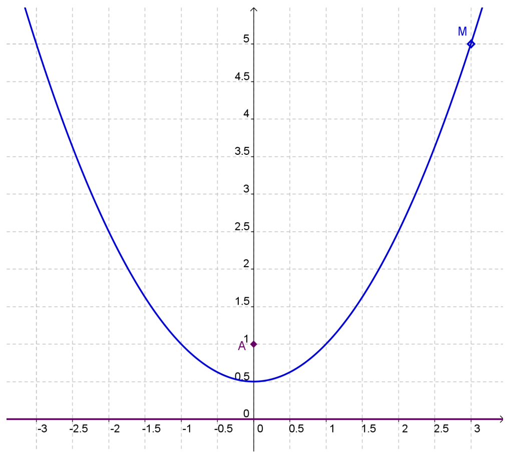
DM n°5 : Courbes

Travail à faire en quinze jours à deux (les trois parties) ou seul (deux parties sur trois)

I] Parabole, foyer et directrice



La figure ci-contre représente la parabole Ψ d'équation $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ dans un repère orthonormé. On note M le point de Ψ d'abscisse m et A le point de coordonnées (0 ; 1).
(*on a choisit m=3 sur notre illustration, mais m peut décrire* $\mathbb{R}$)

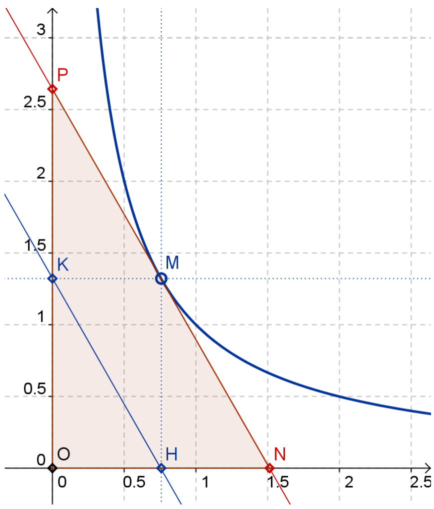
a) Exprimer en fonction de m la *distance** AM. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre M passant par A, puis, démontrer que ce cercle est *tangent*** à l'axe des abscisses.

* *La distance entre deux points A et B dont on connaît les coordonnées dans un repère orthonormé se calcule avec la formule issue du théorème de Pythagore* $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

** *Une droite est tangente à une courbe si elle la coupe en un seul point*

b) Montrer que la propriété précédente n'est pas liée au choix de m et constitue une propriété générale de la parabole Ψ. Autrement dit, montrer que le cercle de centre M passant par A est tangent à l'axe des abscisses quel que soit le réel m.

c) Déterminer l'équivalent de l'axe des abscisses (la directrice de Ψ) et du point A (le foyer de Ψ) pour la parabole d'équation $y=x^2$?



II] Triangles tangents sous hyperbole

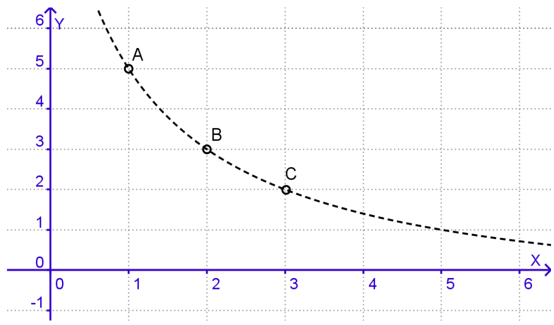
Soit $\mathscr{H}$ la branche d'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ avec $x>0$.
On note M le point de $\mathscr{H}$ d'abscisse m. La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M coupe celui-ci en H. La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par M coupe celui-ci en K. On note $\mathscr{D}$ la parallèle à la droite (HK) passant par M. La droite $\mathscr{D}$ coupe les axes des coordonnées en N et P (voir figure).

a) Déterminer l'équation de la droite (HK). En déduire l'équation de $\mathscr{D}$.
(on rappelle que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur)

b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est *tangente*** en M à la courbe $\mathscr{H}$.

c) Déterminer l'aire $\mathscr{A}(m)$ du triangle PON tangent en M à l'hyperbole. Quelle est la valeur de m qui maximise $\mathscr{A}$?

III] Hyperbole passant par trois points



Dans cette partie, on estime qu'il existe toujours une hyperbole Π — une courbe d'équation $y=\frac{a}{x+b}+c$ — qui passe par trois points non alignés *A, B* et *C* donnés. Le but de cette question est de déterminer les coefficients *a, b* et *c* de cette hyperbole, dans un cas particulier tout d'abord, puis dans le cas général.

a) Prenons $A(1;5)$, $B(2;3)$ et $C(3;2)$. Écrire le système de trois équations en *a, b* et *c* qui traduit l'appartenance des points *A, B* et *C* à l'hyperbole Π. Transformer ces égalités en mettant chacune au même dénominateur et, ensuite, appliquer le produit en croix pour ne plus avoir de dénominateur. Résoudre ce système d'équations par la méthode des substitutions :

> *Garder L_1 inchangée (la ligne 1 traduisant l'appartenance du point A à Π) pour le calcul de a. Substituer le a des autres équations par l'expression trouvée dans L_1. Garder L_2 inchangée (la nouvelle ligne 2) pour le calcul de b. Substituer le b de la dernière équation par l'expression trouvée dans L_2. Déterminer c, puis b et enfin a.*

En déduire l'équation de l'hyperbole Π. Vérifier votre équation en remplaçant x par 1, 2 et 3 (on doit trouver 5, 3 et 2). Appliquer votre équation pour déterminer l'ordonnée du point de Π d'abscisse 6.

b) Prenons la situation générale où l'on a $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$. Écrire le système et résoudre comme précédemment pour trouver la forme générale des coefficients *a, b* et *c* en fonctions des nombres x_A, x_B, x_C, y_A, y_B et y_C . Vérifier vos formules pour retrouver les coefficients dans le cas du a).

c) Déterminer l'équation de l'hyperbole passant par les points $A(1;1)$, $B(3;4)$ et $C(4;0)$.

Tracer cette hyperbole pour $x \in [0 ; 6]$.