TD n°3 : valeurs absolues

On rappelle que $|x|=x$ si $x\geq 0$ et $|x|=-x$ si $x\leq 0$. Par exemple $|2{,}5|=2{,}5$ et $|-2{,}3|=2{,}3$.
Si $a>0$, $|x|<a$ équivaut à l'encadrement $-a<x<a$; mais si $a<0$, $|x|<a$ n'a pas de solution.
De plus, pour $a>0$, $|x|>a$ équivaut au système $x>a$ ou $x<-a$; mais si $a<0$, $|x|>a$ est toujours vrai.

I] Compréhension de la définition

Écrire les expressions suivantes sans les barres de valeur absolue, en précisant le domaine de validité :
$f(x)=|x-2|$; $g(x)=|3x-2|$; $h(x)=f(x)+g(x)=|x-2|+|3x-2|$

Si $x-2>0$, $|x-2|=x-2$, donc si $x>2$, $|x-2|=x-2$.
De même, si $x-2<0$ donc si $x<2$, $|x-2|=-(x-2)=-x+2$.
Lorsque $x-2=0$, l'expression $|x-2|$ vaut 0.
On peut mettre ces résultats dans le tableau synthétique ci-dessous.

Si $3x-2>0$, $|3x-2|=3x-2$, donc si $x>\frac{2}{3}$, $|3x-2|=3x-2$.
De même, si $3x-2<0$ donc si $x<\frac{2}{3}$, $|3x-2|=-(3x-2)=-3x+2$.

Si $x-2>0$ et $3x-2>0$, $|x-2|+|3x-2|=x-2+3x-2=4x-4$, donc si $x>2$, $|x-2|+|3x-2|=4x-4$.
En fait ici, c'est un peu long et compliqué de tout écrire sous forme de texte ; on préférera le tableau suivant où ce qu'on vient d'écrire se retrouve dans la dernière ligne :

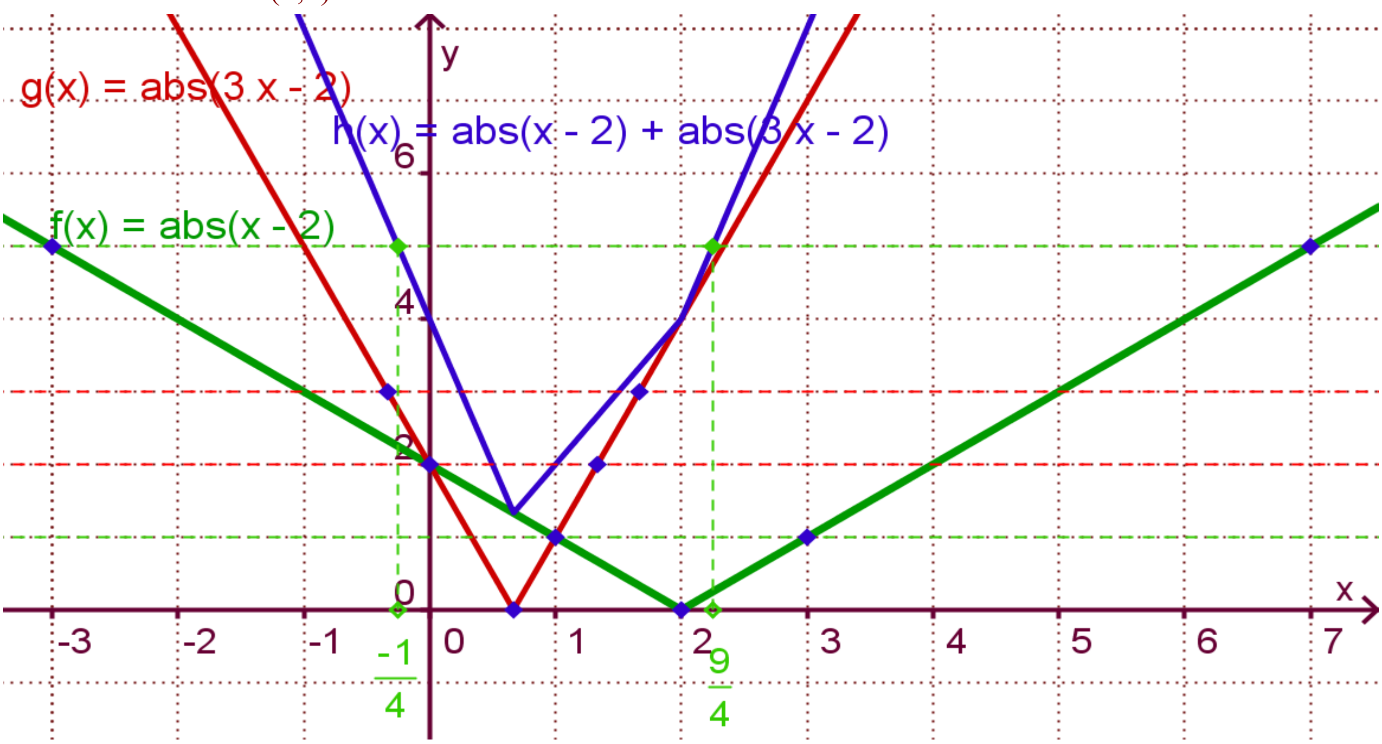
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $\frac{2}{3}$	$\qquad\qquad$ 2	$\qquad\qquad$ $+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert 3x-2\rvert$	$-3x+2$	$3x-2$	$3x-2$
$\lvert x-2\rvert+\lvert 3x-2\rvert$	$-3x+2-x+2=-4x+4$	$3x\pm2-x+2=2x$	$3x-2+x-2=4x-4$

