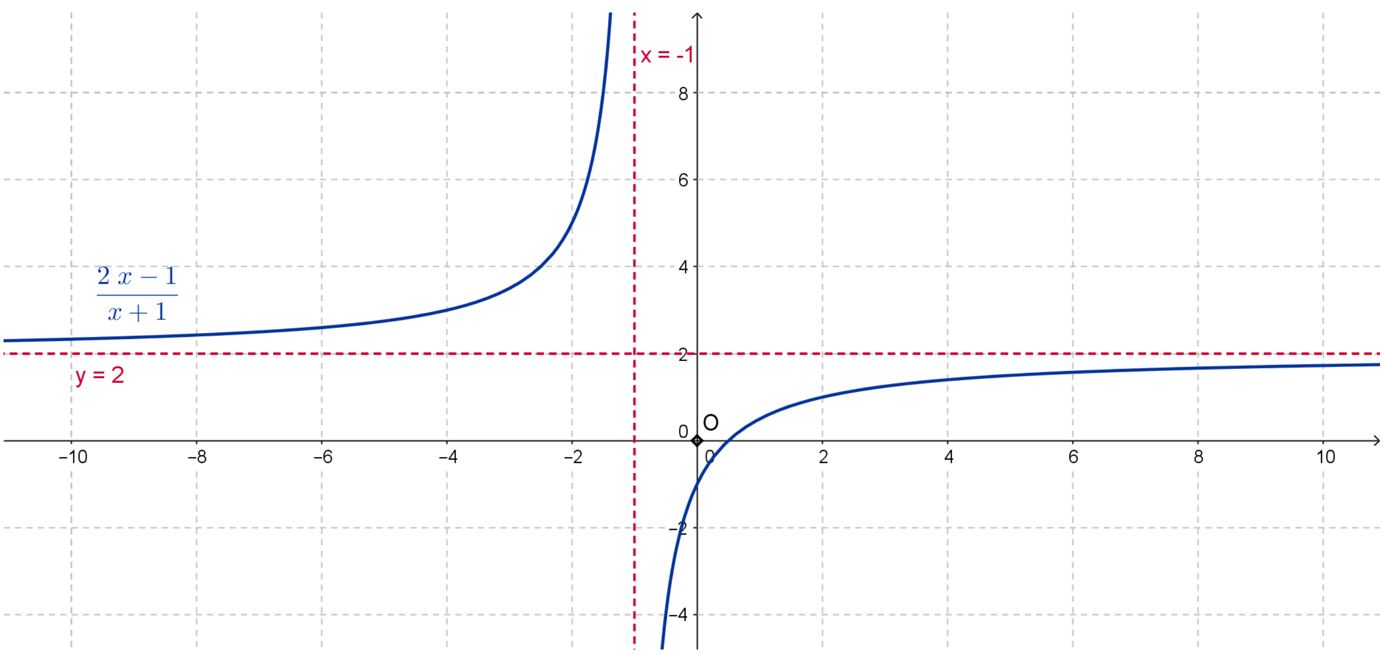
Nous avons déduit le sens de variation de g du signe de τ.
On peut donc dresser le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Pour des valeurs positives très grandes, le dénominateur $x+1$ est très grand, $\frac{3}{x+1}$ est alors très petit, il s'approche de 0. Et donc $2-\frac{3}{x+1}$ s'approche de 2. De même pour des valeurs infiniment petite négativement... Pour les valeurs proches de la valeur interdite -1 , le nombre $g(x)$ s'approche de l'infini (positif ou négatif selon les cas).

e) Tracer la courbe de g sur $[-10\ ;10]$ ainsi que ses asymptotes.

Les asymptotes sont tracées en pointillés rouge. La courbe de g est en bleu.