II] Courbes représentatives

a) Représenter les fonctions *f*, *g* et *h* sur le même graphique.
Indication : Utiliser les formes sans barres de valeur absolue obtenues au I)

Pour *f* par exemple (courbe verte), on a une partie qui a pour équation $y=x-2$ (pour $x\geq 2$, c'est la partie de droite) et une autre partie qui a pour équation $y=-x+2$ (pour $x\leq 2$, c'est la partie de gauche).
Pour tracer les deux demi-droites :

- si $x>2$, $f(x)=x-2$, la représentation est une demi-droite d'origine (2;0) passant par le point de coordonnées (4;2).
- si $x<2$, $f(x)=-x+2$, la représentation est une demi-droite d'origine (2;0) passant par le point de coordonnées (0;2).



Pour représenter la fonction somme de *f* et de *g*, la courbe d'équation *y*=*h*(*x*), avec GeoGebra c'est simple : On tape la formule, telle que, dans la barre de commande. Pour la construction à la main, il faut séparer les trois expressions qui conduisent chacune à une droite, et ne garder de ces droites que la partie qui convient pour le domaine de validité (exactement comme on aura pu le faire pour les fonctions *f* et *g*). On obtient donc une courbe (en bleu) en trois morceaux.

III] Équations et inéquations

En utilisant le graphique et, éventuellement, les calculs algébriques résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) Les équations :

E_1 : $|x-2|=0$

D'après ce qui a été vu plus haut, on peut écrire $x-2=0$ ou $-x+2=0$, équations conduisant toutes deux à la solution *x*=2. D'une façon générale, pour toute fonction *f*, l'équation $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

E_2 : $|3x-2|=|x-2|$

Si on veut travailler sans le graphique, il faut envisager cette équation dans les trois domaines de validité :
D'après ce qui a été vu plus haut, on peut écrire, $-3x+2=-x+2$ pour $x\le\frac{2}{3}$, équation conduisant à la solution *x*=0 qui est bien dans le domaine de validité ($x\le\frac{2}{3}$), donc il s'agit d'une première solution.
Pour $\frac{2}{3}\le x\le 2$ on a $3x-2=-x+2$ équation conduisant à la solution *x*=1 qui est bien dans le domaine de validité ($\frac{2}{3}\le x\le 2$), donc il s'agit d'une deuxième solution.
Pour le dernier domaine ($x\ge 2$), on doit avoir $3x-2=x-2$ équation conduisant à la solution *x*=0 qui n'est pas dans le domaine de validité. Il y a finalement 2 solutions à l'équation : 0 et 1.
Tout ce raisonnement trouverait sa place dans un tableau, il suffit d'ajouter une ligne en dessous, et on résout les équations sans les barres de valeur absolue dans chacun des domaines.

x	$-\infty$ $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ 2	2 $+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert 3x-2\rvert$	$-3x+2$	$3x-2$	$3x-2$
$\lvert x-2\rvert=\lvert 3x-2\rvert$	$-x+2=-3x+2$ $2x=0$ $x=0$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré	$-x+2=3x-2$ $4=4x$ $x=1$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré	$x-2=3x-2$ $0=2x$ $x=0$ On rejette cette solution qui n'est pas dans l'intervalle considéré, mais ce rejet ne concerne que ce domaine (la solution 0 a été retenue par ailleurs)

Mais <u>le plus simple est de raisonner directement sur le graphique</u> (c'était d'ailleurs la méthode suggérée par la consigne) : la courbe de *f* (verte) et la courbe de *g* (rouge) se croisent en deux points. Il y a donc deux solutions à l'équation : les abscisses de ces points d'intersection 0 et 1.

E_3 : $|x-2|+|3x-2|=5$

Nous pouvons résoudre cette équation dans un tableau ou faire un raisonnement qui distingue les trois cas (les trois domaines du tableau). Utilisons la méthode du tableau et les résultats trouvés plus haut :

x	$-\infty$ $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ 2	2 $+\infty$
$\lvert x-2\rvert+\lvert 3x-2\rvert=5$	$-4x+4=5$ $-4x=1$ $x=\frac{-1}{4}$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré	$2x=5$ $x=\frac{5}{2}$ On rejette cette solution qui n'est pas dans l'intervalle considéré ($\frac{5}{2}>2$	$4x-4=5$ $4x=9$ $x=\frac{9}{4}$ On retient cette solution qui est dans l'intervalle considéré

Finalement, l'équation proposée a deux solutions : $\frac{-1}{4}=-0{,}25$ et $\frac{9}{4}=2{,}25$.
Encore une fois, <u>le plus simple est de raisonner directement sur le graphique</u> : la courbe de *h* (bleue) coupe la droite d'équation *y*=5 (pointillés verts) en deux points. Il y a donc deux solutions à l'équation : les abscisses de ces points d'intersection sont moins évidentes à déterminer graphiquement. On peut alors avoir recours au calcul algébrique : la 1ère est solution de $-4x+4=5$, c'est $x=\frac{-1}{4}$ et l'autre est solution de $4x-4=5$, c'est $x=\frac{9}{4}$. Les expressions sans les barres de valeur absolue sont empruntées à l'étude du I.

b) Les inéquations :

I_1 : $|x-2|<5$

Utilisons les résultats de la 2ème ligne de cours ci-dessus : cette inéquation revient à $-5<x-2<5$, qui revient à $-3<x<7$ ce qui revient à prendre x dans l'intervalle $[-3;7]$.

On aurait pu aussi raisonner dans un tableau, avec les deux domaines, cela conduit à résoudre deux inéquations et on cherche l'intersection de leurs ensembles solutions.

Graphiquement, on lit directement l'intervalle solution en constatant que la courbe de f (verte) est en-dessous de la droite d'équation $y=5$ (pointillés verts) pour $-3<x<7$.

I_2 : $|x-2|>1$

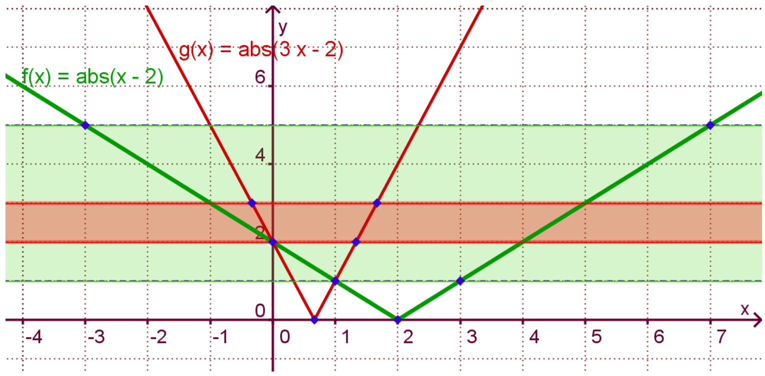
Utilisons les résultats de la 3ème ligne de cours ci-dessus :

Cette inéquation revient à $x-2>1$ ou $x-2<-1$, soit $x>3$ ou $x<1$. L'ensemble solution est ici la réunion de deux intervalles ouverts : on doit prendre x dans $]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$.