III] Valeur absolue

La fonction h est définie par $h(x)=h_1(x)-h_2(x)$, avec $h_1(x)=|x+1|$ et $h_2(x)=|1-2x|$.

a) Écrire les expressions $|x+1|$, $|1-2x|$ et $|x+1|-|1-2x|$ sans les barres de valeur absolue, en précisant le domaine de validité de chacune des expressions (présenter les résultats dans un tableau).

Nous pouvons distinguer 3 cas selon la valeur de x.

$x+1>0$ pour $x>-1$ et $1-2x>0$ pour $x<\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$\lvert 1-2x\rvert$	$1-2x$		$1-2x$	0	$-1+2x$
$\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert$	$-x-1-(1-2x)=-2+x$		$x+1-(1-2x)=3x$		$x+1-(-1+2x)=2-x$

b) Donner le tableau de variation de h à partir des résultats du premier tableau.

Sur les deux premiers intervalles, les expressions affines sont croissantes (car le coefficient de x est positif), puis sur le derniers intervalle, l'expression affines est décroissante.

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h(x)=\lvert x+1\rvert-\lvert 1-2x\rvert$	↗	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘

Montrer que h admet un maximum Max atteint pour une valeur x_{Max} à déterminer.

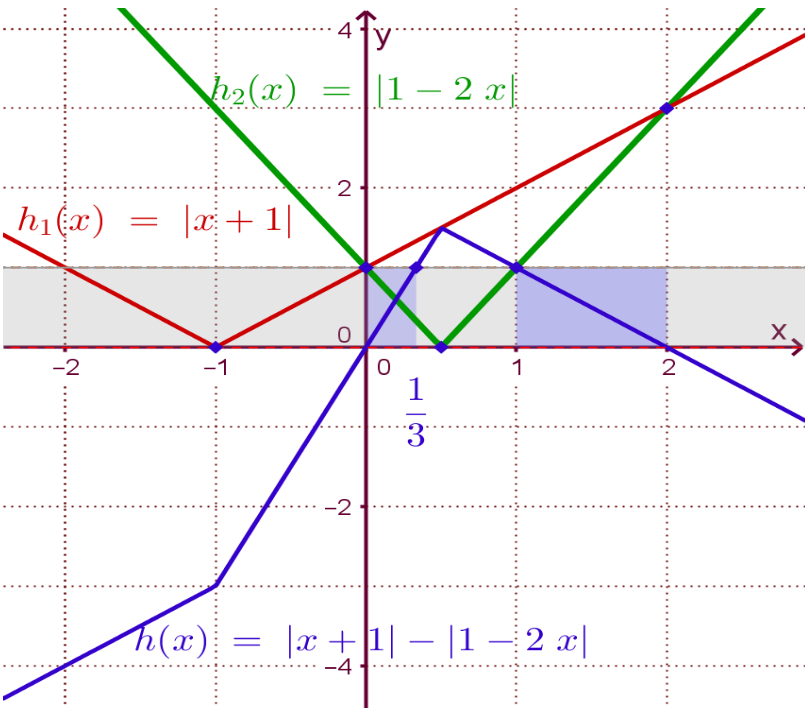
La fonction h est croissante jusqu'à $x=\frac{1}{2}$ puis décroissante, donc h admet un maximum $Max=h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ atteint pour la valeur $x_{Max}=x=\frac{1}{2}$.

c)Tracer la courbe de h sur $[-2\,;2]$ ainsi que les courbes des fonctions h_1 et h_2.

Voici (à droite) en bleu la courbe de h, en rouge celle de h_1 et en vert celle de h_2.

Pour les tracer, il suffit de prendre les points déterminés précédemment, et si besoin, les expressions algébriques (sans les valeurs absolues).

Par exemple, le segment intermédiaire de la courbe de h joint les points de coordonnées $(-1\,;-3)$ et $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, d'après le tableau. À gauche et à droite de ce segment, les droites ont une pente égale à 1 ou -1 ce qui aide beaucoup la construction, lorsqu'on la fait à la main.



d) Résoudre graphiquement l'équation $h(x)=1$, vérifier algébriquement les résultats.