Graphiquement, on lit directement les deux intervalles solutions en constatant que la courbe de f (verte) est au-dessus de la droite d'équation $y=1$ (pointillés verts) pour $x-2>1$ ou $x-2<-1$.

c) En déduire les solutions des encadrements

I_3 : $1<|x-2|<5$ et I_4 : $2\leq|3x-2|\leq3$



L'encadrement $1<|x-2|<5$ a pour solutions les nombres de l'ensemble $]-3;1[\cup]3;7[$.

Graphiquement, il faut lire les abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la bande verte limitée par les droites d'équations : $y=1$ et $y=5$ (en pointillés verts).

Pour I_4, si on veut raisonner algébriquement, on peut procéder de même : d'abord une inégalité, ensuite l'autre. L'inéquation $|3x-2|\geq2$ s'écrit $3x-2\geq2$ ou $3x-2\leq-2$, soit $x\geq\frac{4}{3}$ ou $x\leq0$.

On peut noter que l'on doit avoir $x\in\ ]-\infty;0]\cup[\frac{4}{3};+\infty[$.

L'inéquation $|3x-2|\leq3$ s'écrit $-3\leq3x-2\leq3$, soit $-1\leq3x\leq5$ et donc $\frac{-1}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}$.

On peut noter que l'on doit avoir $x\in\ ][-\frac{1}{3};\frac{5}{3}]$.

Prenons enfin l'intersection des deux ensembles solutions. Cela se fait en examinant un axe gradué où l'on a colorié (hachuré) les deux ensembles solutions. Les solutions de I_4 sont les parties qui ont été coloriées deux fois. Ici, on doit conclure que $x\in[-\frac{1}{3};0]\cup[\frac{4}{3};\frac{5}{3}]$.

Graphiquement, il faut lire les abscisses des points d'intersection de la courbe de g (rouge) et de la bande rose limitée par les droites d'équations : $y=2$ et $y=3$ (en pointillés rouges).

III] D'autres exemples

a) Donner la forme canonique du trinôme x^2-2x-3

$x^2-2x-3=(x-1)^2-1-3=(x-1)^2-4$

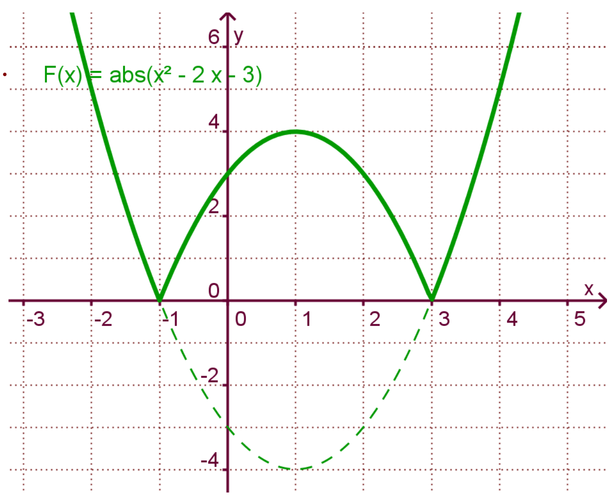
b) En déduire le tableau de variation de $F: x\mapsto x^2-2x-3$

On sait que $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=(x-1)^2-4\geq-4$.

La fonction F admet un minimum -4, atteint pour $x=1$.