Graphiquement, on voit que l'équation $h(x)=1$ a deux solutions réelles : une égale à 1 et l'autre environ égale à 0,3. Cette dernière valeur mérite d'être précisée par le calcul algébrique.

Il s'agit du domaine intermédiaire, où $-1<x<\frac{1}{2}$ et l'équation s'écrit alors $3x=1$.

La solution est donc $\frac{1}{3}\approx 0{,}333$ et non 0,3. Les deux solutions sont donc $\frac{1}{3}$ et 1.

e) Résoudre l'inéquation $0<h(x)\leq 1$.

Pour $x<-1$, on a $0<-2+x\leq 1$, soit $2<x\leq 3$, ce qui ne convient pas.

Pour $-1<x<\frac{1}{2}$, on a $0<3x\leq 1$, soit $0<x\leq\frac{1}{3}$, ce qui convient.

Pour $x>\frac{1}{2}$, on a $0<2-x\leq 1$, soit $-2<-x\leq -1$, et donc $2>x\geq 1$ ce qui convient aussi.

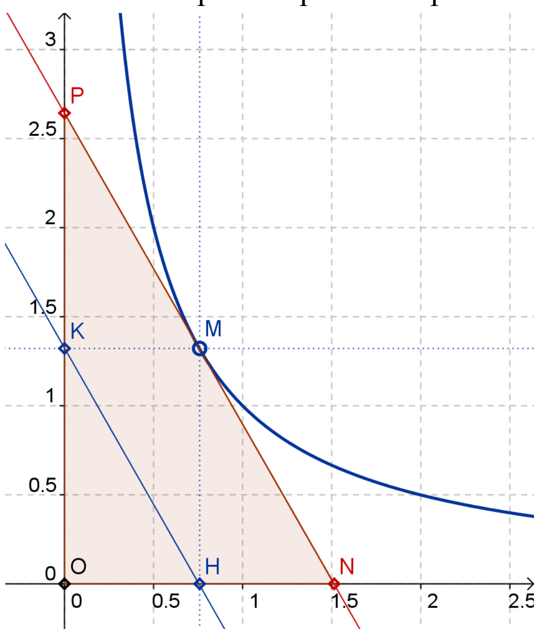
Finalement on a trouvé que $0<x\leq\frac{1}{3}$ ou $1\leq x<2$. Il faut donc que $x\in\left]0\,;\frac{1}{3}\right]\cup[1\,;2[$.

Les valeurs qui conviennent sont les abscisses des points situés dans la bande grisée, en enlevant les abscisses des points d'intersection avec l'axe des abscisses (car on veut 0<$h(x)$).

IIII] Problème

Soit $\mathcal{H}$ la branche d'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ avec $x>0$.

On note M le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse m. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M coupe celui-ci en H. La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par M coupe celui-ci en K. On note $\mathcal{D}$ la parallèle à la droite (HK) passant par M. La droite $\mathcal{D}$ coupe les axes des coordonnées en N et P (voir figure).



a) Déterminer l'équation de la droite (HK).

$M\left(m;\frac{1}{m}\right)$, $H(m;0)$ et $K\left(0;\frac{1}{m}\right)$.

L'équation de la droite (HK) est de la forme $y=ax+b$, où $b=\frac{1}{m}$ (ordonnée à l'origine) et $\frac{-b}{a}=m$ (abscisse du point d'intersection de la droite avec l'axe des x), soit $a=\frac{\frac{-1}{m}}{m}=\frac{-1}{m^2}$. On aurait aussi pu calculer le taux de variation (pente) $a=\frac{y_K-y_H}{x_K-x_H}=\frac{\frac{1}{m}-0}{0-m}=\frac{-1}{m^2}$. Finalement (HK) a pour équation $y=\frac{-1}{m^2}x+\frac{1}{m}$.

b) En déduire l'équation de $\mathcal{D}$.