Le tableau de variation de F est donc le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



c) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)=0$

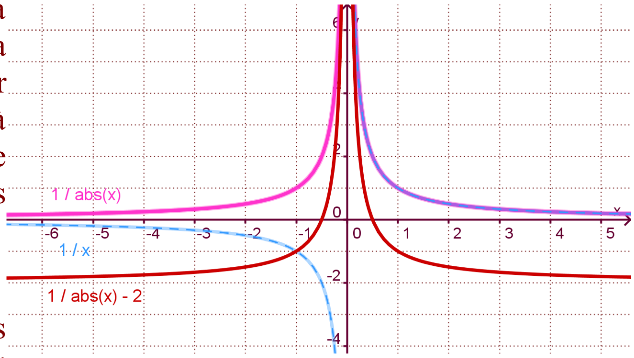
$F(x)=(x-1)^2-4=(x-1-2)(x-1+2)=(x-3)(x+1)$,

donc l'équation $F(x)=0$ a pour solutions

$x-3=0$ ou $x+1=0$, soit $x=3$ ou $x=-1$. Ces solutions sont les antécédents de 0 par *F*, les abscisses des points où la courbe de *F* coupe l'axe des abscisses.

d) Représenter la fonction *F* et la fonction *G* définie par $G(x)=|F(x)|$ sur le même graphique.
Pour obtenir ce genre de courbe, on trace la parabole d'équation $y=x^2-2x-3$ et ensuite, on prend le symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie située en dessous de l'axe des abscisses.

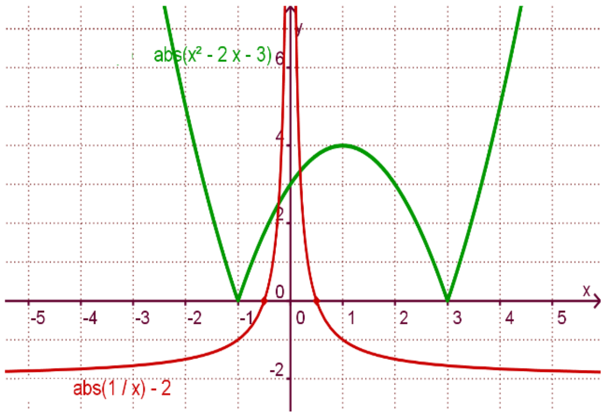
e) Représenter graphiquement la fonction $H : x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|-2$
Ici aussi, on commence par prendre le symétrique de la partie de l'hyperbole représentant la fonction inverse (la branche bleue a pour symétrique la branche rose) par rapport à l'axe des abscisses, puis on enlève 2 à l'ordonnée de tous les points de la courbe obtenue, ce qui revient à la déplacer vers le bas de 2 unités (translation verticale).
On obtient la courbe de *H* (en rouge).



Si on veut savoir où cette courbe touche l'axe des abscisses, il suffit de résoudre l'équation $\frac{1}{x}-2=0$ qui est l'expression de $H(x)$ quant $x>0$. Cette équation conduit à $x=\frac{1}{2}$.
L'autre solution est opposée car la fonction *H* est paire. En effet, $H(-x)=\left|\frac{1}{-x}\right|-2=\left|\frac{1}{x}\right|-2=H(x)$.

Si on veut savoir où cette courbe coupe la courbe de *G*, il faut résoudre, en principe, l'équation $|x^2-2x-3|=\left|\frac{1}{x}\right|-2$. Mais on voit sur le graphique (ça sert aussi à cela un graphique) que les deux courbes se coupent en deux points pour lesquels les expressions de $G(x)$ et $H(x)$ sont connues (ou facilement connues, voir l'exercice I).
Lorsque $x>0$ par exemple, il faut donc résoudre l'équation $-x^2+2x+3=\frac{1}{x}-2$. Cette équation est tout de même du 3ème degré car elle se réduit à $-x^3+2x^2+3x=1-2x$, puis à $-x^3+2x^2+5x-1=0$.
Un logiciel comme Xcas vient à notre secours et donne les valeurs des solutions cherchées :

-1.57577347265
0.18728372511
3.38848974754



Parmi ces trois nombres, un seul appartient à l'intervalle de validité de notre équation sans valeur absolue, c'est 0.18728372511 les autres correspondant aux deux autres points d'intersection des courbes complètes d'équations $y=-x^2+2x+3$ et $y=\frac{1}{x}-2$ (voir figure). On voit que GeoGebra peut aussi donner des valeurs précises...