L'équation de $\mathcal{D}$ se déduit de celle de (HK) car les 2 droites étant parallèles, elles ont le même coefficient directeur $\frac{-1}{m^2}$. On a donc quelque chose comme $y=\frac{-1}{m^2}x+b'$. Comme la droite $\mathcal{D}$ passe par M, le nombre b' vérifie l'égalité : $\frac{1}{m}=\frac{-1}{m^2}\times m+b'$, soit $\frac{1}{m}=\frac{-1}{m}+b'$ ou encore $b'=\frac{2}{m}$. L'équation de $\mathcal{D}$ est donc $y=\frac{-1}{m^2}x+\frac{2}{m}$.

c) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ ne coupe $\mathcal{H}$ qu'en un seul point
(on dit alors que $\mathcal{D}$ est la *tangente* en M à la courbe $\mathcal{H}$).

Les points où la droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{H}$ vérifient $\frac{-1}{m^2}x+\frac{2}{m}=\frac{1}{x}$, soit $-x^2+2mx=m^2$ (en multipliant par m^2x), soit encore $x^2-2mx+m^2=0$. Cette équation du 2d degré (qui pourrait donc avoir deux solutions) s'écrit aussi $(x-m)^2=0$. Il n'y a donc qu'une solution $x=m$ à cette équation, donc un seul point de contact entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}$: le point d'abscisse $x=m$, c'est-à-dire M. Cela se voyait, certes, sur la figure, mais il fallait ici le démontrer algébriquement car une figure, aussi précise soit-elle, n'est jamais une preuve.

L'équation de la tangente à l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ en un point M d'abscisse m est donc $y=\frac{-1}{m^2}x+\frac{2}{m}$.

d) Déterminer l'aire $\mathcal{A}(m)$ du triangle PON tangent en M à l'hyperbole.
Quelle est la valeur de m qui maximise $\mathcal{A}$?

On connaît déjà $PO=\frac{2}{m}$ (ordonnée de P), calculons NO. NO est l'abscisse de N, le point de $\mathcal{D}$ d'ordonnée nulle. En appelant x ce nombre, on a donc $0=\frac{-x}{m^2}+\frac{2}{m}$, soit $\frac{x}{m^2}=\frac{2}{m}$, ou encore, comme $m\neq 0$, $mx=2m^2$ (produit en croix), ce qui conduit à $x=2m$. L'aire du triangle PON est donc égale à $\frac{PO\times NO}{2}=\frac{\frac{2}{m}\times 2m}{2}=\frac{4}{2}=2$.
Tiens, elle est constante! Quelle que soit la position du point M sur la courbe (et donc quel que soit $m\neq 0$), l'aire de ce triangle « tangent » est constant. Il n'y a donc pas de valeur de m qui maximise cette aire...

<u>Bonus</u> : Quelles sont les solutions réelles de l'équation $f(x)=g(x)$ (les fonctions des parties I et II) ?

$2x^2-6x-1=\frac{2x-1}{x+1}$, pour $x\neq -1$ est équivalent à l'égalité $(2x^2-6x-1)(x+1)=2x-1$ qui, elle même équivaut à $2x^3-4x^2-7x-1=2x-1$. Regroupons tout à gauche, on obtient $2x^3-4x^2-9x=0$ qui se factorise en $x(2x^2-4x-9)=0$. On a donc déjà une solution : $x=0$. Les deux autres sont les solutions de $2x^2-4x-9=0$. On calcule le discriminant $\Delta=4^2-4\times 2\times(-9)=16+72=88=4^2\times 5{,}5$.
Les deux autres solutions sont donc $x=\frac{4\pm\sqrt{88}}{4}=1\pm\sqrt{5{,}5}$, soit $1+\sqrt{5{,}5}\approx 3{,}345$ et $1-\sqrt{5{,}5}\approx -1{,}345$.
On peut vérifier graphiquement (ce n'était pas demandé) ces valeurs : ce sont les abscisses des points A, B et C sur le graphique ci-contre.